МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, М.И. Карпухина, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2021/2022 учебный год

Учебное пособие

Москва 2022

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, М.И. Карпухина, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2021/2022 учебный год

Учебное пособие

Для учащихся 5-11 классов школ

Москва 2022

УДК 004.02, 37, 51

Андреев А.А., Карпухина М.И., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников: ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2021/2022 учебный год / МТУСИ. – М., 2022. – 148 с.

Издание утверждено Методическим советом университета в качестве учебного пособия. Протокол № 4 от 19.04.2022 г.

Рецензенты: Д.Е. Студеникин, к.т.н., проректор (ГМУ им. Ф.Ф. Ушакова)
К.Н. Панков, к.ф.-м.н., доцент (МТУСИ)

Содержание

О сборнике

Приводятся тексты заданий олимпиады с решениями/ответами по математике и информатике как отборочного так и заключительного тура, статистические сведения и историческая справка.

Пособие предназначено для участников олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

Все опубликованные в настоящем издании материалы распространяются свободно, могут копироваться и использоваться в учебном процессе без ограничений.

Желательны (в случаях, когда это уместно) ссылки на источник.

Электронная версия: https://тиим.рф

Авторы: А.А. Андреев, М.И. Карпухина, Е.А. Максимова,
Е.А. Скородумова

Предисловие

Рост научного и технического потенциала современной России, непрерывно растущая потребность в высококвалифицированных кадрах в области естественно-технических наук и IT-технологий вызвали к жизни различные формы популяризации естественнонаучных знаний среди школьников – будущих абитуриентов.

Олимпиады для школьников являются одной из таких форм; они демонстрируют школьнику разнообразие математики, открывают новые её разделы и учат по-новому смотреть на уже известные факты, призывают не бояться непривычных формулировок. Организацией олимпиад активно занимаются университеты, фонды, учреждения РАН и центры дополнительного образования.

Для успешного выступления на олимпиадах помимо творческих способностей необходима серьёзная подготовка, неотъемлемой составляющей которой являются ознакомление с заданиями и разбор решений математических соревнований различных уровней.

Основной задачей олимпиады школьников «ТИИМ – Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» является поддержание и развитие интереса к решению нестандартных задач математики и программирования. Олимпиада проводится учреждениями высшего образования, центрами Сириус и школами России и ближнего зарубежья.

Впервые олимпиада школьников ТИИМ состоялась в 2020/2021 учебном году по двум предметам – математике и информатике – и сразу привлекла к себе внимание более 3500 школьников со всей России и стран ближнего зарубежья.

В 2021/22 учебном году отборочный тур олимпиады прошел в ноябре 2021 – январе 2022 г., заключительный – в марте 2022 г.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по шесть задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках С++, Python, Pascal, Java.

В этом учебном году в олимпиаде по математике приняли участие 4880 школьников из 10 стран ближнего зарубежья и 66 регионов РФ, по информатике – 962 школьника из 59 регионов РФ и шести стран. Заключительный тур прошел на 33 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике.

Настоящее пособие содержит:

- 280 задач отборочного тура по математике с ответами;
- 70 задач заключительного тура по математике с решениями;
- шесть задач отборочного тура по информатике с решениями;
- шесть задач заключительного тура по информатике с решениями;
- критерии определения победителей и призеров;
- статистику олимпиады.

Полный текст заданий с ответами и решениями, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады https://тиим.рф.

Олимпиада по математике

Задания отборочного тура олимпиады с ответами

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

5 класс

Отборочный тур, 5 класс, 1 вариант

▷ **1.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 3 часа 30 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 75.

▷ **2.** Известно, что книга имеет толщину 3,75 см, её 100 листов имеют толщину 1,5 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 500.

▷ **3.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров $c+d$.

40	c	42		
	30			34
		24	18	
	48		d	
38			34	

Ответ: 84.

▷ **4.** Художник Маляров к своей юбилейной выставке представил 142 картины. На 19 из них есть лес, на 39 – река, а на 15 и то, и другое. На остальных картинах - неизвестно что. Сколько картин изображают этот шедевр – неизвестно что?

Ответ: 99.

▷ **5.** Восстановите пример. В ответе запишите сумму всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{r} \times\ 4\,*\\ *\,6\\ \hline *\,*\,8\\ +\ *\,*\,7\\ \hline *\,*\,*\,8 \end{array}$$

Ответ: 0.

▷ **6.** Два жадных медвежонка поделили между собой головку сыра. Второй остался недоволен делёжкой, и тогда первый отдал ему пятую часть своей доли. От этого доля второго утроилась. Сколько килограммов сыра досталось первоначально второму медвежонку, если масса головки сыра была равна 22 кг?

Ответ: 2.

▷ **7.** Цистерна с водой весит 2000 кг. После продажи половины объёма воды она стала весить 1400 кг. Сколько весит цистерна после продажи $\frac{1}{3}$ оставшейся воды?

Ответ: 1200.

▷ **8.** Найти все числа, бóльшие 25000, но меньшие 30000, которые как при делении на 131, так и при делении на 1965 дают в остатке 125. В ответе запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 82905.

▷ **9.** Аня расклеивала листовки и за свою работу получила 200 рублей, половину своей зарплаты и половину половины зарплаты. Сколько всего денег получила Аня?

Ответ: 800.

▷ **10.** Школьник прочитал книгу за три дня. В первый день он прочитал $\frac{1}{5}$ всей книги и ещё 16 страниц, во второй день 0,3 остатка и ещё 20 страниц. В третий - 0,75 нового остатка и последние 30 страниц. Сколько страниц в книге?

Ответ: 270.

Отборочный тур, 5 класс, 2 вариант

▷ **1.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 1 час 20 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 80.

▷ **2.** Известно, что книга имеет толщину 0,48 дм, её 75 листов имеют толщину 1,2 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 600.

▷ **3.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров *x*+*y*.

40		42		
	30			34
		24	18	
	48		x	
38			34	y

Ответ: 86.

▷ **4.** Известный скульптор Лепилов к своей персональной выставке представил 42 бюста – скульптурных портрета различных деятелей. Из них 17 бюстов изображали известных поэтов, 29 бюстов – известных писателей. После изучения литературной деятельности изображённых оказалось, что 13 поэтов были и писателями. Остальные бюсты представляли славных деятелей бизнеса, которые никакого отношения к литературному творчеству не имели. Сколько было скульптурных изображений бизнесменов?

Ответ: 9.

▷ **5.** Восстановите пример. В ответе запишите сумму всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{r} \times\ 4\,*\\ *\,6\\ \hline 2\,*\,2\\ +\,2\,*\,5\\ \hline *\,*\,*\,2 \end{array}$$

Ответ: 10.

▷ **6.** Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему пятую часть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Сколько граммов торта досталось первоначально Пятачку, если вес торта 2 кг 200 г?

Ответ: 200.

▷ **7.** Полный ящик с печеньем весит 40 кг. После продажи половины всего печенья он стал весить 28 кг. Сколько весит ящик с печеньем после продажи $\frac{1}{3}$ предыдущего остатка?

Ответ: 24.

▷ **8.** Найти все числа, бо́льшие 15000, но меньшие 20000, которые как при делении на 1011, так и при делении на 674 дают в остатке 304. В ответе запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 34982.

▷ **9.** Дима работал летом в центре трудоустройства для подростков и получил за свою работу 3000 рублей, треть своей зарплаты и половину трети зарплаты. Сколько всего денег получил Дима?

Ответ: 6000.

▷ **10.** Туристы совершили переход на велосипедах в три дня. В первый день они прошли $\frac{1}{3}$ всего пути без 2 км. Во второй день – половину оставшегося пути без 3 км и в третий – $\frac{8}{9}$ и ещё 6 км. Сколько километров проехали туристы за три дня?

Ответ: 150.

Отборочный тур, 5 класс, 3 вариант

▷ **1.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 1 час 10 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 25.

▷ **2.** Известно, что книга имеет толщину 0,3 дм, её 150 листов имеют толщину 0,01 м. Сколько страниц в книге?

Ответ: 900.

▷ **3.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров $a+b$.

40	a	42		
	30		b	34
		24	18	
	48			
38			34	

Ответ: 66.

▷ **4.** В Большую Академию Неестественных Наук избрали 50 учёных. 13 из них были астрологами, 27 – алхимиками, причём семь из них являлись представителями и астрологии, и алхимии (работали на стыке этих «наук»). Остальные учёные считали себя парапсихологами. Сколько их было?

Ответ: 17.

▷ **5.** Восстановите пример. В ответе запишите произведение всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{cccc} & \times & 2 & 7 \\ & & * & * \\ \hline + & * & * & 8 \\ & * & * & \\ \hline & 3 & * & * \end{array}$$

Ответ: 270.

▷ **6.** Помирились Волк и Заяц. Решили чаепитие с тортом организовать. Заяц и Волк поделили между собой торт. Волк зарычал, что ему досталось мало. Тогда Заяц отдал ему четверть своей доли. От этого у Волка количество торта увеличилось в четыре раза. Сколько граммов торта досталось первоначально Волку, если вес торта 2 кг 600 г?

Ответ: 200.

▷ **7.** Цистерна с водой весит 2000 кг. После продажи $\frac{1}{3}$ объёма воды она стала весить 1400 кг. Сколько весит цистерна после продажи $\frac{1}{3}$ оставшейся воды?

Ответ: 1000.

▷ **8.** Найдите все числа, бóльшие 10000, но меньшие 15000, которые как при делении на 393, так и при делении на 655 дают в остатке 210. В ответе запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 36000.

▷ **9.** Саша работала промоутером четыре часа. За два часа ей заплатили 300 рублей и еще треть тех денег, что она заработала за это время. Сколько всего денег получила Саша?

Ответ: 900.

▷ **10.** Одно число больше другого на 406. Если большее число разделить на меньшее, то в частном получится 3 и в остатке 66. Найти сумму этих чисел.

Ответ: 746.

Отборочный тур, 5 класс, 4 вариант

▷ **1.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 2 часа 20 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 50.

▷ **2.** Известно, что книга имеет толщину 0,016 м, её 120 листов имеют толщину 0,08 дм. Сколько страниц в книге?

Ответ: 480.

▷ **3.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров $m+n$.

40		42		
	30			34
		24	18	n
m	48			
38			34	

Ответ: 74.

▷ **4.** В международном конгрессе участвовало 2021 человек. 1270 из них говорят на английском, 1340 – на немецком, 630 – на английском и немецком. Остальные участники говорят по-тарабарски. Сколько таких участников?

Ответ: 41.

▷ **5.** Восстановите пример. В ответе запишите произведение всех цифр, которые чаще других используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{r} \times\ 2\ 7 \\ *\ * \\ \hline 5\ * \\ +\ *\ *\ \ \\ \hline 8\ *\ * \end{array}$$

Ответ: 64.

▷ **6.** Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Сколько граммов торта досталось первоначально Пятачку, если вес торта 2 кг 100 г?

Ответ: 300.

▷ **7.** Полный ящик с печеньем весит 20 кг. После продажи $\frac{1}{3}$ всего печенья он стал весить 14 кг. Сколько весит ящик с печеньем после продажи $\frac{1}{3}$ предыдущего остатка?

Ответ: 10.

▷ **8.** Найдите все числа, бóльшие 20000, но меньшие 25000, которые как при делении на 43, так и при делении на 47 дают в остатке 263. В ответе запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 67482.

▷ **9.** Лёша работал секретарём у мамы на работе пять дней. За два дня он заработал 1000 рублей и еще половину зарплаты за это время. Сколько всего денег заработал Лёша?

Ответ: 5000.

▷ **10.** Одно число больше другого на 768. Если большее число разделить на меньшее, то в частном получится 4 и в остатке 48. Найти сумму этих чисел.

Ответ: 1248.

6 класс

Отборочный тур, 6 класс, 1 вариант

▷ **1.** Найдите неизвестные цифры X и Y пятизначного числа $\overline{313XY}$, если оно делится на 36. Из всех таких чисел в ответе укажите такое, у которого произведение цифр наибольшее.

Ответ: 31356.

▷ **2.** В офисе пять вентиляторов, каждый из которых может быть включен или выключен. Найдите число различных способов проветрить помещение (способы считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одного вентилятора).

Ответ: 31.

▷ **3.** Часы показывают 3:00. Найти в часах, через какое ближайшее время стрелки будут опять перпендикулярны, и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 17.

▷ **4.** У продавца имеются две корзины с яблоками. В одной зелёные яблоки по цене 100 рублей за 1 кг, а в другой – красные, по 60 рублей за 1 кг. Стоимости корзин с яблоками одинаковы. Яблоки равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную бессортицу, чтобы получить те же деньги, что и при продаже яблок до перемешивания?

Ответ: 72.

▷ **5.** Два жадных медвежонка поделили между собой головку сыра. Второй остался недоволен делёжкой, и тогда первый отдал ему пятую часть своей доли. От этого доля второго утроилась. Сколько килограммов сыра досталось первоначально второму медвежонку, если масса головки сыра была равна 22 кг?

Ответ: 2.

▷ **6.** При сложении двух натуральных чисел Маша поставила лишний нолик в конце первого слагаемого и вместо 2021 получила сумму, равную 19121. Чему равно наибольшее из двух чисел?

Ответ: 1900.

▷ **7.** Найдите разность между наибольшим и наименьшим трёхзначными числами, у которых при делении на 65 частное и остаток совпадают.

Ответ: 858.

▷ **8.** На какую цифру оканчивается число $777^{777} + 222^{222}$?

Ответ: 1.

▷ **9.** Известно, что книга имеет толщину 3,75 см, её 100 листов имеют толщину 1,5 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 500.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите сумму всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

```
  ×  4 *
     * 6
  -------
   * * 8
+ * * 7
  -------
  * * * 8
```

Ответ: 0.

Отборочный тур, 6 класс, 2 вариант

▷ **1.** Найдите неизвестные цифры A и B пятизначного числа $\overline{71A1B}$, если оно делится на 45. Из всех таких чисел в ответе укажите такое, у которого произведение цифр наибольшее.

Ответ: 71415.

▷ **2.** В комнате шесть ламп, каждая из которых может быть включена или не включена. Найдите число различных способов освещения комнаты (два способа считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампы).

Ответ: 63.

▷ **3.** Часы показывают 2:00. Найти в часах, через какое ближайшее время стрелки образуют тот же угол, и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 15.

▷ **4.** У продавца имеются два мешка леденцов: в одном леденцы по 50 рублей за 1 кг, в другом – по 75 рублей за 1 кг. Стоимости мешков одинаковы. Леденцы равномерно перемешали. По какой цене нужно продавать полученную смесь, чтобы получить те же деньги, что и при продаже двух мешков до перемешивания?

Ответ: 60.

▷ **5.** Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему пятую часть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Сколько граммов торта досталось первоначально Пятачку, если вес торта 2 кг 200 г?

Ответ: 200.

▷ **6.** При сложении двух натуральных чисел Миша не поставил последний ноль в конце первого слагаемого и вместо 2021 получил сумму, равную 221. Чему равна разность между наибольшим и наименьшим слагаемыми?

Ответ: 1979.

▷ **7.** Найдите разность между наибольшим и наименьшим трёхзначными числами, у которых при делении на 51 частное и остаток совпадают.

Ответ: 884.

▷ **8.** На какую цифру оканчивается число $333^{333}+222^{222}$?

Ответ: 7.

▷ **9.** Известно, что книга имеет толщину 0,48 дм, её 75 листов имеют толщину 1,2 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 600.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите сумму всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$
\begin{array}{rcccc}
\times & & & 4 & * \\
 & & & * & 6 \\
\hline
 & & 2 & * & 2 \\
+ & 2 & * & 5 & \\
\hline
 & * & * & * & 2
\end{array}
$$

Ответ: 10.

Отборочный тур, 6 класс, 3 вариант

▷ **1.** Найдите неизвестные цифры X и Y пятизначного числа $\overline{56X3Y}$, если оно делится на 36. Из всех таких чисел в ответе укажите такое, у которого произведение цифр наибольшее.

Ответ: 56736.

▷ **2.** В офисе четыре вентилятора, каждый из которых может быть включен или выключен. Найдите число различных способов проветрить помещение (способы считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одного вентилятора).

Ответ: 15.

▷ **3.** Часы показывают 9:00. Найти в часах, через какое ближайшее время стрелки будут опять перпендикулярны, и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 17.

▷ **4.** У продавца имеются два ящика с мандаринами. В одном ящике мандарины из Абхазии по цене 60 рублей за 1 кг, а в другом мандарины из Турции по 90 рублей за 1 кг. Стоимости ящиков с мандаринами одинаковы. Мандарины равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную бессортицу, чтобы получить те же деньги, что и при продаже мандаринов до перемешивания?

Ответ: 72.

▷ **5.** Помирились Волк и Заяц. Решили чаепитие с тортом организовать. Заяц и Волк поделили между собой торт. Волк зарычал, что ему досталось мало. Тогда Заяц отдал ему четверть своей доли. От этого у Волка количество торта увеличилось в четыре раза. Сколько грамм торта досталось первоначально Зайцу, если вес торта 2 кг 600 г?

Ответ: 200.

▷ **6.** При сложении двух натуральных чисел Марина поставила лишний нолик в конце первого слагаемого и вместо 4321 получила сумму, равную 18721. Чему равно наибольшее из исходных слагаемых?

Ответ: 2721.

▷ **7.** Найдите разность между наибольшим и наименьшим трёхзначными числами, у которых при делении на 37 частное и остаток совпадают.

Ответ: 874.

▷ **8.** На какую цифру оканчивается число $444^{444} + 777^{777}$?

Ответ: 3.

▷ **9.** Известно, что книга имеет толщину 0,3 дм, её 150 листов имеют толщину 0,01 м. Сколько страниц в книге?

Ответ: 900.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите произведение всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{r} \times\ 2\ 7 \\ *\ * \\ \hline +\ *\ *\ 8 \\ *\ *\ \ \\ \hline 3\ *\ * \end{array}$$

Ответ: 270.

Отборочный тур, 6 класс, 4 вариант

▹ **1.** Найдите неизвестные цифры X и Y пятизначного числа $\overline{563XY}$, если оно делится на 36. На сколько наибольшее из таких чисел превосходит наименьшее?

Ответ: 72.

▹ **2.** В комнате пять ламп, каждая из которых может быть включена или не включена. Найдите число различных способов освещения комнаты (два способа считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампы).

Ответ: 31.

▹ **3.** Часы показывают 6:00. Найти в часах, через какое ближайшее время стрелки будут опять образовывать развёрнутый угол, и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 23.

▹ **4.** У продавца имеются два мешка крупы. В одном по цене 30 рублей за 1 кг, а в другом – 20 рублей за 1 кг. Стоимости мешков одинаковы. По каким-то причинам содержимое мешков равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную смесь, чтобы получить те же деньги, что и при продаже двух мешков до перемешивания?

Ответ: 24.

▹ **5.** Винни-Пух и Пятачок поделили между собой торт. Пятачок захныкал, что ему досталось мало. Тогда Пух отдал ему треть своей доли. От этого у Пятачка количество торта увеличилось втрое. Сколько граммов торта досталось первоначально Пятачку, если вес торта 2 кг 100 г?

Ответ: 300.

▷ **6.** При сложении двух натуральных чисел Матвей не поставил последний ноль в конце первого слагаемого и вместо 4321 получил сумму, равную 1540. Чему равна разность между наибольшим и наименьшим из исходных слагаемых?

Ответ: 1859.

▷ **7.** Найдите разность между наибольшим и наименьшим трёхзначными числами, у которых при делении на 43 частное и остаток совпадают.

Ответ: 836.

▷ **8.** На какую цифру оканчивается число $333^{222} + 222^{333}$?

Ответ: 1.

▷ **9.** Известно, что книга имеет толщину 0,016 м, её 120 листов имеют толщину 0,08 дм. Сколько страниц в книге?

Ответ: 480.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите произведение всех цифр, которые чаще других используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{cccc}
 & \times & 2 & 7\\
 & & * & *\\ \hline
 & & 5 & *\\
+ & * & * & \\ \hline
 & 8 & * & *
\end{array}$$

Ответ: 64.

7 класс

Отборочный тур, 7 класс, 1 вариант

▷ **1.** Можно ли по кругу расставить семь натуральных чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних равнялась трёхзначному числу N? Если да, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных N. Если нет, то в ответе запишите 0.

Ответ: 1099.

▷ **2.** В прямоугольной таблице расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой строчке равна 101, а сумма чисел в каждом столбце 97. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел, вписанных в таблицу?

Ответ: 9797.

▷ **3.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые кратны 17 и при делении на 7 и 11 дают одинаковый остаток 6.

Ответ: 391.

▷ **4.** Длина отрезка AB равна 18. На отрезке взяты точки C, D так, что $AC:CD=1:3$, $CD:DB=3:5$. Найдите длину отрезка CD.

Ответ: 6.

▷ **5.** Художник Маляров к своей юбилейной выставке представил 142 картины. На 19 из них есть лес, на 39 – река, а на 15 – и то, и другое. На остальных картинах – неизвестно что. Сколько картин изображают этот шедевр – неизвестно что?

Ответ: 99.

▷ **6.** Найдите наибольшее трёхзначное число, дающее при делении на 3, 6, 12, 18 остаток 2.

Ответ: 974.

▷ **7.** Какой остаток получится от деления на 7 числа 10^{81}?

Ответ: 6.

▷ **8.** Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y \geq 4|x| \\ y \leq 12 \end{cases}.$$

Ответ: 36.

▷ **9.** Расшифруйте следующую запись примера на сложение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые цифры $\overline{\text{СПОРТ}} + \overline{\text{СПОРТ}} = \overline{\text{КРОСС}}$. В ответе запишите, чему равно $\left(\frac{\text{О}}{\text{П}} - \frac{\text{К}}{\text{С}}\right)(\text{Р} - \text{Т})$.

Ответ: 5.

▷ **10.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров *c*+*d*.

40	c	42		
	30			34
		24	18	
	48		d	
38			34	

Ответ: 84.

Отборочный тур, 7 класс, 2 вариант

▷ **1.** Можно ли по кругу расставить восемь натуральных чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних равнялась трёхзначному числу *N*? Если да, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных *N*. Если нет, то в ответе запишите 0.

Ответ: 1096.

▷ **2.** В прямоугольной таблице расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой строчке равна 103, а сумма чисел в каждом столбце – 89. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел, вписанных в таблицу?

Ответ: 9167.

▹ **3.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые кратны 13 и при делении на 7 и 11 дают одинаковый остаток 6.

Ответ: 468.

▹ **4.** Длина отрезка *AB* равна 4. На отрезке взяты точки *C*, *D* так, что $AC:CD=1:2$, $CD:DB=2:3$. Найдите длину отрезка *CD*.

Ответ: $\frac{4}{3}$**.**

▹ **5.** Известный скульптор Лепилов к своей персональной выставке представил 42 бюста – скульптурных портрета различных деятелей. Из них 17 бюстов изображали известных поэтов, 29 бюстов – известных писателей. При изучении литературной деятельности изображённых оказалось, что 13 поэтов были и писателями. Остальные бюсты представляли славных деятелей бизнеса, которые никакого отношения к литературному творчеству не имели. Сколько было скульптурных изображений бизнесменов?

Ответ: 9.

▹ **6.** Найдите наибольшее шестизначное число, дающее при делении на 5, 7, 11, 13 остаток 4.

Ответ: 995999.

▹ **7.** Какой остаток получится от деления на 7 числа 6g ($g=10^{100}$)?

Ответ: 3.

▹ **8.** Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3|x| \\ y \leq 9 \end{cases}.$$

Ответ: 27.

▹ **9.** Расшифруйте следующую запись примера на сложение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые цифры $\overline{\text{КОКА}}+\overline{\text{КОЛА}}=\overline{\text{ВОДА}}$. В ответе запишите, чему равно $\overline{\text{ВОЛК}}-\overline{\text{КЛАД}}$.

Ответ: 4182.

▷ **10.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров *x*+*y*.

40		42		
	30			34
		24	18	
	48		x	
38			34	y

Ответ: 86.

Отборочный тур, 7 класс, 3 вариант

▷ **1.** Можно ли по кругу расставить девять натуральных чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних равнялась трёхзначному числу *N*? Если да, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных *N*. Если нет, то в ответе запишите 0.

Ответ: 1107.

▷ **2.** В прямоугольной таблице расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой строчке равна 101, а сумма чисел в каждом столбце – 97. Чему равна наименьшая возможная сумма всех строк и столбцов?

Ответ: 198.

▷ **3.** Найдите разность между наибольшим и наименьшим четырёхзначными числами, которые кратны 13 и при делении на 7 и 11 дают одинаковый остаток 6.

Ответ: 8008.

▷ **4.** Длина отрезка *AB* равна 1,5. На луче *AB* взята точка *K*, а на луче *BA* точка *L* так, что $AK = 0,7$; $BL = 2,1$. Найдите длину отрезка *KL*.

Ответ: 1,3.

▷ **5.** В Большую Академию Неестественных Наук избрали 50 учёных. 13 из них были астрологами, 27 – алхимиками, причём семь из них являлись представителями и астрологии, и алхимии (работали на стыке этих «наук»). Остальные учёные считали себя парапсихологами. Сколько их было?

Ответ: 17.

▹ **6.** Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 7, 9, 11, 13 остаток 6.

Ответ: 9015.

▹ **7.** Какой остаток получится от деления на 7 числа $0{,}5g$ ($g = 10^{100}$)?

Ответ: 2.

▹ **8.** Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y \geq 5|x| \\ y \leq 10 \end{cases}.$$

Ответ: 20.

▹ **9.** Расшифруйте следующую запись примера на умножение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые цифры $\overline{\text{ДО}} \cdot \overline{\text{РЕ}} = \overline{\text{ООО}}$. В ответе запишите наименьшее из возможных произведений $\text{Д} \cdot \text{О} \cdot \text{Р} \cdot \text{Е}$.

Ответ: 42.

▹ **10.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров *a*+*b*.

40	a	42		
	30		b	34
		24	18	
	48			
38			34	

Ответ: 66.

Отборочный тур, 7 класс, 4 вариант

▷ **1.** Можно ли по кругу расставить 11 натуральных чисел так, чтобы сумма любых трёх соседних равнялась трёхзначному числу N? Если да, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных N. Если нет, то в ответе запишите 0.

Ответ: 1100.

▷ **2.** В прямоугольной таблице расставлены натуральные числа так, что сумма чисел в каждой строчке равна 103, а сумма чисел в каждом столбце – 89. Чему равна наименьшая возможная сумма всех строк и столбцов?

Ответ: 192.

▷ **3.** Найдите сумму наибольшего и наименьшего четырёхзначного числа, которые кратны 17 и при делении на 7 и 11 дают одинаковый остаток 6.

Ответ: 9945.

▷ **4.** Длина отрезка AB равна 8. На луче AB взята точка K, а на луче BA точка L. Найдите BK, если известно, что $LB:BK=1:2$, $AL:LB=3:1$.

Ответ: 6.

▷ **5.** В международном конгрессе участвовало 2021 человек. 1270 из них говорят на английском, 1340 – на немецком, 630 – на английском и немецком. Остальные участники говорят по-тарабарски. Сколько таких участников?

Ответ: 91.

▷ **6.** Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 5, 7, 11, 13 остаток 4.

Ответ: 5009.

▷ **7.** Какой остаток получится от деления на 7 числа g^{10} ($g=10^{100}$)?

Ответ: 4.

▷ **8.** Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2|x| \\ y \leq 8 \end{cases}.$$

Ответ: 32.

▷ **9.** Расшифруйте следующую запись примера на умножение, в котором разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым – одинаковые цифры $\overline{\text{ФА}} \cdot \overline{\text{МИ}} = \overline{\text{ААА}}$. В ответе запишите наименьшее из возможных произведений $\text{Ф} \cdot \text{А} \cdot \text{М} \cdot \text{И}$.

Ответ: 105.

▷ **10.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников. Периметры некоторых из них указаны на рисунке. Найдите сумму периметров $m+n$.

40		42		
	30			34
		24	18	n
m	48			
38			34	

Ответ: 74.

8 класс

Отборочный тур, 8 класс, 1 вариант

▷ **1.** Сколько существует пятизначных чисел, одинаково читающихся слева направо и справа налево?

Ответ: 900.

▷ **2.** Пусть НОД(a,b) – наибольший общий делитель a и b, НОК(a,b) – наименьшее общее кратное a и b. Чему равно НОД(3816,6372) + НОК(6372,3816)?

Ответ: 675468.

▷ **3.** В четырёхугольнике *ABCD* стороны *AD* и *BC* равны, $\angle DAC = 34^{\circ}$, $\angle DCA = 73^{\circ}$, $\angle ACB = 44^{\circ}$. Чему равен угол $\angle ABC$?

Ответ: 68.

▷ **4.** Известно, что книга имеет толщину 3,75 см, её 100 листов имеют толщину 1,5 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 500.

▷ **5.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 3 часа 30 минут при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 75.

▷ **6.** Сколько существует квадратов со стороной 1, центры которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 5|x| \\ y \leq 10 \end{cases}?$$

Ответ: 22.

▷ **7.** Найдите остаток от деления на 391 числа $25! + 25^2$ ($K! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$).

Ответ: 234.

▷ **8.** Сколько всего шестизначных чисел имеют сумму цифр, равную трём?

Ответ: 21.

▷ **9.** 60 кг грибов необходимо разделить между тремя белками так, чтобы первой белке досталось на 4 кг больше, чем второй, а третьей вдвое больше, чем второй. Сколько килограммов грибов достанется третьей белке?

Ответ: 28.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите сумму всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{cccc}
 & \times & 4 & * \\
 & & * & 6 \\
\hline
 & * & * & 8 \\
+\,* & * & 7 & \\
\hline
* & * & * & 8
\end{array}$$

Ответ: 0.

Отборочный тур, 8 класс, 2 вариант

▷ **1.** Сколько страниц в книге, если для перенумерования их потребовалась 6681 цифра?

Ответ: 1947.

▷ **2.** Пусть НОД(a,b) – наибольший общий делитель a и b, НОК(a,b) – наименьшее общее кратное a и b. Чему равно НОД(3924,5136) + НОК(884,1170)?

Ответ: 39792.

▷ **3.** В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны, $\angle DAC = 40^\circ$, $\angle DCA = 70^\circ$, $\angle ACB = 36^\circ$. Чему равен угол $\angle ABC$?

Ответ: 72.

▷ **4.** Известно, что книга имеет толщину 0,48 дм, её 75 листов имеют толщину 1,2 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 600.

▷ **5.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 1 час 20 минут при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 80.

▷ **6.** Сколько существует квадратов со стороной 1, центры которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \ge 4|x| \\ y \le 12 \end{cases}.?$$

Ответ: 36.

▷ **7.** Найдите остаток от деления на 209 числа $20! + 21^3$ ($K! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$).

Ответ: 65.

▷ **8.** Сколько всего пятизначных чисел имеют сумму цифр, равную трём?

Ответ: 15.

▷ **9.** 80 книг необходимо расставить на три полки так, чтобы на первой полке было втрое больше книг, чем на третьей полке, а на второй на пять больше, чем на третьей. Сколько книг окажется на второй полке?

Ответ: 20.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите сумму всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \times & 4 & * \\
 & & & * & 6 \\
\cline{3-5}
 & & 2 & * & 2 \\
+ & 2 & * & 5 & \\
\cline{2-5}
 & * & * & * & 2
\end{array}$$

Ответ: 10.

Отборочный тур, 8 класс, 3 вариант

▷ **1.** В книге 237 страниц. Сколько цифр (отдельных типографских знаков) потребуется, чтобы пронумеровать все страницы?

Ответ: 603.

▷ **2.** Пусть НОД(a,b) – наибольший общий делитель a и b, НОК(a,b) – наименьшее общее кратное a и b. Чему равно НОД(1048,1356) + НОК(504,612)?

Ответ: 8572.

▷ **3.** В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны, $\angle DAC = 36^\circ$, $\angle DCA = 72^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$. Чему равен угол $\angle ABC$?

Ответ: 70.

▷ **4.** Известно, что книга имеет толщину 0,3 дм, её 150 листов имеют толщину 0,01 м. Сколько страниц в книге?

Ответ: 900.

▷ **5.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 1 час 10 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 25.

▷ **6.** Сколько существует квадратов со стороной 1, центры которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \ge 3|x| \\ y \le 9 \end{cases}?$$

Ответ: 30.

▷ **7.** Найдите остаток от деления на 463 числа $20! + 22! + 2^9$ ($K! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$).

Ответ: 49.

▷ **8.** Сколько целых семизначных чисел можно записать тремя единицами и четырьмя нулями?

Ответ: 15.

▷ **9.** В три коробки от карандашей необходимо разложить 90 карандашей так, чтобы в первой коробке было вдвое больше карандашей, чем во второй, а во второй на два карандаша больше, чем в третьей. Сколько карандашей будет в первой коробке?

Ответ: 46.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите произведение всех цифр, которые не используются в записи этого примера.

$$\begin{array}{r} \times\ 2\ 7 \\ *\ * \\ \hline +\ *\ *\ 8 \\ *\ * \\ \hline 3\ *\ * \end{array}$$

Ответ: 270.

Отборочный тур, 8 класс, 4 вариант

▷ **1.** Среди чисел первой тысячи сколько таких, в записи которых имеется цифра 7?

Ответ: 271.

▷ **2.** Пусть НОД(a,b) – наибольший общий делитель a и b, НОК(a,b) – наименьшее общее кратное a и b. Чему равно НОД(23716,1848) + НОК(23716,1848)?

Ответ: 142604.

▷ **3.** В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны, $\angle DAC = 30^\circ$, $\angle DCA = 75^\circ$, $\angle ACB = 48^\circ$. Чему равен угол $\angle ABC$?

Ответ: 66.

▷ **4.** Известно, что книга имеет толщину 0,016 м, её 120 листов имеют толщину 0,08 дм. Сколько страниц в книге?

Ответ: 480.

▷ **5.** Определите наименьшую величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающими 2 часа 20 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 50.

▷ **6.** Сколько существует квадратов со стороной 1, центры которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2|x| \\ y \leq 8 \end{cases}?$$

Ответ: 32.

▷ **7.** Найдите остаток от деления на 247 числа $20! + 6!$ ($K! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot K$).

Ответ: 226.

▷ **8.** Сколько целых восьмизначных чисел можно записать тремя единицами и пятью нулями?

Ответ: 21.

▷ **9.** 60 кг грибов необходимо разделить между тремя белками так, чтобы первой белке досталось на 4 кг больше, чем второй, а третьей вдвое больше, чем второй. Сколько килограммов грибов достанется третьей белке?

Ответ: 28.

▷ **10.** Восстановите пример. В ответе запишите произведение всех цифр, которые чаще других используются в записи этого примера

$$\begin{array}{cccc} & \times & 2 & 7 \\ & & * & * \\ \hline & & 5 & * \\ + & * & * & \\ \hline & 8 & * & * \end{array}$$

Ответ: 64.

9 класс

Отборочный тур, 9 класс, 1 вариант

▷ **1.** Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD\left(BC \parallel AD\right)$ проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $CD = 6\sqrt{13}$, $AE = 8$.

Ответ: 204.

▷ **2.** Сколько целых решений имеет неравенство $f[g(x)] \leq 2021$, где

$$f(x) = \left[\begin{array}{l} 3-2x, x \leq 2 \\ x-3, x>2 \end{array}\right., g(x) = \left[\begin{array}{l} x-1, x \leq 2 \\ 5-2x, x>2 \end{array}\right.?$$

Ответ: 1516.

▷ **3.** Сколько решений имеет уравнение, где $[a]$ – целая часть a, $\{a\}$ – дробная часть a,

$$20[x] + 21\{x\} = 2022?$$

Ответ: 11.

▷ **4.** Сколько целых решений имеет неравенство $(x+6)(x+3)(x-1)(x-2) - 12x^2 \leq 0$?

Ответ: 9.

▷ **5.** Известно, что числа 10421 и 61439 при делении на некоторое натуральное число n имеют остатки 26 и 14 соответственно. Пусть k – количество таких n, а m – сумма наибольшего и наименьшего из найденных n. В ответе запишите значение $\frac{m}{k}$.

Ответ: 108.

▷ **6.** $\sqrt[5]{*****4}$ – целое число. Найдите его

Ответ: 14.

▷ **7.** Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 27, которые больше $\frac{6}{7}$ и меньше $\frac{16}{17}$. В ответе запишите сумму числителя и знаменателя найденной несократимой дроби.

Ответ: 76.

▷ **8.** При каком наименьшем натуральном *m* выражение $3^{2021}+5^{2021}+m$ делится на 13?

Ответ: 12.

▷ **9.** Найдите сумму всех целых *x*, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1.$$

Ответ: 26.

▷ **10.** Наибольший член арифметической прогрессии 5, 24, 43, ... не меньше g ($g=10^{100}$ – гугол). Сколько членов этой прогрессии записываются одними четвёрками?

Ответ: 5.

Отборочный тур, 9 класс, 2 вариант

▷ **1.** Окружность с центром на диагонали *AC* трапеции $ABCD\left(BC \parallel AD\right)$ проходит через вершины *A* и *B*, касается стороны *CD* в точке *C* и пересекает основание *AD* в точке *E*. Найти площадь трапеции *ABCD*, если $BE=26$, $DE=9\sqrt{13}$.

Ответ: 663.

▷ **2.** Сколько целых решений имеет неравенство $g\left[f\left(x\right)\right]+2021\le 0$,

где $f\left(x\right)=\left[\begin{array}{l}3-2x, x\le 2\\ x-3, x>2\end{array}\right., g\left(x\right)=\left[\begin{array}{l}x-1, x\le 2\\ 5-2x, x>2\end{array}\right.$?

Ответ: 1522.

▷ **3.** Сколько решений имеет уравнение, где $[a]$ – целая часть a, $\{a\}$ – дробная часть a,

$$19\left[x\right]+21\left\{x\right\}=2021?$$

Ответ: 11.

▷ **4.** Сколько целых решений имеет неравенство $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)<4x^2$?

Ответ: 11.

▷ **5.** Известно, что числа 58364 и 54075 при делении на некоторое натуральное число n имеют остатки 20 и 21 соответственно. Найдите среднее арифметическое всех найденных n.

Ответ: 198.

▷ **6.** $\sqrt[5]{*****2}$ – целое число. Найдите его.

Ответ: 12.

▷ **7.** Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 29, которые больше $\frac{4}{5}$ и меньше $\frac{18}{19}$. В ответе запишите разность числителя и знаменателя найденной несократимой дроби.

Ответ: 73.

▷ **8.** При каком наименьшем натуральном m выражение $3^{2021}+15^{1021}+m$ делится на 17?

Ответ: 3.

▷ **9.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8+6\sqrt{x-1}}=5.$$

Ответ: 15.

▷ **10.** Наибольший член арифметической прогрессии 11, 24, 37, 50, ... не меньше g ($g=10^{100}$ – гугол). Сколько членов этой прогрессии записываются одними семёрками?

Ответ: 16.

Отборочный тур, 9 класс, 3 вариант

▷ **1.** Окружность с центром на диагонали *AC* трапеции $ABCD\left(BC\parallel AD\right)$ проходит через вершины *A* и *B*, касается стороны *CD* в точке *C* и пересекает основание *AD* в точке *E*. Найти площадь трапеции *ABCD*, если $BC=2$, $CD=10\sqrt{26}$.

Ответ: 270.

▷ **2.** Сколько целых решений имеет неравенство $f\left(g\left(x\right)\right)\le 100$, где

$$f\left(x\right)=\left[\begin{array}{l}-x, x\le -1\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}, x>-1\end{array}\right., g\left(x\right)=\left[\begin{array}{l}2x+2, x\le 1\\ 5-x, x>1\end{array}\right.?$$

Ответ: 157.

▷ **3.** Сколько решений имеет уравнение, где $[a]$ – целая часть a, $\{a\}$ – дробная часть a,

$$17\left[x\right]+99\left\{x\right\}=1837?$$

Ответ: 6.

▷ **4.** Сколько целых решений имеет неравенство $\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x+4\right)\left(x+6\right)<10x^2$?

Ответ: 5.

▷ **5.** Известно, что числа 39303 и 51904 при делении на некоторое натуральное число *n* имеют остатки 33 и 34 соответственно. Пусть *k* – количество таких *n*, а *m* – сумма наибольшего и наименьшего из найденных *n*. В ответе запишите значение $\dfrac{m}{k}$.

Ответ: 49.

▷ **6.** $\sqrt[5]{*****3}$ – целое число. Найдите его.

Ответ: 13.

▷ **7.** Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 11, которые больше $\frac{5}{7}$ и меньше $\frac{11}{13}$. В ответе запишите сумму числителя и знаменателя найденной несократимой дроби.

Ответ: 28.

▷ **8.** При каком наименьшем натуральном m выражение $3^{2021}+5^{2021}+m$ делится на 11?

Ответ: 10.

▷ **9.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{x-3+2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=3.$$

Ответ: 30.

▷ **10.** Наибольший член арифметической прогрессии 6, 19, 32, ... не меньше g ($g=10^{100}$ – гугол). Сколько членов этой прогрессии записываются одними пятёрками?

Ответ: 16.

Отборочный тур, 9 класс, 4 вариант

▷ **1.** Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD(BC \parallel AD)$ проходит через вершины A и B, касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $AB=5\sqrt{2}$, $CD=10\sqrt{13}$.

Ответ: 135.

▷ **2.** Сколько целых решений имеет неравенство $g\left[f(x)\right]\le 10$,

где $f(x)=\left[\begin{array}{l} -x, x\le -1 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, x>-1 \end{array}\right.$, $g(x)=\left[\begin{array}{l} 2x+2, x\le 1 \\ 5-x, x>1 \end{array}\right.$?

Ответ: 193.

▷ **3.** Сколько решений имеет уравнение, где $[a]$ – целая часть a, $\{a\}$ – дробная часть a,

$$19[x]+91\{x\}=2021?$$

Ответ: 5.

▷ **4.** Сколько целых решений имеет неравенство $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2<0$?

Ответ: 8.

▷ **5.** Известно, что числа 100797 и 131296 при делении на некоторое натуральное число n имеют остатки 21 и 22 соответственно. Пусть k – количество таких n, а m – разность между наибольшим и наименьшим из найденных n. В ответе запишите значение $\frac{m}{k}$.

Ответ: 130.

▷ **6.** $\sqrt[5]{******7}$ – целое число. Найдите его.

Ответ: 27.

▷ **7.** Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 13, которые больше $\frac{9}{11}$ и меньше $\frac{16}{17}$. В ответе запишите сумму числителя и знаменателя найденной несократимой дроби.

Ответ: 36.

▷ **8.** При каком наименьшем натуральном m выражение $3^{2021}+15^{2022}+m$ делится на 13?

Ответ: 3.

▷ **9.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

Ответ: 45.

▷ **10.** Наибольший член арифметической прогрессии 13, 30, 47, ... не меньше, чем g^{100} ($g=10^{100}$ – гугол). Сколько членов этой прогрессии записываются одними четвёрками?

Ответ: 625.

10 класс

Отборочный тур, 10 класс, 1 вариант

▷ **1.** Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4|x| \\ |x| + |y| \ge 2 \\ x^2 - y^2 + 16 - 8x \ge 0 \end{cases}.$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют: а) первому неравенству системы (S_1); б) первым двум неравенствам системы (S_2); в) всем трем неравенствам системы (S_3).

В ответе запишите значение $S_1 + S_3 - 2S_2$.

Ответ: 4.

▷ **2.** Имеются два водных раствора серной кислоты. В первом растворе 40% чистой кислоты, а во втором – 60% чистой кислоты. Эти растворы смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды. В результате получили раствор, в котором 20% чистой кислоты. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-ного раствора кислоты, то получился бы 70%-ный раствор. Найти вес первоначального *I* раствора серной кислоты.

Ответ: 1.

▷ **3.** Восстановите отмеченные звездочками отсутствующие на рисунке цифры.

```
  * * 5
    4 *
  -----
  3 * *
* 2 *
-------
1 * * * *
```

В ответе запишите сумму всевозможных результатов произведения.

Ответ: 25420.

▷ **4.** В трапеции *ABCD* с меньшим основанием *BC* и площадью, равной 2, прямые *BC* и *AD* касаются окружности диаметром $\sqrt{2}$ в точках *B* и *D* соответственно. Боковые стороны трапеции *AB* и *CD* пересекают окружность в точках *M* и *N* соответственно. Длина *MN* равна 1. Найти величину угла *MBN* и длину основания *AD*. В ответе запишите квадрат радиуса описанной окружности вокруг равнобедренного треугольника с основанием, равным *AD*, и углом при вершине, равным углу γ.

Ответ: 3.

▷ **5.** Найдите сумму всех решений $x \in (0;24)$ уравнения

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{5\pi x}{12}+\left|\sin\frac{5\pi x}{12}\cos\frac{\pi x}{4}\right|}{\sin\frac{\pi x}{6}}=2\cos\frac{\pi x}{6}.$$

Ответ: 86.

▷ **6.** Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4x-5-4}}<\frac{1}{2|x+2|-5}.$$

В ответе запишите сумму квадратов всех целых решений неравенства.

Ответ: 143.

▷ **7.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников, площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площади прямоугольников, отмеченных символами *x* и *y*. В ответе запишите НОД(*x*,*y*)+НОК(*x*,*y*).

x				20
			14	10
		32	28	
	35	40		
9	21			y

Ответ: 63.

▷ **8.** К числу 2021 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы полученное шестизначное число было кратно 43. Если таких чисел несколько, то в ответе запишите их среднее арифметическое.

Ответ: 520214.

▷ **9.** Координаты вектора $\overline{l}=(x,y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 6+2y=\dfrac{9x}{y}-\sqrt{3x-2y} \\ \sqrt{3x+3\sqrt{3x-2y}}=x+y-6 \end{cases}.$$

Найдите квадрат модуля суммы всех найденных векторов.

Ответ: 2132.

▷ **10.** Найдите сумму всех целых a, при которых уравнение

$$8ax^2+(8a-3)x+2a=14$$

имеет на отрезке [0;1] единственный корень.

Ответ: 28.

Отборочный тур, 10 класс, 2 вариант

▷ **1.** Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 4|y| \\ |x|+|y|\ge 2 \\ y^2-x^2+16-8y\le 0 \end{cases}.$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы (S_1);

б) первым двум неравенствам системы (S_2);

в) всем трем неравенствам системы (S_3).

В ответе запишите значение $S_1-S_2-S_3$.

Ответ: 4.

▷ **2.** Имеются два слитка, представляющие собой сплавы цинка с медью. Вес первого слитка 2 кг, вес второго – 3 кг. Эти два слитка сплавили вместе с 5 кг сплава цинка с медью, в котором цинка было 45%, и получили сплав цинка с медью, в котором цинка стало 50%. Если бы процентное содержание цинка в первом слитке было равно процентному содержанию цинка во втором слитке, то, сплавив эти два слитка с 5 кг сплава, в котором 60% цинка, получили бы сплав, в котором цинка содержится 55%. Найти процентное содержание цинка в первом и во втором слитках.

Ответ: 50; 58,3.

▷ **3.** Восстановите отмеченные звездочками отсутствующие на рисунке цифры.

```
 _* 8 * * *  | * * *
  3 * 8      |------
  -----      | * * *
 _1 0 5 8
  * * * *
  -------
    _* * *
     5 0 4
     -----
         0
```

В ответе запишите сумму делителя и частного.

Ответ: 510.

▷ **4.** В трапеции *ABCD* с бóльшим основанием *BC* и площадью, равной $4\sqrt{3}$, прямые *BC* и *AD* касаются окружности диаметром 2 в точках *B* и *D* соответственно. Боковые стороны трапеции *AB* и *CD* пересекают окружность в точках *M* и *N* соответственно. Длина *MN* равна $\sqrt{3}$. Найти величину γ угла *MDN* и длину основания *BC*. В ответе запишите целую часть радиуса описанной окружности вокруг равнобедренного треугольника с основанием, равным *BC*, и углом при вершине, равным γ.

Ответ: 3.

▷ **5.** Найдите сумму всех решений $x \in [0;48]$ уравнения

$$\frac{\cos\frac{\pi x}{8}\cos\frac{5\pi x}{24}+\left|\sin\frac{\pi x}{8}\sin\frac{5\pi x}{24}\right|}{\sin\frac{\pi x}{12}}=2\cos\frac{\pi x}{12}.$$

Ответ: 165.

▷ **6.** Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-8}-4}<\frac{1}{2|x-3|-5}.$$

В ответе запишите сумму всех целых решений.

Ответ: 17.

▷ **7.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников, площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площади прямоугольников, отмеченных символами x и y. В ответе запишите НОД(x,y)+НОК(x,y).

12	x			20
	14	16		
	28			
15			35	
		24	y	15

Ответ: 91.

▷ **8.** К числу 2021 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы полученное шестизначное число было кратно 47. Если таких чисел несколько, то в ответе запишите их среднее арифметическое.

Ответ: 13196.

▷ **9.** Координаты вектора $\overline{l} = (x, y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 3x - 1 = \dfrac{y}{x} + 2\sqrt{x + y} \\ \sqrt{y + \sqrt{x + y}} = y - 3x - 6 \end{cases}.$$

Какое наименьшее значение может принимать скалярное произведение $(\overline{l} \cdot \overline{p})$, где $\overline{p} = (3; -1)$, а $\overline{l}$ – найденный вектор?

Ответ: -12.

▷ **10.** Найдите сумму квадратов всех целых a, при которых уравнение

$$3ax^2 + (6a - 25)x + 3a = 10$$

имеет на отрезке $[-3; 0]$ единственный корень.

Ответ: 66.

Отборочный тур, 10 класс, 3 вариант

▷ **1.** Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4|x| \\ |x| + |y| \ge 2 \\ x^2 - y^2 + 16 + 8x \le 0 \end{cases}.$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы (S_1);

б) первым двум неравенствам системы (S_2);

в) всем трем неравенствам системы (S_3).

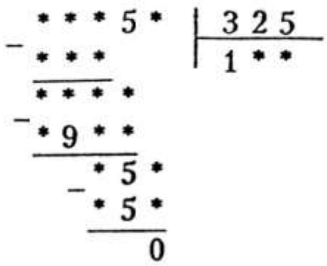
В ответе запишите значение $S_1 - S_2 - S_3$.

Ответ: 4.

▷ **2.** Имеются два водных раствора серной кислоты. Если взять 2.5 кг первого раствора, 4 кг второго и смешать их с 3 кг 90%-ного раствора серной кислоты, то получится 60%-ный раствор. Если первого раствора взять в два раза больше, а второго в два раза меньше и смешать их с 3 кг 20%-ного раствора серной кислоты, то получится 30%-ный раствор. Найти процентное содержание серной кислоты в первом и во втором растворах.

Ответ: 24, 60.

▷ **3.** Восстановите отмеченные звездочками отсутствующие на рисунке цифры.



В ответе запишите разность между делимым и частным.

Ответ: 52488.

▷ **4.** В трапеции *ABCD* с меньшим основанием *BC* и площадью, равной 4, прямые *BC* и *AD* касаются окружности диаметром 2 в точках *B* и *D* соответственно. Боковые стороны трапеции *AB* и *CD* пересекают окружность в точках *M* и *N* соответственно. Длина *MN* равна $\sqrt{2}$. Найти величину γ угла *MBN* и длину основания *AD*. В ответе запишите квадрат радиуса описанной окружности вокруг равнобедренного треугольника с основанием, равным *AD*, и углом при вершине, равным углу γ.

Ответ: 6.

▷ **5.** Найдите сумму всех решений $x \in [0;24]$ уравнения

$$\frac{\cos\frac{\pi x}{4}\sin\frac{5\pi x}{12}+\left|\cos\frac{5\pi x}{12}\sin\frac{\pi x}{4}\right|}{\cos\frac{\pi x}{6}}=2\sin\frac{\pi x}{6}.$$

Ответ: 116.

▷ **6.** Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4}<\frac{1}{2|x+6|-5}.$$

В ответе запишите сумму квадратов всех целых решений неравенства.

Ответ: 222.

▷ **7.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников, площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площади прямоугольников, отмеченных символами *x* и *y*. В ответе запишите НОД(*x*,*y*)+НОК(*x*,*y*).

x	28		28	
6				10
	28			20
		40	35	
9				y

Ответ: 63.

▷ **8.** К числу 221 справа и слева приписать по одной цифре так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 13. В ответе запишите сумму суммы цифр всех таких чисел.

Ответ: 87.

▷ **9.** Координаты вектора $\overline{l}=(x,y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} 1-5y=\dfrac{x}{y}-6\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x-\sqrt{x-y}}=x-5y-6 \end{cases}.$$

Какое наибольшее значение может принимать скалярное произведение $(\overline{l}\cdot\overline{p})$, где $\overline{p}=(1;-5)$, а $\overline{l}$ найденный вектор?

Ответ: 12.

▷ **10.** Найти сумму всех целых a, при которых уравнение

$$ax^2+2(a-5)x+a=12$$

имеет на отрезке [0;2] единственный корень.

Ответ: 72.

Отборочный тур, 10 класс, 4 вариант

▷ **1.** Дана система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 4|y| \\ |x|+|y|\ge 2 \\ y^2-x^2+16+8y\ge 0 \end{cases}.$$

Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы (S_1);

б) первым двум неравенствам системы (S_2);

в) всем трем неравенствам системы (S_3).

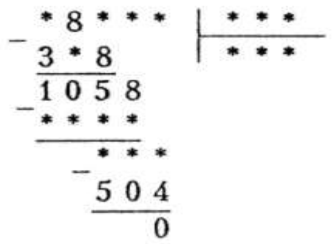
В ответе запишите значение $7S_3-2S_2-2S_1$.

Ответ: 28.

▷ **2.** Имеются два слитка, представляющие собой сплавы цинка с медью. Первый слиток весит 7 кг. Содержание цинка во втором слитке 10%. Если часть первого слитка весом в 2 кг сплавить со вторым слитком, то полученный сплав будет содержать на 1 кг цинка больше, чем в оставшемся куске первого слитка. Если же первый и второй слитки сплавить вместе и еще добавить 1 кг сплава цинка с медью, в котором цинка 60%, то полученный сплав будет содержать 20% цинка. Найти процентное содержание цинка в первом слитке и вес второго слитка.

Ответ: 50, 25.

▷ **3.** Восстановите отмеченные звездочками отсутствующие на рисунке цифры.



В ответе запишите разность между делимым и частным.

Ответ: 1089700.

▷ **4.** В трапеции *ABCD* с бо́льшим основанием *BC* и площадью, равной $12\sqrt{3}$, прямые *BC* и *AD* касаются окружности диаметром $2\sqrt{3}$ в точках *B* и *D* соответственно. Боковые стороны трапеции *AB* и *CD* пересекают окружность в точках *M* и *N* соответственно. Длина *MN* равна 3. Найти величину γ угла *MDN* и длину основания *BC*. В ответе запишите целую часть радиуса описанной окружности вокруг равнобедренного треугольника с основанием, равным *BC*, и углом при вершине, равным γ.

Ответ: 5 .

▷ **5.** Найдите сумму всех решений $x \in [0;18]$ уравнения

$$\frac{\left|\cos\frac{5\pi x}{24}\cos\frac{\pi x}{8}\right| - \sin\frac{\pi x}{8}\sin\frac{5\pi x}{25}}{\cos\frac{\pi x}{12}} = 2\sin\frac{\pi x}{12}.$$

Ответ: 158.

▷ **6.** Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x-8}-4} < \frac{1}{2|x-5|-5}.$$

Найдите все целые *x*, для которых это неравенство не выполняется. В ответе запишите сумму найденных значений *x*.

Ответ: 7.

▷ **7.** Прямоугольник разбит прямыми на 25 прямоугольников, площади некоторых из них указаны на рисунке. Найдите площади прямоугольников, отмеченных символами *x* и *y*. В ответе запишите НОД(*x*,*y*)+НОК(*x*,*y*).

12		32		x
	14			10
12			28	
y	35			
		24		15

Ответ: 65.

▷ **8.** К числу 221 справа и слева припишите по одной цифре так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 13. В ответе запишите сумму суммы цифр всех таких чисел.

Ответ: 72.

▷ **9.** Координаты вектора $\overline{l} = (x, y)$ удовлетворяет следующим условиям

$$\begin{cases} 3 + 21x = \dfrac{y}{x} - 4\sqrt{y - 3x} \\ \sqrt{y - \sqrt{y - 3x}} = y + 7x - 2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее значение принимает скалярное произведение $(\overline{l} \cdot \overline{p})$, где $\overline{p}(7;1)$, а $\overline{l}$ - найденный вектор?

Ответ: 4.

▷ **10.** Найдите среднее арифметическое всех целых *a*, при которых уравнение

$$ax^2 + (4a - 21)x + 4a - 15 = 0$$

имеет на отрезке $[-4;0]$ единственный корень. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: -7,6.

11 класс

Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▷ **1.** Интеллектуальный робот к числу 2021 справа и слева приписывает по одной цифре случайным образом. Какова вероятность P того, что полученное шестизначное число будет кратно 43? В ответе укажите значение $180 \cdot P$.

Ответ: 4.

▷ **2.** Найдите удвоенное среднее арифметическое всех решений уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{\cos\frac{2\pi x}{3}(1-\sin^2\frac{2\pi x}{3}\cos\frac{4\pi x}{3}-2\sin^2\frac{2\pi x}{3})}=1,$$

принадлежащих промежутку $(-2021;2022]$.

Ответ: 3.

▷ **3.** Какое наименьшее число слагаемых в сумме

$$1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7+\ldots$$

надо взять, чтобы оно было больше, чем 2021?

Ответ: 17.

▷ **4.** Найдите сумму всех натуральных x, удовлетворяющих неравенству $x^3+10000x\le 100x^2+333333,(3)$.

Ответ: 990.

▷ **5.** В треугольнике ABC угол A прямой. Величина угла B равна 30°. В треугольник вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние d от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB. В ответе запишите значение $d^2(30-d^2)$.

Ответ: 222.

▷ **6.** Сколько градусов содержит двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если плоскость, проведенная через сторону основания, делит этот угол и боковую поверхность пирамиды пополам?

Ответ: 45.

▷ **7.** Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\sqrt{81-6\sqrt{171-x^3}}<9-x.$$

Ответ: 7.

▷ **8.** Найти сумму всех таких целых значений a, чтобы при любом вещественном b нашлось такое вещественное c, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 2021(bx-y)=ac^2 \\ (b-6)x+2by=c+1 \end{cases},$$

имела хотя бы одно решение.

Ответ: 6195.

▷ **9.** Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек. В ответе запишите сумму всех таких целых a, для которых не выполняются условия задачи.

Ответ: -7.

▷ **10.** Сколько целых решений имеет неравенство

$$\arccos\frac{x}{2022}+\arccos\frac{x\sqrt{2}}{2022}+\arccos\frac{x\sqrt{3}}{2022}\le\frac{3\pi}{4}?$$

Ответ: 157.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант

▷ **1.** Интеллектуальный робот к числу 2021 справа и слева приписывает по одной цифре случайным образом. Какова вероятность P того, что полученное шестизначное число будет кратно 47? В ответе укажите значение $270 \cdot P$.

Ответ: 6.

▷ **2.** Найдите сумму всех решений уравнения

$$\frac{\cos \pi x}{\cos \frac{\pi x}{3}}(2\cos^2 \frac{\pi x}{3} - \sin^2 \frac{\pi x}{3} \cos \frac{2\pi x}{3} - 1) = 1,$$

принадлежащих промежутку $[1; 2021)$.

Ответ: 680403.

▷ **3.** Какое наименьшее число слагаемых в сумме $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + \ldots$ надо взять, чтобы она была больше чем 20210?

Ответ: 16.

▷ **4.** Найдите *S* – сумму всех целых решений неравенства

$$x^4 \le 2x^2 + 4\underbrace{00\ldots0}_{50}x + \underbrace{99\ldots9}_{100}.$$

Пусть *a* – количество цифр числа *S*, а *b* – сумма цифр числа *S*. В ответе запишите *a*+*b*.

Ответ: 29.

▷ **5.** В квадрат *ABCD* со стороной $a = \sqrt{2000}$ вписана окружность, которая касается стороны *CD* в точке *E*. Найти длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается прямой *AE*.

Ответ: 40.

▷ **6.** Определить объем правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром, равным α, и двугранным углом при боковом ребре, равным β. В ответе укажите значение при $\alpha = \sqrt{27}, \beta = 120^\circ$.

Ответ: 36.

▷ **7.** Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$2\sqrt{64-2\sqrt{528-x^3}}<16-x.$$

Ответ: -13.

▷ **8.** Найти сумму таких целых значений a, чтобы при любом вещественном b нашлось такое вещественное c, при котором система уравнений

$$\begin{cases}2021(x+2by)=a\\ bx+(1-b)y=c^2+c\end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

Ответ: -382790.

▷ **9.** Найти все значения параметра b, при каждом из которых функция $f(x)=\sin 2x-8(b+2)\cos x-(4b^2+16b+6)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек. В ответе запишите сумму всех таких целых b, при которых не выполняются условия задачи.

Ответ: -10.

▷ **10.** Сколько целых решений имеет неравенство

$$\arcsin\frac{x}{2022}+\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{2022}+\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2022}\geq\frac{3\pi}{4}?$$

Ответ: 157.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

▷ **1.** Интеллектуальный робот к числу 221 справа и слева приписывает по одной цифре случайным образом. Какова вероятность P того, что полученное пятизначное число будет кратно 13. В ответе запишите значение $315\cdot P$.

Ответ: 21.

▷ **2.** Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\frac{\cos 3\pi x}{\cos\frac{3\pi x}{5}}\left(2\cos^2\frac{3\pi x}{5}-\sin^2\frac{3\pi x}{5}\cos\frac{6\pi x}{5}-1\right)=1,$$

принадлежащих промежутку $[-20200;20220)$.

Ответ: 80850.

▷ **3.** Пусть $S_n = 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 + \ldots + n(n+4)$, найти такое *n*, что $2021 \in [S_n, S_{n+1}]$.

Ответ: 15.

▷ **4.** Найдите среднее арифметическое всех целых *x*, удовлетворяющих неравенству

$$x^3 + 400x \le 20x^2 + 2666,(6).$$

Ответ: 4.

▷ **5.** В равнобедренном прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен 2 см. Найти расстояние *d* от вершины острого угла до точки, в которой вписанная окружность касается противолежащего этому углу катета. В ответе записать значение $d^2(56 - d^2)$.

Ответ: 272.

▷ **6.** Найти сторону тетраэдра, вписанного в шар с радиусом $R = \sqrt{6}$.

Ответ: 4.

▷ **7.** Найдите сумму квадратов всех целых решений неравенства

$$\sqrt{81 - 6\sqrt{171 + x^3}} < 9 + x.$$

Ответ: 35.

▷ **8.** Найдите сумму всех таких целых значений *a*, при которых при любом вещественном значении *b* нашлось такое вещественное *c*, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 2021(bx - y) = ac^2 \\ b(x + 2y) = 6x + c + 1 \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение

Ответ: 6915.

▷ **9.** Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых функция $f(x) = 8(2a+1)\cos x - \sin 2x + (16a^2 + 16a - 18)x$ является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Ответ: -2.

▷ **10.** Сколько целых решений имеет неравенство

$$\arccos\frac{x}{2022}+\arccos\frac{x\sqrt{2}}{2022}+\arccos\frac{x\sqrt{3}}{2022}>\frac{3\pi}{4}?$$

Ответ: 2178.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▷ **1.** Интеллектуальный робот к числу 221 справа и слева приписывает по одной цифре случайным образом. Какова вероятность *P* того, что полученное пятизначное число будет кратно 17. В ответе укажите значение $270\cdot P$.

Ответ: 15.

▷ **2.** Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\frac{\cos 2\pi x}{\cos\frac{2\pi x}{5}}\left(1-2\sin^2\frac{2\pi x}{5}-\sin^2\frac{\sin^2\pi x}{5}\cos\frac{4\pi x}{5}\right)=1,$$

принадлежащих промежутку $(1;2021)$.

Ответ: 409050.

▷ **3.** Пусть $S_n=1\cdot 4+2\cdot 5+\ldots+n(n+3)$. Найти такое *n*, что $2021\in[S_n,S_{n+1}]$.

Ответ: 16.

▷ **4.** Найдите *S* – сумму всех целых решений неравенства

$$x^4+2x^3+2x\le 6x^2+6\underbrace{0\ldots0}_{10}x+\underbrace{99\ldots9}_{20}.$$

Пусть *a* – количество цифр числа *S*, *b* – сумма цифр числа *S*. В ответе запишите *a*+*b*.

Ответ: 9.

▷ **5.** В прямоугольном треугольнике *ABC* угол *A* прямой, длина катета *AB* равна *a*, радиус вписанной окружности равен *r*. Вписанная окружность касается катета *AC* в точке *D*. Найти длину хорды *d*, соединяющей точки пересечения окружности с прямой *BD*. В ответе записать d^2 в виде десятичной дроби при $r=1,\ a=7$.

Ответ: 3,92.

▷ **6.** Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр со стороной $a=\sqrt{600}$.

Ответ: 5.

▷ **7.** Найти сумму всех целых решений неравенства

$$2\sqrt{64-2\sqrt{528+x^3}}<16+x.$$

Ответ: 13.

▷ **8.** Найдите количество целых значений *a* таких, при которых при любом вещественном *b* нашлось такое вещественное *c*, при котором система уравнений

$$\begin{cases}1000(bx-y)=ac^2\\(b-6)x+2by=c+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 146.

▷ **9.** Найти все значения параметра *b*, при каждом из которых функция $f(x)=8(2b+2)\sin x-\sin 2x-(16b^2+32b-10)x$ является убывающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Ответ: -3.

▷ **10.** Сколько целых решений имеет неравенство

$$\arcsin\frac{x}{2022}+\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{2022}+\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2022}<\frac{3\pi}{4}?$$

Ответ: 2177.

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

Каждое из заданий заключительного тура могло быть максимально оценено в 10 баллов. От участников требовалось представить полное решение.

5 класс

▷ **Задача 1.** Художник Тюбик вручил Незнайке 2000 рублей и попросил купить альбом и набор красок. Альбом стоил 117 рублей, а набор красок – 166 рублей. Сколько альбомов и наборов красок нужно купить Незнайке, чтобы потратить как можно больше денег?

Решение: Исходную сумму можно представить следующим образом: $2000 = 117 \cdot 10 + 166 \cdot 5$, а значит, Незнайка сможет потратить все деньги, купив 10 альбомов и пять наборов красок.

Ответ: 10 альбомов и пять наборов красок.

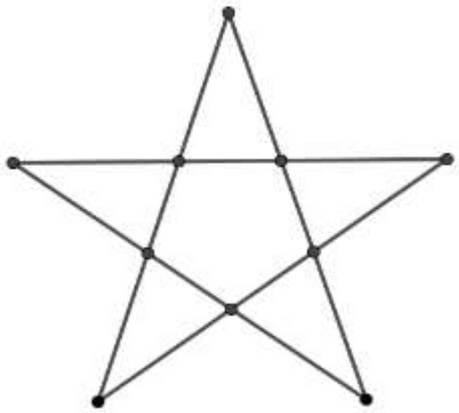
▷ **Задача 2.** Гусеница длиной в 1 см двигается со скоростью 48 $\frac{см}{ч}$. За какое время она преодолеет мост длиной 2022 мм?

Решение: Так как длина гусеницы 1 см = 10 мм, и она должна проползти расстояние 2022 мм, то всего ей надо проползти $2022 + 10 = 2032$ мм. Известно, что скорость гусеницы – $48\frac{см}{ч}$, что после перевода в нужную размерность составит $480\frac{см}{ч}$. Тогда 2032 мм она проползёт за $\frac{2032}{480} = 4\frac{7}{30}$ (час), т.е. за 4 часа 14 мин.

Ответ: 4 ч. 14 мин.

▷ **Задача 3.** Выберите на плоскости 10 точек и проведите через них пять отрезков одинаковой длины так, чтобы на каждом отрезке было по четыре точки.

Решение: Один из возможных вариантов указан на рисунке.



▷ **Задача 4.** Парусник отправляется 13 марта в полдень. Плаванье будет продолжаться 2022 часа. Назовите время и дату возвращения парусника в порт.

Решение: $2022 = 24 \cdot 84 + 6$, т.е. плаванье будет длиться 84 суток и 6 часов.

В марте 31 день, поэтому с 12:00 13-го по 12:00 31-го числа пройдет ровно 18 суток с начала заплыва. В апреле 30 дней, т.е. к 12:00 30-го апреля пройдет 48 суток; к 12:00 31-го мая пройдет 79 суток с начала заплыва и, наконец, к 12:00 5-го июня пройдет ровно 84 суток. Прибавив оставшиеся 6 часов, получим время возвращения в порт.

Ответ: 5 июня в 18:00.

▷ **Задача 5.** «На часах у нас двенадцать без пяти». На сколько изменится угол между часовой и минутной стрелками через 222 минуты?

Решение: Минутная стрелка за 60 минут проходит полный оборот, значит, её скорость равна 6 градусов в минуту. В то же время часовая стрелка проходит двенадцатую часть круга, т.е. 30 градусов, и её скорость – 0,5 градуса в минуту.

В начальный момент времени часы показывали 11 часов 55 минут. Если принять за «ноль» вертикальное положение стрелок, то положение минутной стрелки будет определяться следующим образом: 55 минут$\cdot$ 6° = 330°. Часовая стрелка в начале 11-го часа уже была повёрнута на 330°, поэтому в указанный момент времени она повернётся ещё на 55 минут $\cdot$ $0{,}5^{\circ}$ = $27{,}5^{\circ}$.

Таким образом, угол между часовой и минутной стрелками в начальный момент времени составляет $\alpha = 27{,}5^{\circ}$.

222 минуты – это 3 часа 42 минуты, т.е в конечный момент времени часы будут показывать 3 часа 37 минут. Минутная стрелка при этом будет повёрнута на 37 минут$\cdot 6^{\circ}$ = 222°, а часовая, которая в начале часа была расположена на 90°, через 37 минут окажется под углом 90°+ 37 минут$\cdot 0{,}5^{\circ}$= $108{,}5^{\circ}$. Тогда угол между часовой и минутной стрелками составит $\beta = 222^{\circ} - 108{,}5^{\circ} = 113{,}5^{\circ}$, что на 86° больше угла α.

Ответ: Увеличится на 86°.

▹ **Задача 6.** В записи восьмизначного числа, состоящего из одних восьмёрок, между некоторыми цифрами поставьте знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 1000.

Решение: Какие бы числа ни складывались в итоге, цифра единиц у них всегда равна 8. Чтобы в результате сложения последняя цифра суммы оказалась равной нулю, количество таких слагаемых должно быть кратно 5, а поскольку изначально дано восьмизначное число, то единственное подходящее количество – ровно 5. Кроме того, если среди слагаемых нет ни одного трёхзначного, эти пять слагаемых дадут сумму меньше 1000. Зная, что одно из слагаемых должно быть равно 888, и на оставшиеся 4 приходится 5 восьмёрок, получаем единственное возможное разложение: $888 + 88 + 8 + 8 + 8$. Нетрудно убедиться, что эта сумма действительно равна 1000.

Ответ: 888 + 88 + 8 + 8 + 8.

▹ **Задача 7.** На доске написано двадцать единиц и двадцать две двойки. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными – единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра – единица, то выиграл первый игрок, а если двойка, то второй. Кто выиграет при правильной игре, первый или второй? Ответ пояснить.

Решение: Если были стёрты две двойки, то количество единиц не изменилось; если были стёрты две единицы – количество единиц уменьшилось на 2; если же были стёрты двойка и единица, то потом на доске появилась новая единица, и общее число единиц снова не изменилось. Таким образом, какой бы ход ни был совершён, чётность числа единиц на доске не меняется.

Изначально на доске было записано чётное число единиц; в конце игры, очевидно, остаётся ровно одна цифра, и поскольку один – нечётное число, то этой цифрой не может быть единица. Значит, при любой игре выигрывает второй игрок.

Ответ: Выиграет второй игрок.

▷ **Задача 8.** К числу 357 приписали справа три цифры так, что получившееся шестизначное число делится на 3, 5 и 7 одновременно. Найдите все такие шестизначные числа с различными цифрами.

Решение: Так как искомое шестизначное число должно делиться на 3, 5 и 7, а числа 3, 5, 7 – взаимно простые, то искомое число должно делиться на 105.

Заметим, что число $357000 = 105 \cdot 3400$, т.е. оно делится на 105. Также на 105 будут делиться числа, которые получаются из числа 357000 последовательным прибавлением числа 105: 357105, 357210, 357315, 357420, 357525, 357630, 357735, 357840, 357945.

Выбираем числа с различными цифрами и получаем ответ.

Ответ: 357210, 357420, 357840.

▷ **Задача 9.** Шерочка (Ш) и Машерочка (М) чистили картофель. Ш очищала в минуту две картофелины, а М – три картофелины. Вместе они очистили 400 штук. Сколько времени работала каждая девочка, если М проработала на 25 минут больше Ш?

Решение: За 25 минут, что М работала одна, она очистила $25 \cdot 3 = 75$ (картофелин). Значит, работая вместе, девочки очистили $400 - 75 = 325$ (картофелин). Так как за одну минуту Ш и М вместе очищали

2 + 3 = 5 (картофелин), то 325 картофелин они очистили за 325 : 5 = 65 (мин). Значит, Ш работала 65 мин, а М 65 + 25 = 90 (мин).

Ответ: Шерочка работала 65 минут, а Машерочка – 90 минут.

Примечание: Кто такие Шерочка с Машерочкой?

Это интересное выражение пришло к нам из тех времен, когда был открыт Смольный институт. Он был построен при монастыре еще до революции.

Здесь обучались, в основном, девушки из зажиточных семей. В учебном заведении благородных девиц все учителя были строго женского пола. Прислуга была тоже из женщин. Мужчины допускались только на празднич-ные мероприятия, и то исключительно по пригласительным билетам на балы.

Поэтому на уроках танцев девушки танцевали парами друг с другом: одна вела за кавалера, а другая – за даму. Общались в институте строго на французском языке, и «кавалера» в паре называли *дорогой*, что звучало по-французски «chere», а «даму» – *моя милая*, т.е. «ma chere».

Потом это выражение стали употреблять в уменьшительно-ласкательной форме. Вот на наш манер и получилось выражение «шерочка с машерочкой».

▹ **Задача 10.** Какая фраза без пробелов зашифрована в следующем многозначном числе
461816111816191910102261213101916311361219115518196147151631025136
46155118193651210,
если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

Решение: Выпишем для наглядности пронумерованный русский алфавит (не забывая, что в русском языке – 33 буквы):

1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Расставим пробелы так, чтобы были отделены номера букв, определяющиеся однозначно:

4 6 18 16 1118 16 19 19 10 10 226 121310 19 16 3113 6 1219 115 5 18

19 6 14 7 15 16 310 25 13 6 4 6 15 5 118 19 3 6 5 12 10

Будем подставлять буквы, предполагая, что двузначные числа в получившейся записи – это одна буква (если вдруг окажется, что там зашифрованы две буквы, первая из которых – “а”, это будет легко исправить). Получим следующий промежуточный результат:

г е р о 1118 о с с и и 226 121310 с о 3113 е 1219 115 д р

с е м ё н о 310 ч л е г е н д 118 с в е д к и

Остальное подставляем методом подбора (последнее число 19, как оказывается, на самом деле – 1 и 9).

Ответ: Герой России Феклисов Александр Семёнович легенда разведки.

Примечание: На протяжении многих лет в зале вашингтонского ресторана «Occidental» висела бронзовая табличка, на которой было написано: «В напряжённый период Кубинского кризиса, октябрь 1962 года, за этим столом состоялась беседа таинственного русского «мистера Х» с корреспондентом телевизионной компании ABC Джоном Скали. На основе этой встречи угроза ядерной войны была предотвращена». Рядом с надписью висела фотография корреспондента, но нет ни имени, ни изображения его собеседника.

Спустя годы тайна открылась. Таинственный «мистер Х» – резидент советской политической разведки Александр Фомин, подлинное имя – Александр Семенович Феклисов.

Ссылки для интересующихся:

https://warheroes.ru/hero/hero.asp?Hero_id=4853

6 класс

▷ **Задача 1.** Если 42482 и 44506 разделить на одно и то же число, то получим соответственно остатки 20 и 22. Чему равен наибольший возможный делитель?

Решение: Вычтем остатки от деления и разложим на множители получившиеся числа:

$$42482-20=42462=2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 337;$$

$$44506-22=44484=2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 337.$$

Наибольший общий делитель этих чисел равен $2\cdot 3\cdot 337=2022$.

Ответ: 2022.

▷ **Задача 2.** Часы показывают 20 часов 22 минуты. На сколько изменится угол между часовой и минутной стрелкой через 2022 минуты?

Решение: Минутная стрелка за 60 минут проходит полный оборот, значит, её скорость равна 6 градусов в минуту. В то же время часовая стрелка проходит двенадцатую часть круга, т.е. 30 градусов, и её скорость – 0,5 градуса в минуту.

В начальный момент времени часы показывали 20 часов 22 минуты. Если принять за «ноль» вертикальное положение стрелок, то положение минутной стрелки будет определяться следующим образом: 22 минуты · 6° = 132°. Часовая стрелка в начале 20-го часа уже была повёрнута на 240°, поэтому в указанный момент времени она повернётся ещё на 22 минуты · $0{,}5^\circ$ = 11°. Таким образом, угол между часовой и минутной стрелками в начальный момент времени составляет $\alpha=(240^\circ+11^\circ)-132^\circ=119^\circ$.

2022 минуты – это 33 часа 42 минуты, т.е в конечный момент времени часы будут показывать 6 часов 4 минуты. Минутная стрелка при этом будет повёрнута на 4 минуты · 6° = 24°, а часовая, которая в начале часа была расположена на 180°, через 4 минуты окажется под углом

180° + 4 минуты $\cdot$ $0{,}5^\circ$ = 182°. Тогда угол между часовой и минутной стрелками составит $\beta = 182^\circ - 24^\circ = 158^\circ$, что на 39° больше угла α.

Ответ: Увеличится на 39°.

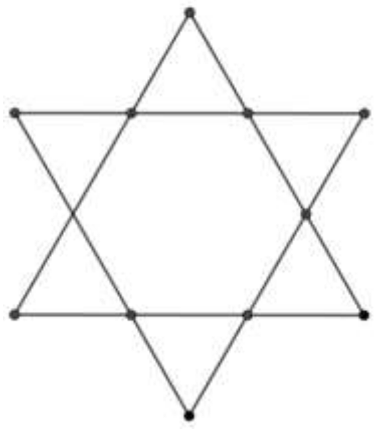
▷ **Задача 3.** В записи тринадцатизначного числа, состоящего из одних шестёрок, между некоторыми цифрами поставьте знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 2022.

Решение: В искомой сумме не может быть чисел из четырёх шестёрок, и должно встретиться как минимум три числа из трёх шестёрок, иначе оставшиеся двузначные числа дадут слишком маленькую сумму. Кроме того, чтобы в цифре единиц суммы стояла 2, необходимо складывать два или семь чисел, на конце которых стоит 6. Таким образом, единственное возможное представление имеет вид: $666+666+666+6+6+6+6$. Нетрудно убедиться, что эта сумма действительно равна 2022.

Ответ: $666+666+666+6+6+6+6$.

▷ **Задача 4.** Выберите на плоскости 12 точек и проведите через них шесть отрезков одинаковой длины так, чтобы на каждом отрезке было по четыре точки.

Решение: Один из возможных вариантов указан на рисунке



▷ **Задача 5.** На доске была написана обыкновенная несократимая дробь, числитель и знаменатель которой – целые положительные числа. К её знаменателю прибавили числитель, получилась новая дробь. К числителю новой дроби прибавили её знаменатель, получилась третья дробь. Когда к знаменателю третьей дроби прибавили числитель, получилось $\frac{13}{23}$. Какая дробь была написана на доске?

Решение: Обозначим исходную дробь через $\frac{m}{n}$ и выпишем последовательно получающиеся новые дроби:

$$\frac{m}{n}, \frac{m}{m+n}, \frac{m+(m+n)}{m+n} = \frac{2m+n}{m+n}, \frac{2m+n}{m+n+(2m+n)} = \frac{2m+n}{3m+2n} = \frac{13}{23},$$

откуда находим $46m+23n = 39m+26n \Rightarrow 7m = 3n.$ И, поскольку исходная дробь была несократимой, окончательно получаем $m=3, n=7$.

Ответ: $\frac{3}{7}$.

▷ **Задача 6.** Какое наименьшее количество цифр нужно написать подряд, чтобы вычёркиванием некоторых цифр можно было получить любое трёхзначное натуральное число от 100 до 999?

Решение: Поскольку среди трёхзначных чисел встречаются состоящие из трёх одинаковых цифр, каждую из цифр 1, 2, ..., 9 требуется записать как минимум три раза; кроме того, чтобы можно было получить числа 100, 200, ..., цифра 0 должна встретиться как минимум два раза. Если записать число 12345678901234567890123456789, то получить из него любое трёхзначное можно следующим образом: для цифры сотен вычеркнуть все лишние цифры из первой группы 1...9, для цифры десятков – из средней группы 01...9, для цифры единиц – из последней группы 01...9.

Ответ: 29-значное число.

▷ **Задача 7.** Подряд записаны числа 1, 2, ..., 2021, 2022. Каких цифр при записи этих чисел использовано больше: двоек или единиц? На сколько?

Решение: В числах от 1 до 999 цифры 1 и 2 встречаются одинаковое число раз. В числах от 1000 до 1999 единица на первом месте встретится 1000 раз, значит, единиц будет на 1000 больше, чем двоек. В числах 2000, 2001, ..., 2021, 2022 встречаются 29 двоек и 13 единиц, значит, всего единиц будет на $1000-(29-13)=984$ больше.

Ответ: Единиц использовано больше на 984.

▷ **Задача 8.** Какая фраза без пробелов зашифрована в следующем многозначном числе
3613101210112125715291118161919101014120614120101212161314164161816 3115,
если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

Решение: Выпишем для наглядности пронумерованный русский алфавит (не забывая, что в русском языке – 33 буквы):

1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Расставим пробелы так, чтобы были отделены номера букв, определяющиеся однозначно:

3 6 13 10 1210 112125 7 15 29 1118 16 19 19 10 10 14 120 6 14 120 10 121216 1314 16 4 16 18 16 3115

Будем подставлять буквы, предполагая, что двузначные числа в получившейся записи – это одна буква (если вдруг окажется, что там зашифрованы две буквы, первая из которых – “а” или “б”, это будет легко исправить). Получим следующий промежуточный результат:

в е л и 1210 112125 ё н ы 1118 о с с и и м 120 е м 120 и 121216 1314 о г о р о 3115

Остальное подставляем методом подбора.

Ответ: Великий учёный России математик Колмогоров А Н.

Примечание: Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987) – один из великих русских ученых, крупнейший математик XX столетия, гуманист, патриот, Герой Социалистического Труда, Лауреат Государственной и Ленинской премий, кавалер семи орденов Ленина, академик Российской академии наук и других наиболее престижных академий мира, почетный профессор множества университетов.

▷ **Задача 9.** В новогоднюю ночь 2021-2022 года на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, бегония и кактус. Каждым утром Мария Ильинична (МИ), вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днём Татьяна Юрьевна (ТЮ), поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы в следующую новогоднюю ночь?

Решение: Посмотрим как меняется местоположение цветов (герань - Г, бегония - Б, кактус - К)

		Герань	Бегония	Кактус
1.01	МИ	Г	К	Б
	ТЮ	К	Г	Б
2.01	МИ	К	Б	Г
	ТЮ	Б	К	Г
3.01	МИ	Б	Г	К
	ТЮ	Г	Б	К

Как видим, по истечении трёх дней цветы возвращаются в то же положение, с которого начался год. 2022-й год – не високосный, значит, в нём 365 дней. $365 = 3 \cdot 121 + 2$, т.е. на утро 30.12 цветы будут расположены в порядке герань-бегония-кактус, а значит, в новогоднюю ночь они будут стоять в порядке бегония-кактус-герань.

Ответ: В порядке бегония, кактус, герань (слева направо).

▷ **Задача 10.** В Мексике в обращении находятся монеты номиналом в 1, 2, 5 и 10 песо. Сколькими способами можно разменять монету 10 песо?

Решение: Самая большая из подходящих разменных монет – 5 песо, и наибольшее их количество после размена – 2 штуки. Рассмотрим различные ситуации:

первый случай: 2 монеты по 5 песо. Очевидно, что другие монеты в размене не участвуют, т.е. существует всего один такой способ размена.

второй случай: 1 монета по 5 песо. Оставшиеся 5 песо можно по-разному разменять монетами в 2 и 1 песо:

$$5 = 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+2+1,$$

итого три способа.

третий случай: 0 монет по 5 песо. То есть размен производится только монетами по 2 и 1 песо. Если начать с ситуации, в которой размен производится только монетами в 1 песо и последовательно заменять пару таких монет на одну монету в 2 песо, получим шесть способов размена.

Итого мы нашли $1+3+6=10$ способов размена.

Ответ: 10 способов.

7 класс

▹ **Задача 1.** Какая фраза зашифрована в многозначном числе без пробелов 13121186120151626136319121611171861410101716231014101011215614101219614715163151012161311115101216131631025, если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

Решение: Выпишем для наглядности пронумерованный русский алфавит (не забывая, что в русском языке – 33 буквы):

1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Расставим пробелы так, чтобы были отделены номера букв, определяющиеся однозначно:

1312118 6 1 20 15 16 26 13 6 319 1216 1117 18 6 14 10 10 17 16 23 10 14 10 10 11215 6 14 10 1219 614 7 15 16 315 10 1216 1311115 10 1216 1316 3 10 25

Будем подставлять буквы, предполагая, что двузначные числа в получившейся записи – это одна буква (если вдруг окажется, что там зашифрованы две буквы, первая из которых – “а” или “б”, это будет легко исправить). Получим следующий промежуточный результат:

1312118 е а т н о ш л е 319 1216 1117 р е м и и п о х и м и и 11215 е м и 1219 614 ё н о 315 и 1216 1311115 и 1216 1316 в и ч

Остальное подставляем подбором (заметим, что 26 в начале нашей строки – это на самом деле 2 и 6).

Ответ: Лауреат Нобелевской премии по химии академик Семёнов Николай Николаевич.

Примечание: Николай Николаевич Семенов родился 3 (15) апреля 1896 года в Саратове в семье служащего. В училище увлекся химией и физикой.

В 1913 окончил Самарское реальное училище (это же училище ранее окончили академик, руководитель плана ГОЭЛРО Г.М. Кржижановский и автор «Приключений Буратино» и других романов А.Н. Толстой), поступил на физический факультет Петербургского университета. С 1914 начал заниматься научной работой под руководством А.Ф. Иоффе. В 1917 окончил университет, в 1918–1920 работал ассистентом в Томском университете и Томском технологическом институте, в 1920 по приглашению Государственного физико-технического и рентгенологического института переехал в Петроград.

В 1920–1931 – заведующий лабораторией, в 1921–1928 – заместитель директора Ленинградского физико-технического института. В 1931 Семенов возглавил Институт химической физики, организованный на базе его лаборатории, и оставался его директором до конца жизни.

С 1945 Семенов – заведующий кафедрой химической кинетики в МГУ. Создатель научной школы, среди его учеников – Я.Б. Зельдович, В.Н. Кондратьев, Ю.Б. Харитон, Н.М. Эмануэль и многие другие. Избран членом многих иностранных академий и обществ, почетным доктором ряда зарубежных университетов.

В 1928 году Семенов сформулировал теорию так называемых цепных химических реакций, а в последующие годы – общую теорию разветвленных, вырожденно-разветвленных и неразветвленных цепных реакций. В ее основе лежало представление о том, что активная частица (атом, радикал, возбужденная молекула) реакционной смеси может вступать в реакцию, продуктами которой являются уже две активные частицы и т.д. по цепочке.

Сайт: http://www.biblioatom.ru/founders/semenov_nikolay_nikolaevich/

▹ **Задача 2.** Пусть *a, b, c* – целые числа, такие что $a+b+c=0$, $a^3+b^3+c^3=0$. Вычислить $a^{999}+b^{999}+c^{999}$.

Решение: Поскольку по условию $c = -(a+b)$, то

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a^3 + b^3 + 3ab(a+b)) = 3abc,$$

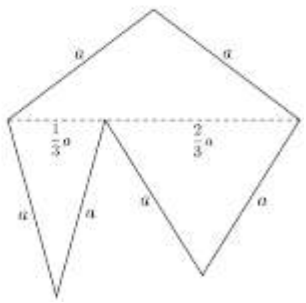
и, следовательно, одно из таких чисел *a, b, c* равно 0. Если, например, $c = 0$, то $a = -b$, тогда

$$a^{999} + b^{999} + c^{999} = -b^{999} + b^{999} = 0.$$

Ответ: 0.

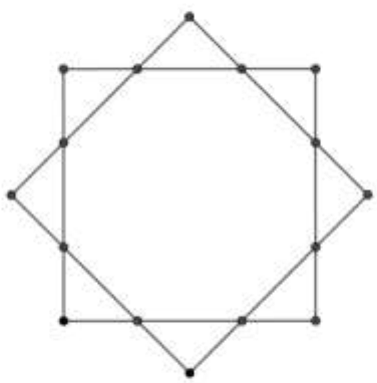
▷ **Задача 3.** Существует ли равносторонний шестиугольник, который можно разрезать на три неравных треугольника?

Решение: Один из примеров такого шестиугольника представлен на рисунке:



▷ **Задача 4.** Выберите на плоскости 16 точек и проведите через них восемь отрезков одинаковой длины так, чтобы на каждом отрезке было по четыре точки.

Решение: Один из возможных вариантов указан на рисунке.



▷ **Задача 5.** В записи тринадцатизначного числа, состоящего из одних шестёрок, между некоторыми цифрами поставьте знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 2022.

Решение: В искомой сумме не может быть чисел из четырёх шестёрок, и должно встретиться как минимум три числа из трёх шестёрок, иначе оставшиеся двузначные числа дадут слишком маленькую сумму. Кроме того, чтобы в цифре единиц суммы стояла 2, необходимо складывать два или семь чисел, на конце которых стоит 6.

Таким образом, единственное возможное представление имеет вид: $666+666+666+6+6+6+6$. Нетрудно убедиться, что эта сумма действительно равна 2022.

Ответ: $666+666+666+6+6+6+6$.

▷ **Задача 6.** Пусть $S(N)$ – сумма цифр числа *N*. Найти все трёхзначные числа *x* такие, что $S(x^k)=S^k(x), k=2,3,4$.

Решение: Пусть $S(x)=a$. Так как $x<1000$, то $x^4<10^{12}$, т.е. x^4 не больше числа, состоящего из 12 девяток, так что $S(x^4)=S^4(x)=a^4 \leqslant 108$, т.е. $a \leqslant 3$. Поэтому $x \in \{300; 201; 210; 102; 120; 111; 200; 101; 110; 100\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условию задачи удовлетворяют только числа 100, 101 и 110.

Ответ: 100, 101, 110.

▷ **Задача 7.** Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное от 1 до 9. Выиграет тот, кто получит число 10^{10}. Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

Решение: Выиграет второй игрок. Чтобы победить, ему достаточно каждым своим ответным ходом прибавлять такое число, чтобы в сумме с предыдущим ходом первого игрока изменяемое число увеличилось на 10.

▷ **Задача 8.** К числу *a* в некотором порядке применили последовательно четыре действия: умножение на *b*, деление на *b*, сложение с *b*, вычитание *b*. Какое наибольшее число различных результатов могло при этом получиться, если менять порядок применения действий?

Решение: Обозначим указанные в условии действия через У, Д, С, В. Можно подсчитать, что существует 24 способа их последовательного применения, которые мы выписывать полностью не будем, поскольку в действительности следует рассмотреть значительно меньшее число случаев.

В самом деле, если умножение и деление выполняются друг за другом, то результатом применения всех четырёх действий будет число a, и то же самое верно в случае, когда сложение и вычитание выполняются друг за другом. Поэтому из всех возможных “слов” из четырёх букв У, Д, С, В мы должны рассмотреть только те, в которых У и Д не стоят рядом, а также С и В не стоят рядом, т.е.

УСДВ, УВДС, ДСУВ, ДВУС, СУВД, СДВУ, ВУСД, ВДСУ

Выпишем результаты применения действий в указанных порядках. Первые четыре способа приводят к выражениям

$$a+1-b, a-1+b, a+b^2-b, a-b^2+b;$$

те же самые выражения получаются при четырёх оставшихся способах.

Теперь нетрудно подобрать такие значения a и b, при которых все четыре выражения различны, например при $a=3$, $b=2$ мы получаем результаты 2, 4, 5, 1. Следовательно, наибольшее общее число различных результатов равно 5 (напомним, что при применении любого из 16 не выписанных выше способов получается само число a).

Ответ: Пять различных результатов.

▷ **Задача 9.** Путешественник в первый день прошёл 20% всего пути и 2 км. Во второй он прошел 50% остатка и ещё 1 км. В третий день – 25% оставшегося пути и ещё 3 км. Остальные 18 км пути он прошёл в четвёртый день. Какова длина пути, пройденного путешественником?

Решение: Проанализируем проделанный путь с конца. Если в четвёртый день ему оставалось пройти 18 км, то $18+3=21$ км составлял 75% от оставшегося на третий день пути. Значит, в начале третьего дня путешественнику оставалось пройти $21:75\cdot 100=28$ км.

Аналогично, $28+1=29$ км составляли 50% (т.е. половину) пути, предстоящего на второй день, значит, всего в начале второго дня оставалось пройти 58 км.

Наконец, $58+2=60$ км составляли 80% всего пути, поэтому весь путь равен $60:80\cdot 100=75$ км.

Ответ: 75 км.

▷ **Задача 10.** Известно, что сумма цифр трёхзначного числа кратна 7. Какое наибольшее число делителей может иметь это число, если известно, что две последние цифры одинаковы?

Решение: Представим данное число в виде $\overline{abb}$. Сумма цифр любого трёхзначного числа лежит в пределах от 1 до 27; кроме того, по условию она должна делиться на 7, то есть

$$1\le a+2b=7k\le 27.$$

Выпишем все возможные значения a и b в зависимости от значения k:

k	***a; b***	**Делители числа**	**Количество делителей**
$k=1$ $a+2b=7$	$a=1;3;5;7$ $b=3;2;1;0$	$133=7\cdot 19$ $322=7\cdot 2\cdot 19$ $511=7\cdot 73$ $700=7\cdot 2^2\cdot 5^2$	4 8 4 18
$k=2$ $a+2b=14$	$a=2;4;6;8$ $b=6;5;4;3$	$266=2\cdot 7\cdot 19$ $455=5\cdot 7\cdot 13$ $644=2^2\cdot 7\cdot 23$ $833=7^2\cdot 17$	8 8 12 6
$k=3$ $a+2b=21$	$a=3;5;7;9$ $b=9;8;7;6$	$399=3\cdot 7\cdot 19$ $588=2^2\cdot 3\cdot 7^2$ $777=3\cdot 7\cdot 37$ $966=2\cdot 3\cdot 7\cdot 23$	8 18 8 16

Как видно из таблицы, наибольшее возможное количество делителей равно 18.

Ответ: 18.

8 класс

▷ **Задача 1.** Какая фраза зашифрована в 47-значном числе 32181011121516181691634615101156261022181631210, если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

Решение:

1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Подставим там, где нет других выборов

3218	10	111215	16	18	16	9	16	3	4	6	15	10	115	6	26	10	2218	16	312	10
	и		о	р	о	з	о	в	г	е	н	и		е	ш	и		о		и

Остальное подставляем методом подбора

Ответ: Юрий Кнорозов гений дешифровки.

Примечание: Юрий Валентинович Кнорозов — советский и российский историк, этнограф, лингвист и эпиграфист, переводчик, основатель советской школы майянистики.

В 1948 году окончил исторический факультет МГУ. Проблемой письменности майя заинтересовался ещё будучи студентом, вопреки общему скептическому настрою. «То, что создано одним человеческим умом не может не быть разгадано другим. С этой точки зрения, неразрешимых проблем не существует и не может существовать ни в одной из областей науки!», считал он.

Первая публикация результатов дешифровки, вышедшая все в той же Советской Этнографии в 1952 г., со скромным названием «Древняя письменность Центральной Америки», произвела настоящий фурор. Гениальное открытие Кнорозова было с восторгом принято отечественной научной общественностью. Защита проходила в Москве 29 марта 1955 г. Результатом стало присвоение звания не кандидата, а доктора исторических наук, что в гуманитарной области происходит крайне редко.

Защита диссертации по индейцам майя стала научной и культурной сенсацией в Советском Союзе, очень быстро о дешифровке узнали и за рубежом. Казалось парадоксом – ни разу не побывав в Мексике, советский исследователь сделал то, чего не добились многие ученые разных стран, годами проводившие полевые исследования среди индейцев майя. Единственной поездкой Ю.В. Кнорозова за рубеж (вплоть до 1990 г.) стало участие в Международном конгрессе американистов в Копенгагене в 1956 г., куда Кнорозов попал лишь благодаря настояниям академика А.П. Окладникова.

Ссылка: http://knorosov.com/

▷ **Задача 2.** Сколько существует таких троек натуральных двузначных чисел (a, b, c), что

$$a^4 + 2b^4 + c^4 + ac(a^2 + c^2) \leq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)?$$

Решение:

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (b^4 - 2b^2c^2 + c^4) + ac(a^2 - 2ac + c^2) \leq 0$$

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + ac(a - c)^2 \leq 0$$

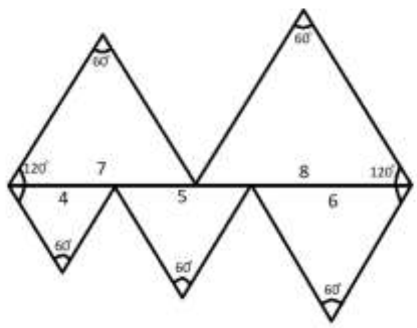
$$a = b = c = \overline{10,99}$$

— 90 двузначных чисел.

Ответ: 90 наборов чисел.

▷ **Задача 3.** Существует ли десятиугольник, который можно разрезать на пять неравных равносторонних треугольников, площади которых относятся как квадраты пяти последовательных чисел?

Решение:



$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 : S_5 = 4^2 : 5^2 : 6^2 : 7^2 : 8^2$$

▷ **Задача 4.** На отрезке *RG* симметрично относительно середины расположены 2022 точки. Краснов выбирает случайным образом 1011 точек и красит их в красный цвет, а Зеленов красит оставшиеся точки в зелёный цвет. Вычисляют d_1 – сумму расстояний от всех красных точек до *R*, и d_2 – сумму расстояний от всех зелёных точек до *G*. Какова вероятность того, что а) $d_1 > d_2$, б) $d_1 < d_2$, в) $d_1 = d_2$?

Решение: Пусть красная точка *C* и зеленая точка *D* расположены по разные стороны от середины *K* отрезка *AB*; если мы их перекрасим, то рассматриваемые суммы расстояний d_1 и d_2 увеличатся на одно и то же число $|CD|$, так что разность $d_1 - d_2$ не изменится. Таким перекрашиванием точек мы можем добиться того, что все красные точки будут лежать по одну сторону от середины *K*, а зеленые точки – по другую сторону от *K*. Но в этом случае из симметричности расположения точек следует, что $d_1 = d_2$, и поскольку в процессе перекрашивания разность $d_1 - d_2$ не изменялась, то и при исходной раскраске точек эти суммы были равны, следовательно, вероятность того, что $d_1 = d_2$, равна 1.

Ответ: а) 0, б) 0, в) 1.

▷ **Задача 5.** На доске была записана обыкновенная несократимая дробь, числитель и знаменатель которой – натуральные числа. К её знаменателю прибавили числитель, получилась новая дробь. К числителю прибавили знаменатель, получилась третья дробь. К знаменателю третьей дроби прибавили числитель, получилась четвёртая дробь, к числителю которой прибавили её знаменатель и, наконец, к знаменателю последней дроби прибавили её числитель, получилась дробь $\frac{49}{80}$. Какая дробь была написана на доске?

Решение:

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{m+n}=\frac{2m+n}{m+n}=\frac{2m+n}{3m+2n}=\frac{5m+3n}{3m+2n}=\frac{5m+3n}{8m+5n}=\frac{49}{80}$$

$$400m+240n=392m+245n$$

$$8m=5n$$

$$m=5, n=8\ .$$

Ответ: $\frac{5}{8}$.

▹ **Задача 6.** Часы показывают 20 часов 22 минуты. На сколько изменится угол между часовой и минутной стрелками через 20 часов 22 минуты?

Решение: Скорость минутной стрелки 6 градусов в минуту. Скорость часовой стрелки 0,5 градуса в минуту.

В 20 часов 22 минуты:

22 минуты $\cdot$ 6° = 132°;

22 минуты $\cdot$ $0{,}5^{\circ}$ = 11°;

$\alpha=119^{\circ}=240^{\circ}+11^{\circ}-132^{\circ}$;

20 ч 22 минуты + 20 ч 22 минуты = 4 ч 44 минуты;

4 ч 44 минуты:

44 минуты $\cdot$ 6° = 264°;

44 минуты $\cdot$ $0{,}5^{\circ}$ = 22°;

$\beta=264^{\circ}-(120^{\circ}+22^{\circ})=122^{\circ}$;

$\delta=\beta-\alpha=122^{\circ}-119^{\circ}=3^{\circ}$.

Ответ: Увеличится на 3°.

▷ **Задача 7.** В записи многозначного числа, состоящего из одних восьмёрок, расставьте знаки сложения так, чтобы получить выражение, значение которого равно *N*, где *N* – шестизначное число, записанное с помощью трёх двоек и трёх нулей. Какое наименьшее число восьмёрок достаточно для представления чисел вида *N*?

Решение: $N = 8k$, *N* должно делиться на 8, по условию подходят лишь три числа: $N = 222000, 220200, 202200$

1. $222000 = 2\cdot 88888 + 4\cdot 8888 + 9\cdot 888 + 7\cdot 88 + 8\cdot 8$

   $8 + 7\cdot 2 + 9\cdot 3 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5 = 75$,

2. $220200 = 2\cdot 88888 + 4\cdot 8888 + 7\cdot 888 + 7\cdot 88 + 8\cdot 5$

   $5 + 7\cdot 2 + 7\cdot 3 + 4\cdot 4 + 2\cdot 5 = 66$,

3. $202200 = 2\cdot 88888 + 2\cdot 8888 + 7\cdot 888 + 8\cdot 88 + 8\cdot 10$

   $10 + 8\cdot 2 + 7\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 = 65$.

Ответ: 65.

▷ **Задача 8.** Пусть *S(N)* – сумма цифр числа *N*. Найти все трёхзначные числа *x* такие, что $S(x^k) = S^k(x), k = 2,3,4$.

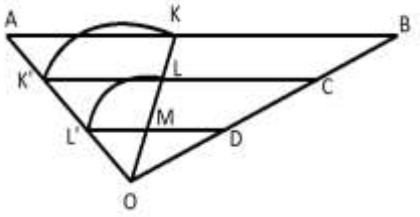
Решение: Пусть $S(x) = a$. Так как $x < 1000$, то $x^4 < 10^{12}$, т.е. x^4 не больше числа, состоящего из 12 девяток, так что $a^4 \le 108$, т.е. $a \le 3$. Поэтому $x \in 300; 201; 210; 102; 120; 111; 200; 101; 110; 100$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условию задачи удовлетворяют только числа 100, 101 и 110.

▷ **Задача 9.** Даны четыре отрезка длиной *a, b, c, d*. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок *x*, длина которого равна $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$.

Решение: В треугольнике, стороны которого *a* и *b*, а угол между ними 120°, биссектриса этого угла

$$x = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

(это следует из рассмотрения площадей треугольников: $xa\sin 60^{\circ} + xb\sin 60^{\circ} = ab\sin 120^{\circ}$).



На сторонах угла в 120° откладываем

$$OA = a, OB = b, OC = c, OD = d.$$

OK – биссектриса этого угла.

$$OK = OK' = x,$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}; OL = OL' = y,$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; OM = z.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

▹ **Задача 10.** Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное от 1 до 9. Выиграет тот, кто получит число g ($g = 10^{100}$). Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

Решение: Выиграет второй игрок. Цель каждого его хода – получить число, делящееся на 10.

9 класс

▷ **Задача 1.** Пусть $a_n = \sqrt{2022 + \sqrt{2022 + \sqrt{2022 + ... + \sqrt{2022}}}}$.

Число 2022 встречается в записи a_n n раз. Найдите целую часть числа a_{2022}.

Решение:

$$1936 = 44^2 < 2022 < 45^2 = 2025;$$

$$44 < \sqrt{2022} < 45;$$

$$45^2 < 2066 < 2022 + \sqrt{2022} < 2067 < 46^2 = 2116;$$

$$[a_2] = 45;$$

$$45 < a_3 = \sqrt{2022 + a_2} < 46;$$

$$[a_3] = 45;$$

$$\dots$$

$$[a_{2022}] = 45.$$

Ответ: 45.

▷ **Задача 2.** Найти целочисленную функцию $A(\mu)$, удовлетворяющую условиям:

$A(1) = 1;\ \alpha\beta = A(\alpha + \beta) - A(\alpha) - A(\beta)$.

Решение: Любое целое число можно выразить через функцию $A(\mu)$. В самом деле, при $\beta = 1$ имеем:

$$\alpha = A(\alpha + 1) - A(\alpha) - A(1).$$

Учитывая, что $A(1) = 1$, имеем:

$$\alpha + 1 = A(\alpha + 1) - A(\alpha).$$

Заменяя $\alpha = \mu - 1$, получаем:

$$\mu = A(\mu) - A(\mu - 1).$$

Полагая $\mu = 2, 3, ..., \alpha,$ получим:

$$2 = A(2) - A(1);$$

$$3 = A(3) - A(2);$$

$$\ldots$$

$$\alpha = A(\alpha) - A(\alpha - 1).$$

Сложив почленно, получим:

$$A(\alpha) = 1 + 2 + 3 + \ldots + \alpha = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.$$

Это условие является необходимым. Оно же и достаточно.

Положив в выражении

$$A(\alpha+\beta) - A(\alpha) - A(\beta),$$

$$A(\mu) = \frac{\mu(\mu+1)}{2},$$

получим (после преобразований)

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2} = \alpha\beta.$$

Следовательно,

$$A(\mu) = \frac{\mu(\mu+1)}{2}.$$

▷ **Задача 3.** Найти сумму всех целых решений неравенства $x^4 \le 2x^2 + \underset{50}{400\ldots0}\,x + \underset{100}{99\ldots9}$.

Решение:

$$x^4 + 2x^2 + 1 \le 4x^2 + 4\cdot 10^{50}x + 10^{100};$$

$$(x^2+1)^2 - (2x + 10^{50})^2 \le 0;$$

$$(x^2 - 2x - \underset{50}{99\ldots9})(x^2 + 2x + 10^{50} + 1) \le 0;$$

$$(x - \underset{24}{10\ldots01})(x + \underset{25}{99\ldots9}) \le 0;$$

$$x \in \left[-\underset{25}{99\ldots9}; \underset{24}{10\ldots01}\right];$$

$$S = \underset{25}{10\ldots0} + \underset{24}{10\ldots01} = \underset{24}{20\ldots01}.$$

Ответ: $\underset{24}{20\ldots01}$.

▷ **Задача 4.** Отличные от нуля числа

$a_0, a_1, a_2, ..., a_{2022}$; $b_0, b_1, b_2, ..., b_{2022}$; $c_0, c_1, c_2, ..., c_{2022}$

таковы, что для любых действительных x справедливы равенства

$(a_1 x + b_1)^2 + ... + (a_{2022} x + b_{2022})^2 = (a_0 x + b_0)^2,$

$(a_1 x + c_1)^2 + ... + (a_{2022} x + c_{2022})^2 = (a_0 x + c_0)^2.$

Чему равна сумма квадратов $(c_1 x + b_1)^2 + ... + (c_{2022} x + b_{2022})^2$?

Решение: Докажем, что требуемая сумма равна $(c_0 x + b_0)^2$.

Подставив $x = -\frac{b_0}{a_0}$ в первое тождество, получим

$$\sum_{i=1}^{2022}\left(-\frac{a_i b_0}{a_0} + b_i\right)^2 = 0,$$

откуда $b_i = \frac{a_i b_0}{a_0}$ для любого $i = 1, ..., 2022.$

Аналогично при $x = -\frac{c_0}{a_0}$ из второго тождества получаем $c_i = \frac{a_i c_0}{a_0}$ для любого $i = 1, ..., 2022$.

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{2022}\left(c_i x + b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{2022}\left(\frac{a_i c_0}{a_0} x + \frac{a_i b_0}{a_0}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{2022} a_i^2}{a_0^2}(c_0 x + b_0)^2,$$

а поскольку при $x = 1 - \frac{b_0}{a_0}$ первое тождество дает равенство $\sum_{i=1}^{2022} a_i^2 = a_0^2$, то

$$\sum_{i=1}^{2022}\left(c_i x + b_i\right)^2 = (c_0 x + b_0)^2,$$

что и требовалось доказать.

▷ **Задача 5.** Множество всех натуральных чисел от 1 до 2022 разбить а) на две группы с равными суммами; б) на три группы с равными суммами.

Решение:

$$\frac{1 + ... + 2022}{2} \cdot 2022 = 1011 \cdot 2023.$$

Сумма нечетная, следовательно, на 2 не делится. Пункт а) нельзя разбить;

б) приводим пример $S_1+S_2+S_3=1011\cdot 2023=3\cdot 337\cdot 2023$

$$\underbrace{1,...,337}_{S_1},\underbrace{338,...,674}_{S_2},\underbrace{675,...,1348}_{S_3},\underbrace{1349,...,1685}_{S_2},\underbrace{1686,...,2022}_{S_1}$$

$$S_1=\frac{1+337}{2}\cdot 337+\frac{1686+2022}{2}\cdot 337=\frac{337}{2}(1+337+1686+2022)=337\cdot 2023;$$

$$S_2=\frac{338+674}{2}\cdot 337+\frac{1349+1685}{2}\cdot 337=\frac{337}{2}(338+674+1349+1685)=337\cdot 2023;$$

$$S_3=\frac{675+1348}{2}\cdot 674=337\cdot 2023.$$

▷ **Задача 6.** Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число меньше его. Выиграет тот, кто получит 2022. Кто победит при правильной игре, если играют двое?

Решение: При любой игре второго игрока первый выиграет.

Стратегия:

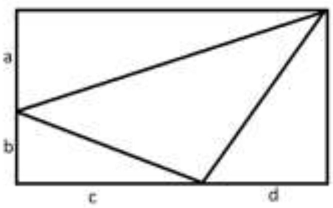
Число на доске	**Ход первого**	**Число на доске**	**Ход второго**
2	1	3	$1\le x\le 2$
$3+x$	$2\le y=4-x\le 3$	7	$1\le x\le 6$
$7+x$	$2\le y=8-x\le 7$	15	$1\le x\le 14$
$15+x$	$2\le y=16-x\le 15$	31	$1\le x\le 30$
$31+x$	$2\le y=32-x\le 31$	63	$1\le x\le 62$
$63+x$	$1\le y=63-x\le 62$	126	$1\le x\le 125$
$126+x$	$1\le y=126-x\le 125$	252	$1\le x\le 251$
$252+x$	$2\le y=253-x\le 252$	505	$1\le x\le 504$
$505+x$	$2\le y=506-x\le 505$	1011	$1\le x\le 1010$
$1011+x$	$1\le y=1011-x\le 1010$	2022	

▹ **Задача 7.** Пусть a, b, c и d – положительные рациональные числа. Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого равны $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$, и его площадь выражается рациональным числом.

Решение:

$$S_{\square}=(a+b)(c+d)-\frac{1}{2}\left[a(c+d)+bc+(a+b)d\right]=\frac{1}{2}(ac+bc+bd).$$

▹ **Задача 8.** Найдите все такие пары квадратных трёхчленов x^2+ax+b и x^2+cx+d, что корни второго трёхчлена – числа a и b, а корни первого трёхчлена – числа c и d.



Решение: Числа a, b, c, d должны, согласно теореме Виета, удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} c+d=-a \\ cd=b \\ a+b=-c \\ ab=d \end{cases}.$$

Из первого и третьего уравнений получаем равенство $b=d$. Если при этом $b=d=0$, то числа a и c могут быть любыми, удовлетворяющими равенству $c=-a$. Поэтому каждый трёхчлен вида x^2+ax составляет вместе с трёхчленом x^2-ax требуемую пару. Если же $b=d\neq 0$, то, получив из второго и четвёртого уравнений $a=c=1$, из первого и третьего находим $b=d=-2$. Следовательно, трёхчлен x^2+x-2 составляет вместе с равным ему ещё одну пару трёхчленов, удовлетворяющую условиям задачи.

▹ **Задача 9.** Доказать, что в любом многоугольнике есть по крайней мере две стороны a и b, такие что $1\le\frac{b}{a}<2$.

Решение: Пусть длины сторон многоугольника в порядке убывания (но не обязательно в порядке обхода) равны $a_1, a_2, ..., a_n$, $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$. Предположим, что $\dfrac{a_i}{a_{i+1}} \ge 2$ при всех $i = 1, 2, ..., n-1$.

Тогда

$$a_2 \le \frac{1}{2}a_1, a_1 \le \frac{1}{2^2}a_1, ..., a_n \le \frac{1}{2^{n-1}}a_1$$

и

$$a_2 \le a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < a_1,$$

чего не может быть.

▷ **Задача 10.** Число *S(N)* есть сумма цифр числа *N*. Пусть $a = S(2022^{2022})$, $b = S(a)$. Чему равно $c = S(b)$?

Решение:

$$2022^{2022} < (2^{11})^{2022} = 2^{22242} = 2^{3\cdot 7414} = 8^{7414} < 10^{7414};$$

$$7414 < \underset{количество\_цифр}{8000};$$

$$a < 72000;$$

$$b \le S(69999) = 42;$$

$$c \le 12;$$

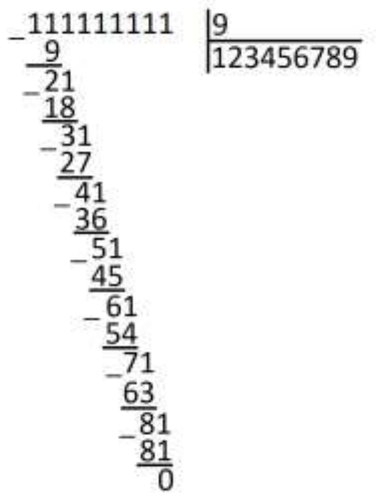
$$(2022)^{2022} = (2025-3)^{2022} = 9n + 3^{2022} = 9m;$$

$$\begin{cases} c \vdots 9 \\ c \le 12 \end{cases} \Rightarrow c = 9.$$

Ответ: $c = 9$.

10 класс

▷ **Задача 1.** Сколько существует натуральных чисел, состоящих из одних единиц, не превосходящих гугол (т.е. число 10^{100}) и кратных числу, состоящему из 9 девяток?



Решение:

$\underbrace{11...1}_{k} \vdots 999999999 = 9 \cdot 9 \cdot 123456789$;

$9 \cdot 9 \cdot 37 \cdot 333667$;

$k = 81m \leq 100,$

где $81m$ - кол-во единиц в числе, m – кол-во чисел.

$m = 1$.

Ответ: Одно.

▷ **Задача 2.** Найдите целое значение параметра b, при котором наименьший член последовательности $x_n = 3n - 9\sqrt{n-2} + b$ ближе всего к нулю ($n \in N$).

Решение:

$$x_n = 3(n-2) - 9\sqrt{n-2} + b + 6 = 3[(\sqrt{n-2})^2 - 2\frac{3}{2}\sqrt{n-2} + \frac{9}{4}] + b + 6 - \frac{27}{4} =$$

$$= 3(\sqrt{n-2} - \frac{3}{2})^2 + \underbrace{b + 6 - \frac{27}{4}}_{b - \frac{3}{4}} \geq b - \frac{3}{4};$$

$$\sqrt{n-2} = \frac{3}{2};$$

$$n - 2 = \frac{9}{4};$$

$$n = 4\frac{1}{4};$$

n – целое:

$n = 4,\ x_4 = 12 - 9\sqrt{2} + b$;

$n=5$, $x_5=15-9\sqrt{3}+b$;

$$12-9\sqrt{2}+b\overset{<}{\vee}15-9\sqrt{3}+b;$$

$$-3-9\sqrt{2}\overset{<}{\vee}-9\sqrt{3};$$

$$-1-3\sqrt{2}\overset{<}{\vee}-3\sqrt{3};$$

$$1+3\sqrt{2}\overset{>}{\vee}3\sqrt{3};$$

$$1+18+6\sqrt{2}\overset{<}{\wedge}27;$$

$$6\sqrt{2}\overset{<}{\wedge}8;$$

$$3\sqrt{2}\overset{<}{\wedge}4;$$

$$18\overset{<}{\wedge}16.$$

Наименьший член $x_4=12-9\sqrt{2}+b$

$$12-9\cdot 1,42<12-9\sqrt{2}<12-9\cdot 1,41;$$

$$-0,78<12-9\sqrt{2}<-0,69;$$

$$b-0,78<x_4<b-0,69;$$

$b=0$, $-0,78<x_4<-0,69$;

$b=1$, $0,22<x_4<0,31$ При $b=1$, x_4 - ближе к нулю.

Ответ: $b=1$.

▷ **Задача 3.** Функция f определена на множестве целых неотрицательных чисел и имеет значения на этом множестве. Для любых n на этом множестве имеет место равенство $f(f(n))+f(n)=2n+3$. Найдите $f(2022)$.

Решение: При $n=0$ неравенство выглядит так: $f(0)+f(f(0))=3$. Поскольку числа должны быть целыми и неотрицательными есть четыре варианта: 0 и 3, 3 и 0, 2 и 1, 1 и 2.

Первый вариант : $f(0)=0, f(f(0))=f(0)=0\neq 3$ – вариант не подходит.

Второй вариант : $f(0)=3, f(f(0))=f(3)=0$.

При $n=3$

$$f(3)+f(f(3))=9;$$

$$\underset{0}{f(3)}+\underset{3}{f(0)}=9;$$

$$0+3\neq 9.$$

Вариант не подходит.

Третий вариант :

$$f(0)=2, f(f(0))=f(2)=1.$$

При $n=2$

$$f(2)+f(f(2))=7;$$

$$\underset{1}{f(2)}+f(1)=7;$$

$$f(1)=6.$$

При $n=1$

$$f(1)+f(f(1))=5;$$

$$\underset{6}{f(1)}+f(6)=5;$$

$$f(6)=-1.$$

Вариант не подходит.

Четвертый вариант : $f(0)=1, f(f(0))=f(1)=2$.

Тогда $f(n)=n+1$. Доказываем при помощи метода математической индукции:

$$f(k)+f(f(k))=2k+3;$$

$$k+1+f(k+1)=2k+3;$$

$$k+1+k+1+1=2k+3;$$

$$2k+3=2k+3.$$

Подставим $k+1$

$$f(k+1)+f(f(k+1))=2(k+1)+3;$$

$$k+2+f(k+2)=2k+2+3;$$

$$k+2+k+3=2k+5;$$

$$2k+5=2k+5.$$

Доказано, что $f(n)=n+1$ при помощи метода математической индукции. Следовательно, $f(2022)=2023$.

Ответ: $f(2022)=2023$.

▷ **Задача 4.** Найти сумму всех натуральных *x*, удовлетворяющих неравенству

$$x^3+10000x\le 100x^2+333333,(3).$$

Решение:

$$x^3-100x^2+10000x\le\frac{1000000}{3};$$

$$3x^3-300x^2+30000x\le 10^6;$$

$$3\left(\frac{x}{100}\right)^3-3\left(\frac{x}{100}\right)^2+3\left(\frac{x}{100}\right)\le 1;$$

$$\left(\frac{x}{100}\right)^3\left[\left(\frac{100}{x}\right)^3-3\left(\frac{100}{x}\right)^2+3\left(\frac{100}{x}\right)-3\right]\ge 0;$$

$$\left(\frac{x}{100}\right)\left[\left(\frac{100}{x}-1\right)^3-2\right]\ge 0, x\in N\Rightarrow\frac{x}{100}>0;$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{100}{x}-1\ge\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow\frac{100}{x}\ge 1+\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x\le\frac{100}{1+\sqrt[3]{2}};$$

$$12<\sqrt[3]{2000}<13;$$

$$12^3=1728, 13^3=2197;$$

$$1,2<\sqrt[3]{2}<1,3;$$

$$12,5^3=1953,125;$$

$$12,6^3=2000,376;$$

$$2,2<1+\sqrt[3]{2}<2,3;$$

$$43,4<\frac{100}{2,3}<43,5;$$

$$\frac{100}{2,3}<\frac{100}{1+\sqrt[3]{2}}<\frac{100}{2,2};$$

$$45,4<\frac{10}{2,2}<45,5;$$

$$12,6^3=(12\frac{3}{5})^3=\frac{63^3}{125}=\frac{250047}{125}=2000,376;1,25<\sqrt[3]{2}<1,26;$$

$$44,2<\frac{100}{2,26}<\frac{100}{1+\sqrt[3]{2}}<\frac{100}{2,25}=44,(4)<44,4;0,4424<\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}<0,4444;$$

$$x=1,...,44;S=\frac{44+1}{2}\cdot 44=45\cdot 22=990.$$

▷ **Задача 5.** Пусть m – число непрерывных, а n – число непрерывных и ограниченных на $(-\infty;+\infty)$ решений уравнения $y^3+2(1+x^2)y+x^4=3y^2+x^4y+2x^2$. Найдите $\frac{m}{n}$.

Решение:

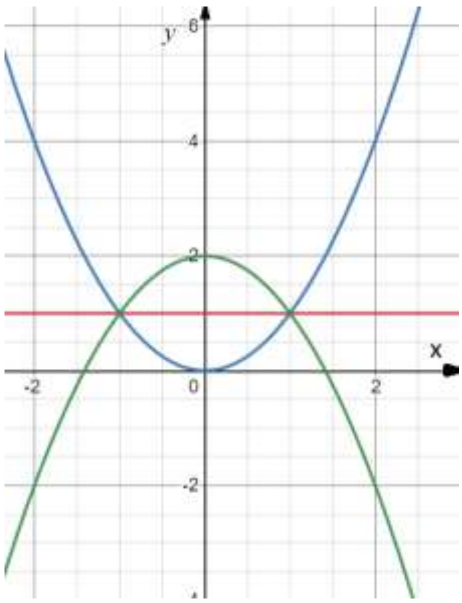
$$(y-1)\left[(y-1)^2-(x^2-1)^2\right]=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=x^2, \\ y=-x^2+1+1=2-x^2. \end{array}\right.$$

$$3^3=27=m;$$

$$1\cdot 3\cdot 1=n;$$

$$\frac{m}{n}=9.$$



Ответ: $\frac{m}{n}=9.$

▷ **Задача 6.** На плоскости отмечены три вершины квадрата и разрешается применять центральные симметрии относительно взятых точек и точек, построенных при применении этих симметрий. Можно ли такими построениями получить четвёртую вершину квадрата?

Решение: Введём на плоскости систему координат таким образом, чтобы заданными вершинами были точки (0,0), (1,0) и (0,1). Если координаты некоторой точки *A(x,y)* – целые, то точкой, симметричной ей относительно точки *B(a,b)*, будет точка $A'(2a-x,2b-y)$. Поэтому координаты точки *A'* имеют ту же самую чётность, что соответствующие координаты точки *A*. Но из данных вершин с помощью разрешённых центральных симметрий нельзя построить точки с двумя нечетными координатами, т.е. четвёртую вершину (1,1) получить нельзя.

▹ **Задача 7.** Искусственный интеллект (из Сколково) «Роботы Вася и Василиса» после трудовой недели занялись любимом делом – образованием новых десятичных дробей из заданной бесконечной десятичной дроби. Василиса выбирает случайным образом любое натуральное число *k*, не превосходящее 2022, а Вася проделывает последовательно *k* раз операцию: из полученной дроби удаляет все цифры, стоящие на нечётных местах после запятой. Какова вероятность, что из дроби $0,(\overline{a_1 a_2 ... a_{35}})$ после *k* операций снова получится эта же дробь?

Решение: После первого вычёркивания останутся цифры, стоящие в исходной дроби на чётных местах, после второго - цифры, стоящие на местах, номера которых делятся на 4, и вообще, после *k*-го вычёркивания останутся цифры, стоящие в исходной дроби на местах с номерами, кратными 2^k, т.е. с номерами 2^k, $2\cdot 2^k$, $3\cdot 2^k$, $4\cdot 2^k$ и т.д.

Для того чтобы получилась исходная дробь, надо, чтобы цифра с номером 2^k совпадала с a_1, а для этого достаточно, чтобы 2^k отличалось от 1 на число, кратное 35. Легко проверить, что таким числом будет, например, $k=12$. При этом разности $2\cdot 2^{12}-2$, $3\cdot 2^{12}-3$, ..., $35\cdot 2^{12}-35$ также делятся на 35, и поэтому первые оставшиеся 35 цифр образуют период исходной дроби.

Таким образом, после 12 вычеркивания мы получаем исходную дробь.

$$12, 24, ..., 12+12(n-1)\le 2022;$$

$$12n\le 2022;$$

$$2022=12\cdot 168+6;$$

$$n=168;$$

$$p=\frac{168}{2022}=\frac{28}{337}.$$

▷ **Задача 8.** Оцените, не используя вычислительные средства, что больше: $1+\sin(2022)$ или $\sin(2023)$.

Решение:

$$f(x)=x+\cos x\uparrow;$$

$$f'(x)=1-\sin x\geq 0;$$

$$f(2022)=2022-\sin(2022);$$

$$f(2023)=2023-\sin(2023);$$

$$2022-\sin(2022)>2023-\sin(2023);$$

$$\sin(2023)>1+\sin(2022).$$

▷ **Задача 9.** Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ связаны зависимостью

$$\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}+\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)\vec{b}+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{0}$$

Найти множество значений $\alpha+\beta+\gamma$, где α – угол между $\vec{b}$ и $\vec{c}$, β – угол между $\vec{c}$ и $\vec{a}$, γ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

Разделив левую часть равенства на $|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$, получим

$$\cos\alpha\vec{e}_1+\cos\beta\vec{e}_2+\cos\gamma\vec{e}_3=\vec{0},$$

где $\vec{e}_1=\vec{a}:|\vec{a}|$, $\vec{e}_2=\vec{b}:|\vec{b}|$, $\vec{e}_3=\vec{c}:|\vec{c}|$.

1) Если один из косинусов в равенстве равен нулю, то и два других косинуса также равны нулю. Действительно, если $\cos\alpha=0$, то $\vec{e}_2\perp\vec{e}_3$, причём $\cos\beta\vec{e}_2+\cos\gamma\vec{e}_3=\vec{0}$. Отсюда следует, что $\cos\beta=\cos\gamma=0$. В этом случае имеем $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$.

2) Пусть $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\neq 0$. Умножив левую часть равенства скалярно на $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, получим

$$\begin{cases}\cos\alpha+2\cos\beta\cos\gamma=0\\ \cos\beta+2\cos\gamma\cos\alpha=0.\\ \cos\gamma+2\cos\alpha\cos\beta=0\end{cases}$$

Из этой системы найдём α, β и γ. Для этого заметим, что либо все углы тупые, либо только один из них тупой. Исключив из первых двух уравнений $\cos\beta$, получим $4\cos^2\gamma = 1$, или $\cos^2\gamma = \dfrac{1}{4}$. Аналогично, $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\cos^2\beta = \dfrac{1}{4}$. Следовательно, имеем:

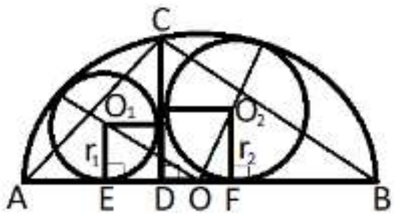
$\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ; \alpha = 120^\circ, \beta = \gamma = 60^\circ;$

$\alpha = \gamma = 60^\circ, \beta = 120^\circ; \alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 120^\circ; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$

Ответ: $\{240^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$.

▷ **Задача 10.** Даны полуокружность с диаметром *AB* и произвольная точка *C* этой полуокружности. Прямая *CD* перпендикулярна к прямой *AB* (точка *D* принадлежит диаметру *AB*). Известно, что r_1 и r_2 – радиусы окружностей, вписанных в криволинейные треугольники *ACD* и *BCD*. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

Решение: Пусть $|AD| = a$, $|BD| = b$, *E* и *F* – соответственно точки касания окружностей радиусов r_1 и r_2 с прямой *AB*, *O* – середина диаметра *AB*.



Из треугольника OO_1E имеем

$$|EO_1|^2 + |EO|^2 = |OO_1|^2$$

или

$$r_1^2 + \left(r_1 - \frac{1}{2}(a-b)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(a+b) - r_1\right)^2.$$

Из полученного квадратного уравнения

$$r_1^2 + 2br_2 - ab = 0$$

находим

$$r_1 = \sqrt{ab + b^2} - b.$$

Аналогично из рассмотрения прямоугольного треугольника OO_2F получаем

$$r_2 = \sqrt{ab + a^2} - a\,.$$

Вычислим радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC:

$$r = \frac{2S}{2p} = \frac{|asd|}{|asd|} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{\sqrt{(a+b)a} + \sqrt{(a+b)b} + (a+b)} = \frac{\sqrt{ab(a+b)}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab(a+b)}(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (a+b)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a(a+b)} + \sqrt{b(a+b)} - a - b) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)\,.$$

Ответ: $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

11 класс

▹ **Задача 1.** Линейная функция такова, что $f(1)=20{,}22$, $f(2)=2{,}022$. Имеется счётное устройство, на котором можно складывать или вычитать действительные числа. За каждое действие необходимо заплатить 1 рубль. Хватит ли вам а) 100 рублей, б) 25 рублей, чтобы вычислить $f(2022)$, если устройство может оперировать лишь введёнными предварительно значениями $f(1)$ и $f(2)$ и теми значениями, которые получены в процессе предыдущих вычислений?

Решение: Покажем, что нам потребуется даже меньше 25 рублей, чтобы найти $f(2022)$. По условию, $f(x)$ – линейная функция, т.е. её можно представить в виде $f(x)=kx+b,$ при этом $f(1)=k+b,$ $f(2)=2k+b,$ тогда

$$b=2f(1)-f(2)=f(1)+f(1)-f(2)$$

(на нахождение коэффициента b потребуется потратить 2 рубля). Введём функцию $g(x)=kx=f(x)-b.$ Для неё верно соотношение

$$g(2x)=2g(x)=g(x)+g(x).$$

Помня, что под умножением на 2 в нашей записи подразумевается одна операция сложения, можем получить:

$$g(2)=f(2)-b,$$

$$g(4)=2g(2),$$

$$g(8)=2g(4),$$

$$g(16)=2g(8),$$

$$\ldots$$

$$g(2048)=2g(1024).$$

Всего 11 операций сложения и вычитания, т.е. потрачено 11 рублей. Кроме того, для этой функции верно

$$g(x\pm y)=g(x)\pm g(y),$$

Поэтому $$g(2032) = g(2048-16) = g(2048) - g(16),$$
$$g(2024) = g(2032) - g(8),$$
$$g(2022) = g(2024) - g(2).$$

Таким образом, на вычисление значения $g(2022)$ у нас ушло 14 операций, а значит, пришлось потратить 14 рублей. Чтобы найти $f(2022)$, осталось совершить ещё одну операцию:
$$f(2022) = g(2022) + b.$$

Таким образом, если сложить все затраты, на вычисление потребуется 17 рублей.

В решении приведён лишь один пример подходящего числа операций; разумеется, возможны и другие.

Ответ: а) хватит; б) хватит.

▷ **Задача 2.** Найдите по крайней мере два решения (две четвёрки натуральных чисел, каждое из которых больше, чем $2g + 3\sqrt{g}$, где g – гугол ($g = 10^{100}$)) следующего уравнения:
$$x^2 + y^3 + z^5 = t^7.$$

Решение: *Первый способ.* Идея заключается в том, чтобы подобрать *какое-то* решение уравнения, после чего умножить равенство на достаточно большое число с тем, чтобы новые решения оказались больше заданного в условии значения.

Пусть $t = 2, x = 10$, тогда $100 + y^3 + z^5 = 128 \Rightarrow y^3 + z^5 = 28$. Нам подойдут значения $y = 3, z = 1,$ т.к. $3^3 + 1^5 = 28$.

Теперь домножим обе части исходного равенства
$$10^2 + 3^3 + 1^5 = 2^7$$
на $k^{2\cdot3\cdot5\cdot7} = k^{210}$. Тогда
$$10^2 \cdot k^{2\cdot105} + 3^3 \cdot k^{3\cdot70} + 1^5 \cdot k^{5\cdot42} = 2^2 \cdot k^{7\cdot30},$$
т.е. числа $x = 10k^{105}, y = 3k^{70}, z = k^{42}, t = 2k^{30}$ также являются решениями исходного уравнения.

Нам необходимо, чтобы все они были больше, чем $2g+3\sqrt{g}=2\cdot 10^{100}+3\cdot 10^{50}$, но поскольку множество натуральных чисел бесконечно, можно для удобства усилить оценку и взять, например, число 10^{101}. Достаточно оценить самое маленькое из наших чисел, так что необходимо выполнение условия:

$$2k^{30}>10^{101}.$$

Нам подойдут, например, $k=10^4, k=10^5$.

Ответ: $(10^{421};3\cdot 10^{280};10^{168};2\cdot 10^{120});(10^{526};3\cdot 10^{350};10^{210};2\cdot 10^{150})$.

Второй способ. Заметим, что

$$3^a+3^a+3^a=3^{a+1}.$$

Будем подбирать такую степень тройки, что

$$\begin{cases} x^2=3^a \\ y^3=3^a \\ z^5=3^a \\ t^7=3^{a+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3^{\frac{a}{2}} \\ y=3^{\frac{a}{3}} \\ z=3^{\frac{a}{5}} \\ t=3^{\frac{a+1}{7}} \end{cases}.$$

Получаем, что a должно делиться на 2, 3 и 5, т.е. $a=30k$, и $a+1$ делится на 7, т.е. $a+1=7n$.

$$30k=7n-1 \Rightarrow n=4k+\frac{2k+1}{7};$$

$$2k+1=7m \Rightarrow k=3m+\frac{m-1}{2} \Rightarrow m=2p+1.$$

Окончательно получаем

$$k=7p+3, a=210p+90.$$

Теперь осталось найти такие a, при которых $3^{\frac{a+1}{7}}=3^{30p+13}>10^{101}$. Нам подойдут, например $a=1560$ $(p=7)$ и $a=1770$ $(p=8)$.

Ответ: $(3^{780};3^{520};3^{312};3^{223});(3^{885};3^{590};3^{354};3^{253})$.

Примечание: Термин «гугол» не имеет серьёзного теоретического и практического значения. Американский математик Эдвард Казнер, предложивший его, хотел проиллюстрировать разницу между невообразимо большим числом и бесконечностью, и с этой целью термин иногда используется при обучении математике.

Гугол больше, чем количество атомов в известной нам части Вселенной, которых, по разным оценкам, насчитывается от 10^{79} до 10^{81}.

Название компании *Google* является искажённым написанием слова «гугол» (англ. googol).

▷ **Задача 3.** Определить все тройки действительных чисел (x, y, z), которые удовлетворяют **системе уравнений** : $2x + x^2 y = y$, $2y + y^2 z = z$, $2z + z^2 x = x$.

Решение: Преобразуем систему к следующему виду:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1 - y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1 - z^2} \end{cases}.$$

Пусть $x = tg\alpha$, тогда по формуле тангенса двойного угла $y = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = tg2\alpha$; аналогично $z = tg4\alpha$ и $x = tg8\alpha$.

$$\begin{cases} y = \operatorname{tg} 2\alpha \\ z = \operatorname{tg} 4\alpha \\ x = \operatorname{tg} 8\alpha \end{cases}.$$

Получаем

$$\operatorname{tg} 8\alpha = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \frac{\sin 8\alpha}{\cos 8\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 8\alpha \cdot \cos\alpha - \cos 8\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos 8\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin 7\alpha}{\cos 8\alpha \cdot \cos\alpha} = 0;$$

$$\sin 7\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}.$$

В силу периодичности тангенса найдется не более семи различных решений исходной системы. Определим их, введя для удобства обозначения

$$a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{7},$$

$$b=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7},$$

$$c=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$$

(здесь $a,b,c>0,$ поскольку все три угла лежат в первой четверти).

$$n=0\Rightarrow x=\operatorname{tg}0, y=\operatorname{tg}0, z=\operatorname{tg}0\Rightarrow(0;0;0);$$

$$n=1\Rightarrow x=\underset{a}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}}, y=\underset{b}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}, z=\underset{-c}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}},\Rightarrow(a;b;-c);$$

$$n=2\Rightarrow x=\underset{b}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}}, y=\underset{-c}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}}, z=\underset{a}{\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}},\Rightarrow(b;-c;a)\ ;$$

$$n=3\Rightarrow x=\underset{c}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}}, y=\underset{-a}{\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}}, z=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{12\pi}{7}}_{-b},\Rightarrow(c;-a;-b);$$

$$n=4\Rightarrow x=\underset{-c}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}}, y=\underset{a}{\operatorname{tg}\frac{8\pi}{7}}, z=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{16\pi}{7}}_{b},\Rightarrow(-c;a;b);$$

$$n=5\Rightarrow x=\underset{-b}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{7}}, y=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{10\pi}{7}}_{c}, z=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{20\pi}{7}}_{-a},\Rightarrow(-b;c;-a);$$

$$n=6\Rightarrow x=\underset{-a}{\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}}, y=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{12\pi}{7}}_{-b}, z=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{24\pi}{7}}_{c},\Rightarrow(-a;-b;c);$$

$$n=7\Rightarrow x=\underset{0}{\operatorname{tg}\frac{7\pi}{7}}, y=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{14\pi}{7}}_{0}, z=\underbrace{\operatorname{tg}\frac{28\pi}{7}}_{0},\Rightarrow(0;0;0).$$

Ответ: $(0;0;0)$, $(\mathrm{tg}\frac{\pi}{7};\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7})$, $(\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7};\mathrm{tg}\frac{\pi}{7})$, $(\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7};-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7};-\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7})$, $(-\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7};\mathrm{tg}\frac{\pi}{7};\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7})$, $(-\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7};-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7})$, $(-\mathrm{tg}\frac{\pi}{7};-\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7};\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7})$.

▷ **Задача 4.** Робот все числа из множества натуральных чисел $\{111,112,113,...,997,998,999\}$ случайным образом записывает в виде многозначного числа. Какова вероятность того, что записанное число делится на 37?

Решение: Пусть данные трёхзначные числа (их всего 899) занумерованы в том порядке, в котором они стоят в полученном многозначном числе. Тогда его можно представить в виде

$$a_{889}+a_{888}\cdot 10^{3}+a_{887}\cdot 10^{6}+\cdots+a_{3}\cdot 10^{2658}+a_{2}\cdot 10^{2661}+a_{1}\cdot 10^{2664}=$$

$$=(a_1+a_2+\ldots+a_{889})+a_1(10^{2664}-1)+a_2(10^{2661}-1)+\cdots+a_{887}(10^{6}-1)+a_{888}(10^{3}-1).$$

Но

$$a_1+a_2+\ldots+a_{889}=111+112+\ldots+999=\frac{111+999}{2}\cdot 889$$

делится на 37, так как 111 и 999 делятся на 37. Кроме того, при любом k число $10^{3k}-1$ делится на $10^{3}-1=999$, т.е. также делится на 37.

Ответ: Вероятность равна 1.

▷ **Задача 5.** На плоскости даны 22 каким-то образом расположенные различные прямые. Пусть t – число всех точек пересечения этих прямых, b – число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, а p – число частей, на которые плоскость делится данными прямыми. Пусть $A=t-b+p$. Какое наибольшее значение может принимать выражение A?

Решение: Докажем по индукции, что для любого расположения прямых на плоскости имеет место равенство

$$t-b+p=1. \qquad (1)$$

База индукции. Если на плоскости проведена одна прямая, то $t=0, b=1, p=2$ и равенство (1) истинно.

Шаг индукции. Допустим, равенство (1) верно для n произвольно расположенных на плоскости прямых.

Проведем на плоскости $n+1$ прямую и выделим из этих прямых любые n; обозначим выделенные прямые $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Пусть $(n+1)$-я прямая, которую мы означим через L_{n+1}, имеет k общих точек с выделенной совокупностью $L_1, L_2, \ldots, L_n$, и при этом m из них совпадают с уже имеющимися точками пересечения этой совокупности ($0 \le m \le k$).

Для $L_1, L_2, ..., L_n$ имеет место равенство (1). После добавления к этой совокупности прямой L_{n+1} число точек пересечения всех $n+1$ прямых будет равно

$$t_1 = t + (k - m).$$

Число частей, на которые прямые делятся точками их пересечения, будет равно

$$b_1 = b + k + 1 + (k - m) = b + 2k - m + 1.$$

Т.к. прямая L_{n+1} делится на $k+1$ части и на тех прямых, где появились новые точки пересечения, появляется, соответственно, по одной новой части.

Число частей, на которые плоскость делится всеми прямыми, будет равно

$$p_1 = p + k + 1,$$

т.к. каждая из $k+1$ частей прямой L_{n+1} разбивает одну из уже имеющихся после проведения первых n прямых частей плоскости на две новые части.

Имеем:

$$t_1 - b_1 + p_1 = t + k - m - (b + 2k - m + 1) + p + k + 1 = t - b + p = 1,$$

т.е. равенство (1) выполняется для $n+1$ прямой, что и требовалось доказать.

Ответ: А = 1.

Примечание: Сходство полученной формулы с формулой Эйлера для графов (В – Р + Г = 2, где В – количество вершин, Р – количество рёбер, а Г – количество граней) не случайно: если представить, что все прямые на плоскости пересекаются в бесконечно удалённой точке и добавить её к уже имеющимся точкам пересечения, получится именно она.

▷ **Задача 6.** Пусть $\left[x\right]$ – целая часть *x*. Найдите наименьшее натуральное n, при котором число натуральных решений уравнения $\left[\frac{x}{n+1}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$ будет больше $l=2\underbrace{00\cdots0}_{49}3\underbrace{00\cdots0}_{50}$.

Решение: Очевидно, что $\frac{x}{n+1}<\frac{x}{n}\quad\forall x>0$. Чтобы выполнялось равенство $\left[\frac{x}{n+1}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$, необходимо, чтобы обе дроби принадлежали одному полуинтервалу $\left[k;k+1\right)$:

$$k\le\frac{x}{n+1}<\frac{x}{n}<k+1.$$

Получаем следующую оценку для значений *x*:

$$kn+k\le x<kn+n,$$

откуда следует, во-первых, что $k<n,$ и во-вторых, что количество натуральных решений этого неравенства равно $n-k$. Исключение составляет случай $k=0$, при котором левая часть неравенства также будет строгой и количество решений будет равно $n-1,$ а не *n*.

Найдем общее количество решений исходного уравнения:

$$N=1+2+3+...+(n-2)+(n-1)+n-1=\frac{(1+n)n}{2}-1=\frac{n^2+n-2}{2}.$$

Из условия задачи следует, что

$$\frac{n^2+n-2}{2}>2\underbrace{00\cdots0}_{49}3\underbrace{00\cdots0}_{50}=2\cdot10^{100}+3\cdot10^{50}.$$

$$n^2+n-2>4\cdot10^{100}+6\cdot10^{50};$$

$$n^2+n-4\cdot10^{100}-6\cdot10^{50}-2>0;$$

$$D=1+16\cdot10^{100}+24\cdot10^{50}+8=(4\cdot10^{50}+3)^2.$$

Решая неравенство с учётом того, что $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$n > \frac{-1 + 4 \cdot 10^{50} + 3}{2} = 2 \cdot 10^{50} + 1 = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}1.$$

Ответ: $n = 2\underbrace{00\cdots0}_{49}2.$

▷ **Задача 7.** При каком наименьшем натуральном m число непрерывных на отрезке $[0; \pi m]$ решений $y(x)$ уравнения $2y^2 + \sin 2x = 2\sqrt{2} y \cos(x - \frac{\pi}{4})$ будет больше 2022?

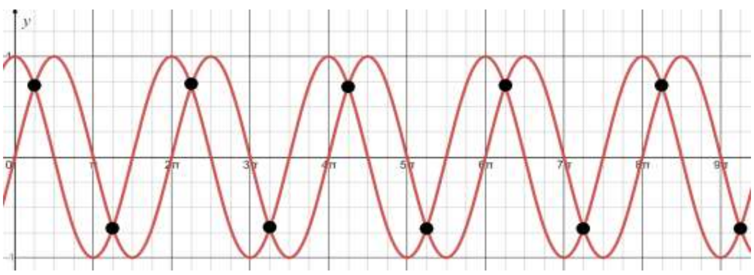
Решение: Преобразуем уравнение:

$$2y^2 - 2\sqrt{2} y (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x) + 2\sin x \cos x = 0$$

$$y^2 - y(\cos x + \sin x) + \sin x \cos x = 0,$$

откуда по теореме Виета получаем $y = \sin x,\; y = \cos x$.

Заметим, что это – не единственные решения нашего уравнения. На самом деле, любая кусочно-аналитическая функция, принимающая на некоторой части вещественной прямой значения $\sin x$, а в остальных точках – $\cos x$, также будет ему удовлетворять. Если добавить условие непрерывности, то «смена» значений может происходить только в точках пересечения этих двух функций:



Для подсчёта количества непрерывных решений уравнения разобьём отрезок $[0; \pi m]$ на части точками $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\; k = 0, 1, \ldots, m-1.$

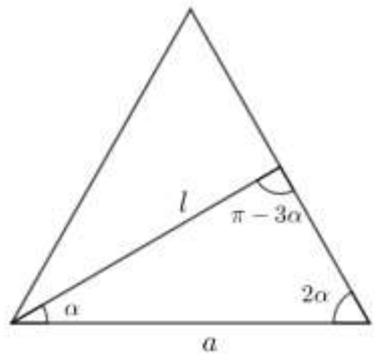
Любая подходящая нам функция на каждом из полученных m отрезков может быть равна $\sin x$ или $\cos x$, а значит, всего существует 2^m таких функций.

По условию $2^m > 2022$, т.е. наименьшее натуральное $m = 11$.

Ответ: 11.

▷ **Задача 8.** Пусть M – множество различных значений дроби $\frac{2022a}{l}$, где a – длина основания равнобедренного треугольника, а l – длина биссектрисы, проведённой к боковой стороне. Сколько элементов содержит пересечение $M \cap \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел?

Решение: Рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием a; обозначим угол при основании через 2α:



По теореме синусов

$$\frac{l}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin(\pi - 3\alpha)}.$$

$$\frac{a}{l} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \cos\alpha + \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\cos\alpha} = 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

Оценим, в каких пределах лежат значения этого выражения:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\alpha < 1;$$

$$\sqrt{2} < 2\cos\alpha < 2, -\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{1}{2\cos\alpha} < -\frac{1}{2};$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < 2\cos\alpha - \frac{1}{2\cos\alpha} < \frac{3}{2}.$$

Домножим все части полученного неравенства на 2022:

$$1011\sqrt{2} < 2022\frac{a}{l} < 3033,$$

т.е. множество M представляет собой интервал $\left(1001\sqrt{2}; 3033\right)$.

В задаче требуется найти количество натуральных чисел, принадлежащих этому множеству. Поскольку $1429 < 1011\sqrt{2} < 1430$, получаем

$$M \cap \mathbb{N} = \{1430, 1431, \ldots, 3032\},$$

и количество элементов этого пересечения равно $3032 - 1430 + 1 = 1603$.

Ответ: 1603.

▷ **Задача 9.** Бесконечная десятичная дробь с целой частью, равной 0, строится следующим образом: первые две цифры – *a* и *b*, а каждая следующая цифра является последней цифрой суммы двух предыдущих. Робот случайным образом выбирает пару цифр *(a, b)*. Какова вероятность встречи в записи этой дроби комбинации а) 2021; б) 2022?

Решение: Проанализируем процесс построения этой дроби. Допустим, в какой-то момент две последовательные цифры в ней оказались равны 2 и 0. Тогда все последующие, являясь последними цифрами суммы предыдущих, также обязательно будут чётными, из чего следует, что число 2021 никогда не встретится. Таким образом, вероятность в пункте а) равна нулю. С другой стороны, если 2 и 0 действительно встретились рядом, то следующие цифры будут равны 2, 2 и никаких противоречий не возникает.

Определим, для каких исходных значений *a* и *b* возможно появление последовательных цифр 2 и 0. Заметим, что по любым двум последовательным цифрам дроби предыдущая цифра восстанавливается однозначно (на самом деле, если часть дроби имеет вид $\overline{\ldots xcd \ldots}$, то либо $x + c = d$, либо $x + c = 10 + d$, причем одновременно эти равенства выполняться не могут, поскольку $0 \le x \le 9$.) Итак, начав с цифр 2 и 0, будем определять предыдущие до тех пор, пока не вернёмся к исходным цифрам (а это обязательно произойдет в силу конечности набора цифровых комбинаций). В итоге получим следующий повторяющийся «кусок»: ...202246066280886404482022... Если *a* и *b* равны любым двум последовательным цифрам этого ряда, то в записи дроби встретится число 2022; для других комбинаций цифр появление 2022 невозможно.

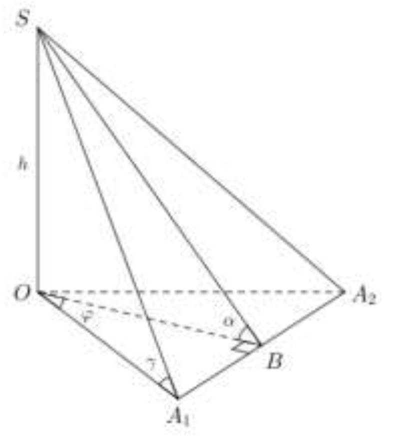
Таким образом, для определения вероятности этого события требуется количество «благоприятных» наборов (20, 02, 22, 24, 46, 60, 06, 66, 62, 28, 80, 08, 88, 86, 64, 40, 04, 44, 48, 82) разделить на все возможные комбинации из двух цифр, т.е.

$$\mathrm{P} = \frac{20}{100} = 0,2.$$

Ответ: а) 0; б) 0,2.

▷ **Задача 10.** В правильной 2022-угольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен γ. Какое наибольшее значение может принимать разность: $\cos 2\gamma - \cos 2\alpha$?

Решение: Обозначим исходную пирамиду $SA_1A_2\ldots A_{2022}$ и рассмотрим треугольную пирамиду SOA_1A_2, в которой SO – высота исходной пирамиды. Если B – середина стороны A_1A_2, то $\angle SBO = \alpha, \angle SA_1O = \gamma.$ Поскольку речь идёт о соотношении углов, мы можем без ограничения общности считать, что $OA_1 = 1.$ Обозначим для



удобства $SO = h, \angle A_1OB = \dfrac{\pi}{2022} = \varphi$, тогда $A_1B = \sin\varphi, OB = \cos\varphi.$

Выражение, значение которого необходимо оценить, представим в виде:

$$\cos 2\gamma - \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\gamma - 1 + 2\sin^2\alpha = 2(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma).$$

Из треугольника SOB:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{SO}{OB} = \frac{h}{\cos\varphi} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{h^2}{h^2 + \cos^2\varphi}.$$

Аналогично, из треугольника SOA_1:

$$\sin^2\gamma = \frac{h^2}{h^2+1}.$$

Тогда

$$\sin^2\alpha - \sin^2\gamma = \frac{h^2}{h^2+\cos^2\varphi} - \frac{h^2}{h^2+1} = \frac{h^2\sin^2\varphi}{(h^2+\cos^2\varphi)(h^2+1)}.$$

Введём функцию $f(t), t = h^2,$ и исследуем её на экстремум:

$$f(t) = \frac{t\sin^2\varphi}{(t+\cos^2\varphi)(t+1)},$$

$$f'(t) = \frac{\sin^2\varphi\left(t^2+(1+\cos^2\varphi)t+\cos^2\varphi\right) - t\sin^2\varphi\left(2t+1+\cos^2\varphi\right)}{(t+\cos^2\varphi)^2(t+1)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\left(\cos^2\varphi - t^2\right)}{(t+\cos^2\varphi)^2(t+1)^2} = 0.$$

Поскольку $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ – известные нам константы, это уравнение нетрудно решить относительно t и определить, что в точке $t = \cos\varphi$ функция достигает максимума. Найдём его:

$$f(\cos\varphi) = \frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+\cos^2\varphi)(\cos\varphi+1)} = \frac{\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+1)^2} = \frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{(2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1+1)^2} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Возвращаясь к исходному выражению, получаем:

$$\max(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4044};$$

$$\max(\cos 2\gamma - \cos 2\alpha) = 2\max(\sin^2\alpha - \sin^2\gamma) = 2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4044}.$$

Ответ: $2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4044}$.

Критерии определения призеров отборочного тура олимпиады по математике

Каждое верно решенное задание отборочного тура оценивалось в 1 балл. Прошли в заключительный тур олимпиады участники, набравшие:

4-5 класс 4 и более балла;

6 класс 4 и более балла;

7 класс 3 и более балла;

8 класс 5 и более баллов;

9 класс 3 и более балла;

10 класс 3 и более балла;

11 класс 3 и более балла.

Победителями отборочного тура считаются участники, набравшие 8 и более баллов.

Статистика отборочного тура олимпиады по математике

В олимпиаде по математике приняли участие 4880 школьников из 10 стран ближнего зарубежья и 66 регионов РФ, по информатике – 962 школьника из 59 регионов РФ и шести стран. Заключительный тур прошел на 33 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике.

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	794	186	37
6	918	264	30
7	704	227	20
8	734	239	51
9	648	148	6
10	628	98	5
11	454	95	6
Итого	4880	1262	158

Призеры отборочного тура получили сертификаты призера и прошли в заключительный тур.

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады

Максимальная оценка за каждую из задач заключительного тура – 10 баллов. Призовые места определялись в соответствии со следующими критериями:

Класс	Баллы, 1 место	Баллы, 2 место	Баллы, 3 место
5 класс и младше	75	62	51
6 класс	75	95	54
7 класс	61	20	43
8 класс	89	31	8
9 класс	50	51	35
10 класс	50	40	24
11 класс	50	35	24

Статистика заключительного тура

В финале олимпиады приняли участие 790 школьников, из них 49 – иностранцы, остальные проживают в 45 различных регионах России.

Количество участников, призеров и победителей заключительного тура представлено в таблице:

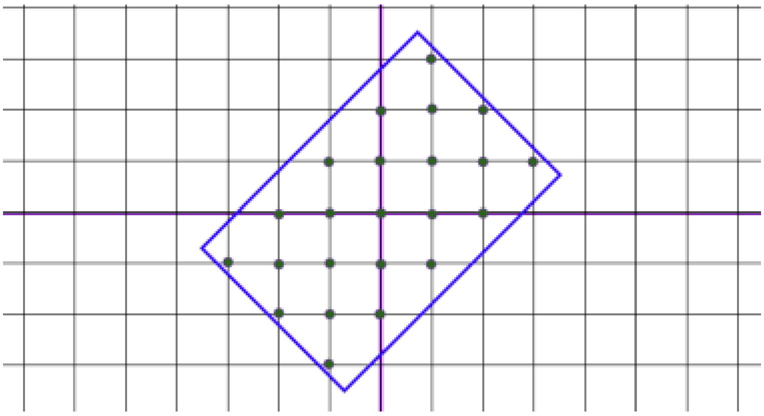
Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	174	20	9
6 класс	143	30	13
7 класс	153	26	11
8 класс	89	31	8
9 класс	54	15	7
10 класс	57	7	1
11 класс	790	4	0

Олимпиада по информатике

Задания отборочного тура олимпиады с решениями

Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике проводился с применением системы автоматического тестирования решений учащихся на наборах тестовых данных. Каждая из шести задач максимально оценивалась в 100 баллов, в соответствии с количеством успешно пройденных тестов. Задания были рассчитаны на учащихся 8-11 классов, все учащиеся решали один вариант. На решение отводилось 5 часов как для отборочного, так и для заключительного тура.

▷ **Задача 1.** Посчитай точки



Маша и Алиса учатся программировать. Алиса сообщила, что научилась рисовать прямоугольник с центром в начале координат, повернутый на любой угол. Маша сказала, что это очень интересно, но сможет ли Алиса посчитать точки с целочисленными координатами, которые попадают внутрь прямоугольника, повернутого на 45 градусов, включая те, что находятся на его границе?

Помогите Алисе решить задачу.

Входные данные

Стороны прямоугольника - целые числа, меньшие или равные 10^9.

Выходные данные:

Количество точек, содержащихся внутри прямоугольника.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
10001	100012225
10001	
111	2433
22	
342	725
2	
555	43567
78	
5	17
4	
1	1
1	

Решение задачи на языке Python

```
import math
def rectangle_rotation(a, b):
    a //= 2**0.5
    b //= 2**0.5
    r = (a + 1) * (b + 1) + a * b

    return r + r % 2 - 1

def main():
    a =  int(input())
    b = int(input())
    print(math.ceil(rectangle_rotation(a,b)))

main()
```

▹ **Задача 2.** Найди кота

Общеизвестный факт, что коты любят и умеют прятаться. В этот раз кот спрятался среди других букв. И не один, а с товарищами.

Мы знаем об этих котах следующее:

- Кот может находиться по вертикали, по горизонтали, быть написанным снизу вверх, сверху вниз, слева направо и справа налево.
- Кот может и изгибаться.
- Кот не может быть написан по диагонали.
- Одна и та же буква не может принадлежать двум котам одновременно.

Ваша задача - найти всех котов, потому что эти ребята явно что-то задумали!

Входные данные

m, n - количество строк и столбцов массива символов,

массив символов.

Выходные данные:

количество слов «кот» во входных данных или «нет котиков», если котов не нашлось.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
4 3	
кот	4
кот	
кот	
кот	
8 10	2
**********	
**********	
к***	
кот***	
т***	
**********	
ко****	
т***	
3 3	нет котиков
bar	
mal	
ey.	
5 20	7
3qsqnwIEекотVjкотLJ5	
KуккотXRBNy5rkC7rrEU	
NAocKgкот3qqQW5гкеTu	
oTтgCuzRhHH2L81ooySX	
8DaaaLqLnLeDток2теiO	

Решение задачи на языке Python

```
def check_word(s,i,j,word):

    siblings = [[0,1],[0,-1],[1,0],[-1,0]]

    if s[i][j]==word[0]:
        if len(word)>1:
            for sib in siblings:
                used = check_word(s,i+sib[0],j+sib[1],word[1:])
                if(used):
                    used.append([i,j])
                    return used

        else :
            used = [[i,j]]
            return used
    return 0


n, m = map(int, input().split())
s = []
word = ['к','о','т']
count = 0

for i in range(n):
    s.append(list(input()))

for i in range(n):
    for j in range(m):
        used = check_word(s,i,j,word)
        if(used):
            count = count + 1
            for coord in used:
                s[coord[0]][coord[1]] = '*'

if(count>0):
    print(count)
else:
    print('нет котиков')
```

▷ **Задача 3.** Неиспорченный телефон

Ученики одной математической гимназии любят играть в неиспорченный телефон. Но когда эта забава набрала популярность и участников стало больше 30, чемпион школы по этой игре решил написать программу, которая поможет ему в вычислениях. Игра состоит в следующем:

- Первый участник загадывает натуральное число, сообщает его второму.
- Второй участник также загадывает натуральное число.
- Третий игрок складывает первое и второе числа.
- Каждый последующий игрок знает только два предыдущих числа, складывает их и передает следующему. Т.к. гимназия математическая, никто не допускает вычислительных или других ошибок.
- Когда участники заканчиваются, последний, n-й школьник сообщает свое число первому игроку.
- Первый игрок, зная только свое и последнее полученное число, должен посчитать за время меньше одной секунды, какое число загадал второй.

Входные данные

$3 \leq$ количество участников ≤ 30000,

первое число,

последнее число.

Выходные данные:

второе число.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

<table>
<tr><td>Входные данные</td><td>Результат работы программы</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">111</td></tr>
<tr><td>111</td></tr>
<tr><td>333</td></tr>
<tr><td>11</td><td rowspan="3">3</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>199</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="3">6</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>15</td></tr>
<tr><td>10</td><td rowspan="3">12</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td>618</td></tr>
<tr><td>22</td><td rowspan="3">22</td></tr>
<tr><td>1234</td></tr>
<tr><td>8588822</td></tr>
<tr><td>1000</td><td rowspan="3">22</td></tr>
<tr><td>1234</td></tr>
<tr><td>2107879443600456566562980978200290
8391613460583824590780433164387375
1155650486974252802837014239727231
1067311819344878346128102854071905
9086471974770079859473452962694307
13484349692443862075724752574078124878503 8</td></tr>
</table>

Решение задачи на языке Python

```
#Приводим решение задачи, работающее за время $O(log N)$
#Бинарное возведение в степень
def faster_pow(m,n):

    if n==0:
        return [[1,0],[0,1]]
    else:
        if n % 2 == 0:
            t = faster_pow(m,n//2)
            return umn(t,t)
        else:
            t = faster_pow(m,n-1)
            return umn(t,m)

#умножение проще, потому что матрица симметрическая
def umn(mat1,mat2):
    a = mat1[0][0]*mat2[0][0]+mat1[1][0]*mat2[0][1]
    b = mat1[0][0]*mat2[1][0]+mat1[1][0]*mat2[1][1]
    c = mat1[1][0]*mat2[1][0]+mat1[1][1]*mat2[1][1]
    return [[a,b],[b,c]]

k  = int(input())
x = int(input())
n_k = int(input())

#матрица, позволяющая найти предыдущие числа,
#зная следующие(см алгоритм нахождения чисел Фибоначчи(Дональд Кнут.
#Искусство программирования, том 1 [ с. 112])
mat = [[-1,1],[1,0]]
mat = faster_pow(mat,k-2)
a = mat[0][0]
b = mat[1][0]
c = mat[1][1]

#Вычисляем второе число с помощью найденных коэффициентов
y = (b*x - b*b*n_k)//a + c*n_k

print(int(y))
main()
```

▹ **Задача 4.** Треугольник мира

Три племени (Десятичное, Двоичное и Восьмеричное), живущие вдали от цивилизации, решили заключить союз и установить в знак этого статую: треугольник мира.

Но возникла проблема: они настолько друг от друга отличаются, что используют разные системы счисления, в результате, никак не могут выяснить, а получится ли вообще треугольник из бревен, что они приготовили (каждое племя приготовило по одному бревну).

Снова назревает конфликт, а вождь Десятичного племени даже обещает должность верховного шамана тому, кто решит эту сложную задачу.

Входные данные

a – целое положительное число в двоичной системе счисления,

b – целое положительное число в восьмеричной системе счисления,

c – целое положительное число в десятичной системе счисления.

Выходные данные:

«да будет мир» – если из исходных материалов можно сложить треугольник,

«для мира требуется еще потрудиться» – если нельзя.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
11011111	для мира требуется еще потрудиться
56237	
5434	
10	да будет мир
3	
4	
1	для мира требуется еще потрудиться
2	
3	
110111	да будет мир
112	
25	
10110	да будет мир
57	
57	
101101	да будет мир
75	
57	

Решение задачи на языке Python

```
a, b, c = int(input(), 2), int(input(), 8), int(input())
if a + b > c and a + c > b and b + c > a:
    print('да будет мир')
else:
    print('для мира требуется еще потрудиться')
```

▷ **Задача 5.** Поиск фальшивой монеты

Когда-то, в давние времена, когда весы еще не имели цифрового табло и могли показывать только, совпадает ли масса того, что лежит на левой чаше, с тем, что лежит на правой, король Златоландии, Вильгельм Мудрый XIV, искал себе главного казначея. Специалист по подбору персонала королевства конечно же проверял всех откликнувшихся на вакансию на детекторе лжи, давал им психологические тесты, спрашивал, кем они себя видят через пять лет и консультировался с астрологом, но главным тестом при приеме на работу было решение задачи на поиск фальшивой монеты.

Задание:

Доподлинно известно, что среди N монет казны находится одна фальшивая и она весит меньше, чем остальные. За какое минимальное количество взвешиваний можно гарантированно найти фальшивку?

Входные данные:

число монет.

Выходные данные:

количество взвешиваний, необходимое для поиска фальшивки.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
7777	9
1234	7
2	1
4	2
8	2
59049	10

Решение задачи на языке Python

```
import math
def how_many_measurements(n):

    print( math.ceil(math.log(n,3)))

n = int(input())
how_many_measurements(n)
```

▷ **Задача 6.** Оптимальный путь

Разведчик ушел вперед группы, чтобы узнать путь до города. В пути он записывал все свои перемещения с помощью символов "^", "v", "<", ">", которые соответственно означали север, юг, запад и восток. Так как местность для него новая, он иногда плутал, возвращался, ходил кругами.

Теперь нужно упростить этот путь, чтобы по новому маршруту смогла пройти вся группа.

Входные данные:

строка, содержащая путь разведчика.

Выходные данные:

короткий путь.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат
работы программы	
^	^
^v<>	
>><<>>^^^v	>>^^
<^^v<v>^v^>^<^><<><v>><^vv><^v< v^^^<>>^vv>v^v^^vv<^vv<^>v<v^>v> <<>v^><^v^<^^^v<><>><^<vv<<^>>><^ >v>>^v>^^>>vv^>>^><>v^^>^>v^v>v<< v<^^^<<<^<>^^>><><vv^>^<v<>v^>^>^ <><vv^><^v^v^^<>v><>v>>^<<vv<>>	^^^^^^^^>>>>>>>
>v^>^^>v<v>v><>>	>>>>>v
>>>>>>	>>>>>>

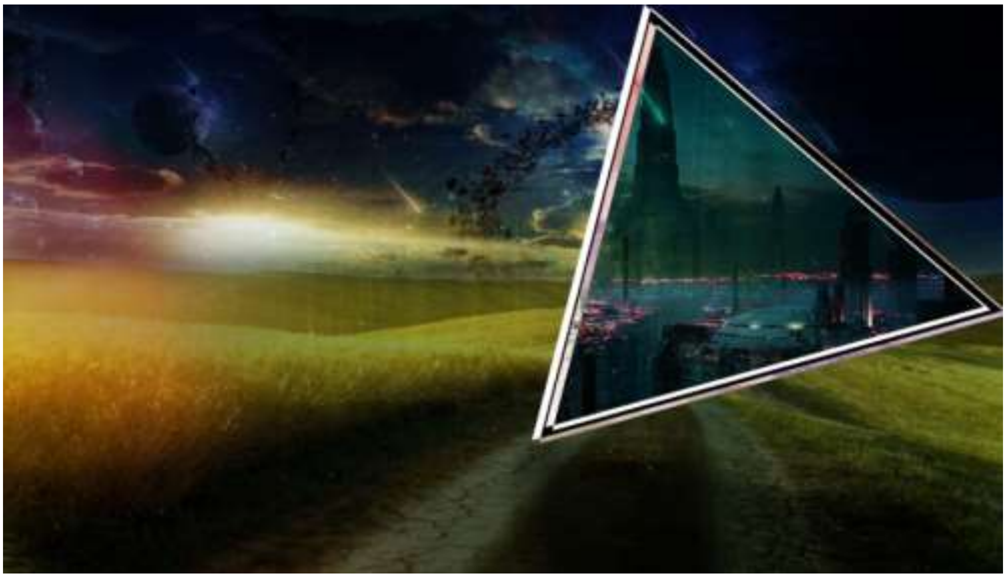
Решение задачи на языке Python

```
def solve_path(line):
    dx = 0
    dy = 0
    first_x = 0
    first_y = 0
    res = ''
```

```
    for s in line:
        if s=='>':
            dx = dx + 1
        if s=='<':
            dx = dx - 1
        if s=='^':
            dy = dy + 1
        if s == 'v':
            dy = dy - 1

    if dx>0:
        path_x = '>'*dx
        start_x = line.find('>')
    else:
        path_x = '<'*(-dx)
        start_x = line.find('<')

    if dy>0:
        path_y = '^'*dy
        start_y = line.find('^')
    else:
        path_y = 'v'*(-dy)
        start_y = line.find('v')

    if start_x<start_y:
        print(path_x+path_y)
    else:
        print(path_y+path_x)


line = input()

solve_path(line)
```

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

▹ **Задача 1.** Активация портала



Космический корабль движется в направлении портала, отправляющего корабль на землю. Портал имеет форму тетраэдра. Автоматическая система должна активировать портал, как только корабль оказывается внутри (включая границу). Известны текущие координаты корабля и координаты вершин тетраэдра. Напишите программу, возвращающую «Активировать», если корабль внутри портала, и «Еще не долетели», если нет.

Входные данные:

строки 1-4 – координаты вершин тетраэдра, разделенные пробелом, целые числа,

строка 5 – координаты корабля.

Выходные данные:

“активировать”, если корабль внутри портала, и “Еще не долетели”, если нет

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
2 1 3 5 1 3 2 1 6 2 4 3 2 2 4	Активировать
-2 -7 -3 -2 -4 -3 -5 -4 -3 -2 -4 -6 -2 -5 -2	Еще не долетели
6 4 4 3 1 1 4 4 2 7 6 4 4 2 2 2	Активировать

Решение задачи на языке Python

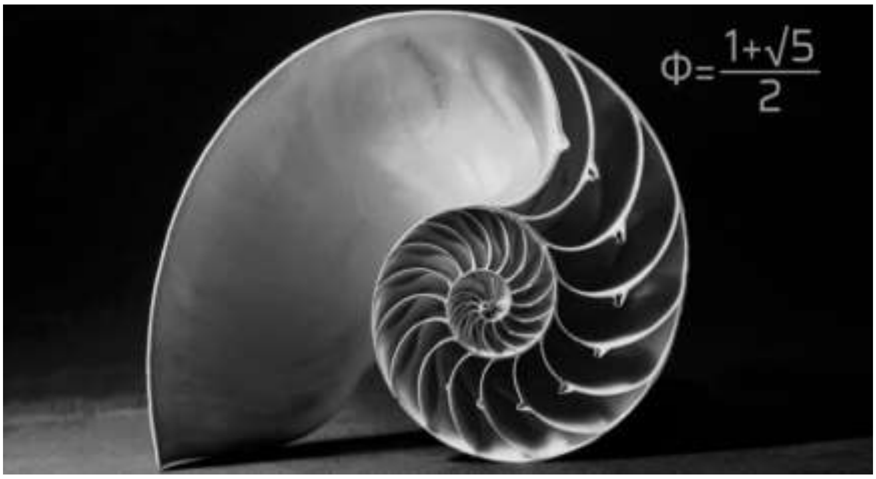
Основная идея состоит в том, что если точка лежит внутри тетраэдра, то она находится по ту же сторону от плоскостей, в которых лежат грани пирамиды, что и противолежащие этим сторонам вершины.

Чтобы решить задачу, мы составляем уравнение плоскости по трем вершинам, подставляем в уравнение координаты точки, в которой находится корабль, и четвертой вершины. Если знаки для обеих точек одинаковы, значит они лежат по одну сторону от плоскости.

Если это условие выполняется для всех четырех граней, значит, точка находится внутри пирамиды.

```
# Подстановка точки в уравнение плоскости(вычисляем определитель)
def checkdot(plane,dot):
    res =\
    (dot[0] - plane[0][0])*(plane[1][1] - plane[0][1])*\
    (plane[2][2] - plane[0][2])+\
    (dot[1] - plane[0][1])*(plane[1][2] - plane[0][2])*\
    (plane[2][0] - plane[0][0])+\
    (dot[2] - plane[0][2])*(plane[1][0] - plane[0][0])*\
    (plane[2][1] - plane[0][1])-\
    (dot[2] - plane[0][2])*(plane[1][1] - plane[0][1])*\
    (plane[2][0] - plane[0][0])-\
    (dot[1] - plane[0][1])*(plane[1][0] - plane[0][0])*\
    (plane[2][2] - plane[0][2])-\
    (dot[0] - plane[0][0])*(plane[2][1] - plane[0][1])*\
    (plane[1][2] - plane[0][2])
    return res

c1 = list(map(int, input().split()))
c2 = list(map(int, input().split()))
c3 = list(map(int, input().split()))
c4 = list(map(int, input().split()))

d = list(map(int, input().split()))

result = 1

plane = [c4,c2,c3]
if checkdot(plane, d)*checkdot(plane,c1)<0:
    result = 0

plane = [c1,c2,c3]
if checkdot(plane, d)*checkdot(plane,c4)<0:
    result = 0

plane = [c1,c3,c4]
if checkdot(plane, d)*checkdot(plane,c2)<0:
    result = 0

plane = [c1,c2,c4]
if checkdot(plane, d)*checkdot(plane,c3)<0:
    result = 0

if result:
    print('Активировать')
else:
    print('Еще не долетели')
```

▷ **Задача 2.** Компьютер Фибоначчи



Фибоначчиева система счисления (ФСС) – смешанная система счисления для целых чисел на основе чисел Фибоначчи $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$ и т.д. Т.е. число в ФСС имеет вид последовательности нулей и единиц, аналогично двоичной системе счисления, но в качестве весов разряда вместо степеней двойки используются числа Фибоначчи. Эта запись не может иметь двух подряд идущих единиц.

Число	Запись в ФСС
0	0……0
$F_2=1$	1
$F_3=2$	10
$F_4=3$	100
4	101
$F_5=5$	1000
6	1001
7	1010
$F_6=8$	10000

Любое целое положительное число может быть записано в ФСС, что следует из теоремы:

Теорема Цекендорфа. Любое неотрицательное целое число единственным образом представимо в виде суммы некоторого набора попарно различных чисел Фибоначчи с индексами, большими единицы, не содержащего пар соседних чисел Фибоначчи.

Сложение чисел в позиционных системах счисления выполняется с использованием переноса, позволяющего устранять последствия переполнения разряда. Например, в двоичной системе: 01 + 01 = 02 = 10.

В фибоначчиевой системе счисления дело обстоит сложнее:

– во-первых, вес старших разрядов не является кратным весу разряда, из которого требуется перенос;
– во-вторых, требуется избавляться от соседних единиц.

Для сложения чисел в ФСС будет полезным помнить, что

$F_k + F_k = F_k + F_{k-1} + F_{k-2}$, для $k > 3$;

$F_k + F_k = F_{k+1} + F_{k-1}$, для $k = 3$;

$F_k + F_k = F_{k+1}$, для $k = 2$.

Задача

Вычислить сумму двух заданных чисел в ФСС, числа могут быть длиной до 200 знаков.

Для справки

В СССР занималась разработкой процессора на основе Фибоначчиевой системы счисления группа Стахова А.П. Стахов Алексей Петрович – украинский инженер и математик, внёсший вклад в развитие кибернетики и вычислительной техники. Разработал алгоритмическую теорию измерения, теорию p-кодов Фибоначчи и кодов золотой p-пропорции и основанные на них новые машинные арифметики, положенные в основу концепции компьютеров Фибоначчи, а также «математику гармонии» как новое междисциплинарное направление современной науки. Изобретения Стахова по направлению «Компьютеры Фибоначчи» защищены зарубежными патентами (65 патентов США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и др. стран).

Входные данные:

число 1,

число 2.

Выходные данные:

сумма чисел.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Результат работы программы</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>1</td></tr>
<tr><td>1000</td><td rowspan="2">10010</td></tr>
<tr><td>1000</td></tr>
<tr><td>10100</td><td rowspan="2">100001</td></tr>
<tr><td>100</td></tr>
</table>

Решение задачи на языке Python

```
#Приведение числа к минимальной форме записи(без двух идущих подряд
единиц)
def normalize(s):
    l = len(s)
    is_normal = 1

    for i in range(l-1):
        if s[i]==1 and s[i+1]==1:
            s[i-1] = 1
            s[i] = 0
            s[i+1] = 0
            if i>1 and s[i-2]==1:
                is_normal = 0
    if is_normal==0:
        normalize(s)
    return s
```

```
# Добавляем единицу( s - к какому числу добавляем,
# r- многоразрядный перенос, pos - позиция, в которую добавляем)
def fib_add(s,r,pos):
    if s[pos]==0:
        s[pos]=1
    else:
        r[pos]=1

#функция для вычисления суммы (a, b - числа в ФСС, l - длина)
def fib_sum(a,b,l):
    s = [0]*(l+1)
    r = [0]*(l+1)
    for i in range(l,-1,-1):
        s[i]=s[i]+a[i]+b[i]
        if s[i]==2:
            if i==l:
                s[i-1]=1
                s[i]=0
            if i==l-1:
                fib_add(s,r,i+1)
                s[i-1]=1
                s[i]=0
            if i<l-1:
                fib_add(s,r,i+1)
                fib_add(s,r,i+2)
                s[i]=1
    normalize(s)
    if r.count(1)>0:
        s = fib_sum(s[:],r[:],l)
    return s

#получаем входные данные
a = list(map(int,list(input())))
b = list(map(int,list(input())))

#максимально возможная длина суммы. В ФСС может добавиться два
разряда.
l = max(len(a),len(b))+2

a = [0]*(l - len(a))+[0]+a
b = [0]*(l - len(b))+[0]+b

s = fib_sum(a[:],b[:],l)

while s[0] == 0:
    s = s[1:]

print(''.join(map(str,s)))
```

▹ **Задача 3.** Интеллектуальное такси

Ни для кого не секрет, что сейчас о каждом человеке в разных базах данных, на сайтах и сервисах хранится очень большое количество информации: данные перемещений, покупки, любимые сайты, просмотренная реклама, переходы по ссылкам, лайки, фотографии, поисковые запросы.

В сверхбыстрое такси сели четыре человека. Искусственный интеллект должен определить, куда их везти, основываясь на информации, которую он нашел в своей базе данных. На вход программы передаются семь фраз с утверждениями о людях, городах и цветах, на выходе программа выводит, в какой город и к дому какого цвета отвезти пассажира. Ответ искусственного интеллекта должен быть отсортирован по имени по алфавиту.

Интересный факт

В 2015 году было проведено исследование, которое показало, что анализ специальной программой всего 10 «лайков» позволяет программе узнать человека лучше, чем его знают его сослуживцы. По 70 «лайкам» программа узнает о человеке столько же, как его близкий друг или сосед по комнате. Уровню 150 «лайков» соответствует уровень знания человека родителями, братьями или сестрами, а анализ 300 и более «лайков» позволяет программе узнать человека лучше, чем его знает супруга или супруг.

Входные данные:

семь строк с найденными данными (см. пример).

Выходные данные:

четыре строки с ответами в формате

“Нужно отвезти пассажира *Имя* в г. *Название города*, *цвет дома* дом”.

Возможные варианты цветов, имен, городов

Цвета – красный, зеленый, оранжевый, желтый, белый, черный, голубой, фиолетовый, синий, пурпурный

Имена – Саша, Алиса, Маша, Петр, Иван, Леша, Женя, Юля, Оля, Катя, Даша, Дима, Наташа, Сережа, Вера, Денис.

Города – Москва, Самара, Омск, Белгород, Нижний Новгород, Воронеж, Томск, Кемерово, Казань, Улан-Удэ, Шахтерск, Санкт-Петербург, Ульяновск, Красноярск.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
Алиса никогда не была в г. Самара В г. Омск не разрешено красить дома в красный Женя покрасил дом в синий цвет Маша не любит зеленый цвет Петр часто звонит другу из г. Москва, у которого дом желтый Женя живет в г. Белгород Петр больше не живет в г. Омск	Нужно отвезти пассажира Алиса в г. Омск, зеленый дом Нужно отвезти пассажира Женя в г. Белгород, синий дом Нужно отвезти пассажира Маша в г. Москва, желтый дом Нужно отвезти пассажира Петр в г. Самара, красный дом
Саша часто звонит другу из г. Москва, у которого дом желтый Юля никогда не была в г. Самара Даша не любит зеленый цвет Иван живет в г. Белгород В г. Омск не разрешено красить дома в оранжевый Саша больше не живет в г. Омск Иван покрасил дом в синий цвет	Нужно отвезти пассажира Даша в г. Москва, желтый дом Нужно отвезти пассажира Иван в г. Белгород, синий дом Нужно отвезти пассажира Саша в г. Самара, оранжевый дом Нужно отвезти пассажира Юля в г. Омск, зеленый дом

Решение задачи на языке Python

Чтобы установить соответствие людей, городов и цветов, нам понадобятся три таблицы соответствия. Таблицы будут изначально заполнены нулями, в процессе анализа входных данных будем ставить 1 в таблицу в случае соответствия и -1, если соответствия нет.

При этом в процессе заполнения таблиц проверяем, если в клетке стоит 1, то в строке и столбце все остальные значения будут равны -1. Если в трех клетках строки/столбца стоит -1, значит в четвертой - единица. Также не забываем про связь между таблицами: например, если известно соответствие город-человек и город-цвет, значит, мы можем заполнить клетку в таблице человек-цвет.

```
colors =['красный', 'зеленый', 'оранжевый', 'желтый', 'белый', 
'черный',\
 'голубой', 'фиолетовый', 'синий', 'пурпурный']

names = ['Саша', 'Алиса', 'Маша', 'Петр', 'Иван', 'Леша', 'Женя', 
'Юля',\
 'Оля', 'Катя', 'Даша', 'Дима', 'Наташа', 'Сережа', 'Вера', 'Денис']

cities = ['г. Москва', 'г. Самара', 'г. Омск', 'г. Белгород',\
 'г. Нижний Новгород', 'г. Воронеж', 'г. Томск', 'г. Кемерово',\
 'г. Казань','г. Улан-Удэ','г. Шахтерск', 'г. Санкт-Петербург',\
  'г. Ульяновск','г. Красноярск']

names_cities = [[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]
cities_colors =[[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]
names_colors = [[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]]

#Функция для выделения используемых значений из условий
def getUsed(statements, values):
    used = [];
    for s in statements:
        for v in values:
            if s.find(v)>=0 and used.count(v)==0:
                used.append(v)
    return used

# Устанавливает значение val в заданной клетке заданной таблицы 
связности
def setValue(arr,i,j,val):
    if (val == 1):
        for c in range(4):
            arr[i][c]=-1
```

```
            arr[c][j]=-1
    arr[i][j] = val
    check_row(arr,i)
    check_col(arr,j)

#Дозаполняем строчку, если в ней три раза -1
def check_row(arr,i):
    if sum(arr[i])==-3:
        setValue(arr,i,arr[i].index(0),1)

#Дозаполняем столбец, если в нем три раза -1
def check_col(arr,i):
    s =0
    for j in range(4):
        s+=arr[j][i]
    if s==-3:
        for j in range(4):
            if arr[j][i]==0:
                setValue(arr,j,i,1)



statements = []

for i in range(7):
    s = input()
    statements.append(s)

#Первым делом выделяем из условий имена, цвета и города, которые там
упоминаются
usedColors = getUsed(statements,colors)
usedCities = getUsed(statements,cities)
usedNames = getUsed(statements,names)

#Сразу сортируем имена по алфавиту, для корректного вывода результата
usedNames.sort()

#Заполняем таблицу сведениями из высказываний
for s in statements:
    nameInd=-1
    colorInd=-1
    cityInd=-1
    for i in range(4):
        if s.find(usedNames[i])>=0:
            nameInd = i
        if s.find(usedColors[i])>=0:
            colorInd = i
        if s.find(usedCities[i])>=0:
            cityInd = i
```

```
        # Если в одном высказывании сразу и город, и имя, и цвет
        if (nameInd>=0 and colorInd>=0 and cityInd>=0):
            setValue(names_colors,nameInd,colorInd,-1)
            setValue(cities_colors,cityInd,colorInd,1)
            setValue(names_cities,nameInd,cityInd,-1)
        # Если только два параметра
        else:
            if(nameInd>=0) and (cityInd>=0):
                if s.find(' не ')>=0:
                    setValue(names_cities,nameInd,cityInd,-1)
                else:
                    setValue(names_cities,nameInd,cityInd,1)

            if((colorInd>=0) and (cityInd>=0)):
                if s.find(' не ')>=0:
                    setValue(cities_colors,cityInd,colorInd,-1)
                else:
                    setValue(cities_colors,cityInd,colorInd,1)

            if(nameInd>=0 and colorInd>=0):
                if s.find(' не ')>=0:
                    setValue(names_colors,nameInd,colorInd,-1)
                else:
                    setValue(names_colors,nameInd,colorInd,1)

    #Дозаполняем таблицы, учитывая связи между ними
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            for k in range(4):
                v = names_cities[i][k]*names_colors[i][j]
                if v!=0 and names_cities[i][k]+names_colors[i][j]>-2:
                    setValue(cities_colors,k,j, v)

                v =  names_cities[k][i]*cities_colors[i][j]
                if v!=0 and names_cities[k][i]+cities_colors[i][j]>-2:
                    setValue(names_colors,k,j,v)

                v = cities_colors[k][j]*names_colors[i][j]
                if v!=0 and cities_colors[k][j]+names_colors[i][j]>-2:
                    setValue(names_cities,i,k,v)


    #Формируем ответ, выбирая города и цвета для имен из массива usedNames
    for i in range(4):
        cityInd = names_cities[i].index(1)
        colorInd  = names_colors[i].index(1)

        print('Нужно отвезти пассажира '+usedNames[i]+' в
    '+usedCities[cityInd]+'\, '+usedColors[colorInd]+' дом')
```

▹ **Задача 4.** Реверс-инжиниринг

Инженерам попала в руки программа – черный ящик. На вход подаются два числа и известен итоговый результат. Неизвестно, как она этого добивается, но поставлена задача создать программу, выдающую тот же результат на тех же числах.

Входные данные:

a, b – целые неотрицательные числа.

Выходные данные:

результат.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

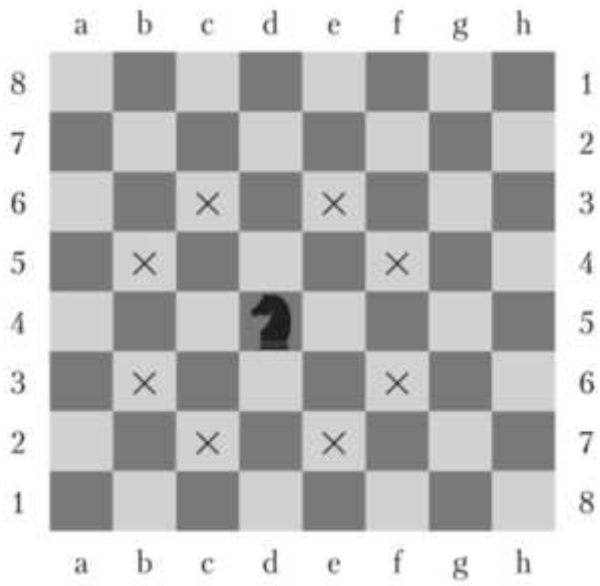
Входные данные	Результат работы программы
1 0	1
2 1	3
54 81	119

Решение задачи на языке Python

Участникам предлагалось 10 тестовых примеров с ответами, по которым можно было воссоздать функцию, выдающую требуемый результат.

```
(a,b)=list(map(int,list(input().split(' '))))
print(a|b)
```

▷ **Задача 5.** Ход конем



Саша и Женя учатся играть в шахматы и хотят использовать для них свои навыки программирования. Руководитель кружка предложил им решить следующую задачу.

Задание:

Найти минимальное количество ходов, которое понадобится шахматному коню, чтобы добраться с одной клетки до другой.

Входные данные:

клетка1 клетка2.

Выходные данные:

число – минимальное количество ходов.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

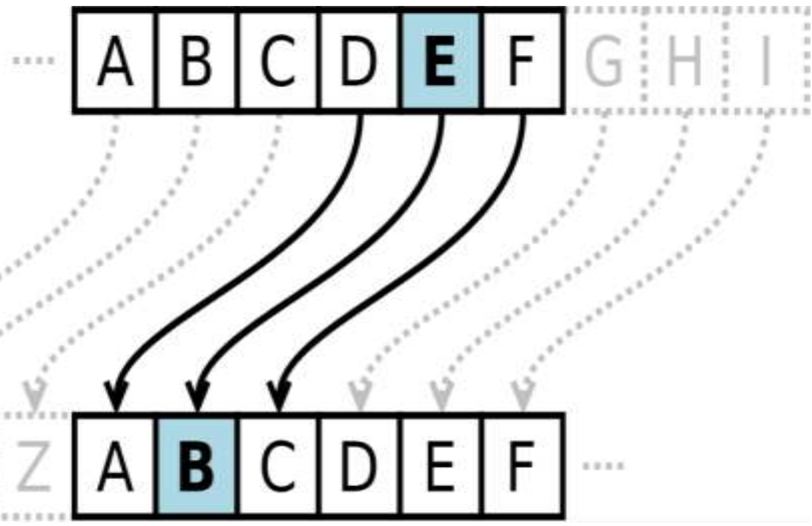
Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
a1 b1	3
a2 f4	3
a2 f5	4

Решение задачи на языке Python

```
from collections import deque
moves = ((1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2), (2, 1), (2, -1), (-2, 1),
(-2, -1))

def knight(p1, p2):
    x, y = ord(p2[0])-97, int(p2[1])-1
    left, seen = deque([(ord(p1[0])-97, int(p1[1])-1, 0)]), set()
    while left:
        i, j, v = left.popleft()
        if i==x and j==y: return v
        if (i, j) in seen: continue
        seen.add((i, j))
        for a,b in moves:
            if 0 <= i+a < 8 and 0 <= j+b < 8:
                left.append((i+a, j+b, v+1))

(p1,p2) = input().split(' ')

print(knight(p1,p2))
```

▷ **Задача 6.** Письма Цезаря



Археологи нашли новые, ранее не известные письма Цезаря. Известно, что Цезарь отправлял письма в зашифрованном виде и всегда подписывался своим именем. Письма написаны на английском. Сдвиг шифра может быть разным в каждом сообщении. Знаки препинания, пробелы и специальные символы остаются без изменений, регистр символов сохраняется. Если в сообщении нет подписи Цезаря - вывести 'No Julius'.

Шифр Цезаря со сдвигом на 3:

A заменяется на **D**,

B заменяется на **E**,...

и так далее...

Z заменяется на **C**.

Часто для удобства использования шифра Цезаря используют два насаженных на общую ось диска разного диаметра с нарисованными по краям дисков алфавитами. Изначально диски поворачиваются так, чтобы напротив каждой буквы алфавита внешнего диска находилась та же буква алфавита малого диска. Если теперь повернуть внутренний диск на несколько символов, то мы получим соответствие между символами внешнего диска и внутреннего — шифр Цезаря. Получившийся диск можно использовать как для шифрования, так и для расшифровки.

Например, если внутреннее колесо повернуть так, чтобы символу A внешнего диска соответствовал символ D внутреннего диска, то мы получим шифр со сдвигом 3 влево.

Забавное замечание

Неизвестно, насколько эффективным шифр Цезаря был в то время, но, вероятно, он был разумно безопасен, не в последнюю очередь благодаря тому, что большинство врагов Цезаря было неграмотным, и многие предполагали, что сообщения были написаны на неизвестном иностранном языке.

Входные данные:

зашифрованная строка.

Выходные данные:

расшифрованная строка.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
Rzzo wfnv! Ufwtfd	Good luck! Julius
Znoy oy tuz znk jxuojy eua'xk ruuqotm lux. Paroay	This is not the droids you're looking for. Julius
I am full of surprises, don't I? Julius	I am full of surprises, don't I? Julius
What's going on?	No Julius

Решение задачи на языке Python

```
def encrypt(text,s):
    result = ""

    # traverse text
    for i in range(len(text)):
        char = text[i]

        # Encrypt uppercase characters
        if (char.isupper()):
            result += chr((ord(char) + s-65) % 26 + 65)

        # Encrypt lowercase characters
        else:
            if (char.islower()):
                result += chr((ord(char) + s - 97) % 26 + 97)
            else:
                result+=char

    return result

def decipher(s,k):
    i=0
    while s.find('Julius')!=l-6:
        if i==26:
            return 'No Julius'
        s = encrypt(s,1)
        i +=1
    else:
        return s

s = input()
l = len(s)
signPos = l - 6

print(decipher(s,signPos))
```

Критерии определения победителей и призеров отборочного тура

Каждое из решений участника по каждой из шести задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов. Прошедшими в заключительный тур считались участники, набравшие:

8 класс и младше 100 баллов;

9 класс 120 баллов;

10-11 класс 150 баллов.

Статистика отборочного тура

В отборочном туре приняли участие 962 школьника из 59 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья. Количество иностранных участников — 39 человек. Количество участников, победителей и призеров отборочного тура представлено в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров
5 класс и младше	36	0
6	54	1
7	59	6
8	188	33
9	216	48
10	233	53
11	175	60
Итого	962	200

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура

Каждое из решений участника по каждой из шести задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов.

Дипломы победителя получили участники, набравшие 365 и более баллов. Дипломы призера (второе место) — 300 и более баллов. Участники, набравшие 211 и более баллов, заняли третье место.

Статистика заключительного тура

В заключительном туре приняли участие 102 школьника из 28 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья.

Призовые места заняли 25 человек. Количество участников, победителей и призеров представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5	0	0	0
6	0	0	0
7	2	1	0
8	20	4	0
9	22	5	1
10	24	2	0
11	33	8	4
Итого	102	20	5

План УМД на 2021/22 уч.г.
С. 5, п. 52

Александр Анатольевич Андреев
Мария Игоревна Карпухина
Екатерина Алексеевна Максимова
Елена Александровна Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2021/2022 учебный год

Учебное пособие

Подписано в печать 04.05.2022г. Формат 60х90 1/16.
Объём 9,3 усл.п.л. Изд. № 24.