МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ:

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2022/2023 учебный год

Учебное пособие

Москва 2023

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ:

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2022/2023 учебный год

Учебное пособие

Для учащихся 5-11 классов школ

Москва 2023

УДК 004.02, 37, 51

Андреев А.А., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников: ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2022/2023 учебный год / МТУСИ. – М., 2023. – 158 с.

Издание утверждено Методическим советом университета в качестве учебного пособия. Протокол № 4 от 07.04.2022 г.

Рецензенты: Д.Е. Студеникин, к.т.н., проректор (ГМУ им. Ф.Ф. Ушакова)
К.Н. Панков, к.ф.-м.н., доцент (МТУСИ)

Содержание

О сборнике ... 4
Предисловие ... 4
Олимпиада по математике ... 7
Задания отборочного тура олимпиады с ответами ... 7
5 класс ... 7
6 класс ... 14
7 класс ... 21
8 класс ... 28
9 класс ... 34
10 класс ... 43
11 класс ... 51
Задания заключительного тура олимпиады с решениями ... 60
5 класс ... 60
6 класс ... 64
7 класс ... 68
8 класс ... 73
9 класс ... 80
10 класс ... 90
11 класс ... 100
Критерии определения призеров отборочного тура олимпиады по математике ... 112
Статистика отборочного тура олимпиады по математике ... 112
Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады ... 113
Статистика заключительного тура ... 113
Олимпиада по информатике ... 114
Задания отборочного тура олимпиады с решениями ... 114
Задания заключительного тура олимпиады с решениями ... 135
Критерии определения победителей и призеров отборочного тура ... 154
Статистика отборочного тура ... 154
Критерии определения победителей и призеров заключительного тура ... 154
Статистика заключительного тура ... 155

О сборнике

Приводятся тексты заданий олимпиады с решениями/ответами отборочного и заключительного туров по математике и информатике, статистические сведения и историческая справка.

Пособие предназначено для участников олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

Все опубликованные в настоящем издании материалы распространяются свободно, могут копироваться и использоваться в учебном процессе без ограничений.

Желательны (в случаях, когда это уместно) ссылки на источник.

Электронная версия: https://тиим.рф

Авторы: А.А. Андреев, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова.

Предисловие

Сегодня, когда мир стремительно меняется и технологии развиваются с каждым днем, важно иметь специалистов, готовых работать в новых условиях и решать сложные проблемы. Однако для того чтобы вырастить таких специалистов, необходимо развивать у молодежи интерес к науке и технике, а также обеспечить им доступ к современным знаниям и технологиям.

Одной из форм работы со школьниками, развивающих у них творческий подход к задачам и интерес к науке, являются олимпиады школьников. Они по праву считаются одной из важнейших ступеней подготовки будущих научно-педагогических кадров. Школьники, которые участвуют в олимпиадах, повышают свой уровень знаний и навыков, что может помочь им стать успешными математиками, инженерами, учеными или преподавателями в будущем.

Участие в олимпиадах помогает школьникам развивать свои математические и логические способности, тренировать навыки анализа и решения нестандартных проблем и развивает креативный подход к научным и жизненным задачам.

Основной целью олимпиады школьников ”ТИИМ” является поддержание и развитие интереса к решению нестандартных задач математики и программирования. Олимпиада проводится образовательными организациями высшего образования, центрами Сириус и школами России и ближнего зарубежья.

Впервые олимпиада школьников ”ТИИМ - Технологии. Интеллект. Информатика. Математика” состоялась в 2020/2021 учебном году по двум предметам — математике и информатике и сразу привлекла к себе внимание более 3500 школьников со всей России и стран ближнего зарубежья.

В 2022/23 учебном году число участников по математике составило 6031, а по информатике/программированию — 1826 человек.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной формах. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 заданий. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по шесть задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В этом учебном году в олимпиаде по математике приняли участие 6031 школьников из 75 регионов РФ и ближнего зарубежья, по информатике – 1826 школьников из 66 регионов РФ и ближнего зарубежья. Заключительный тур прошел на 47 очных площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-на-Дону, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике и в дистанционном формате для удаленных регионов и лиц с ограниченными возможностями здоровья с применением технологий, позволяющих идентифицировать участника и отслеживать его действия в реальном времени.

Настоящее пособие содержит:

- 280 задач отборочного тура по математике с ответами;
- 70 задач заключительного тура по математике с решениями;
- шесть задач отборочного тура по информатике с решениями;
- шесть задач заключительного тура по информатике с решениями;
- критерии определения победителей и призеров;
- статистику олимпиады.

Полный текст заданий с ответами и решениями, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады https://тиим.рф.

Олимпиада по математике

Задания отборочного тура олимпиады с ответами

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной формах. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 заданий. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

5 класс

Отборочный тур, 5 класс, 1 вариант

▹ **1.** В Изумрудном городе есть улицы Аптечная и Ромашковая. Треть всех домов города расположена на улице Ромашковой, а четверть всех на Аптечной. У каждого дома 5 окон: 2 белых, синее и 2 красных. Каких окон больше: красных на улице Ромашковой или белых на Аптечной? В ответе укажите 1, если больше красных на Ромашковой, 2, если больше белых на Аптечной, и 0, если их одинаковое количество.

Ответ: 1.

▹ **2.** Незнайка собрал в корзину 138 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 13.

▹ **3.** Незнайка решил узнать все трёхзначные числа, у которых сумма цифр в 11 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 198.

▹ **4.** Винни-Пух варит волшебное варенье: к 1,4 кг малины он добавил 200 г смородины, 100 г сливы и 300 г крыжовника. Сколько процентов крыжовник составляет от массы всего полученного варенья?

Ответ: 15.

▹ **5.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 8, то получится то же самое, что и если умножить его на 5. Тогда, если умножить его на 7 – получится то же самое, что и если прибавить к нему ...?

Ответ: 12.

▹ **6.** Колобок, Лисица и Волк решили навестить Зайца и подарить ему подарок. Лисица решила, что Волк заплатит 45% всей стоимости, сама она $\frac{1}{4}$ всей стоимости, а Колобок 333 монеты. Сколько стоит подарок для Зайца?

Ответ: 1110.

▹ **7.** Куб, длина ребра которого 0,5 м, разрезан на кубы, ребро каждого из которых равно 2 мм. Полученные кубы выложили в один сплошной ряд. Чему равна длина этого ряда? Ответ укажите в метрах.

Ответ: 31250.

▹ **8.** Периметр квадрата увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась площадь этого квадрата?

Ответ: 44.

▹ **9.** Найдите наименьшее пятизначное натуральное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 12390.

▹ **10.** В городе планируется построить два катка прямоугольной формы. Известно, что длина первого катка составит 250 м, ширина второго 200 м, его ограждение 800 м. Причём площадь катков будет одинаковой. Чему равна ширина первого катка?

Ответ: 160.

Отборочный тур, 5 класс, 2 вариант

▹ **1.** В Изумрудном городе есть улицы Аптечная и Ромашковая. Треть всех домов города расположена на улице Ромашковой, а четверть всех на Аптечной. У каждого дома 5 окон: 2 белых, синее и 2 красных. Каких окон больше: красных на улице Ромашковой или белых на Аптечной? В ответе укажите 1, если больше красных на Ромашковой, 2, если больше белых на Аптечной, и 0, если домов одинаковое количество.

Ответ: 1.

▹ **2.** Незнайка собрал в корзину 102 одинаковых кубика и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 38.

▹ **3.** Незнайка решил узнать сумму всех трёхзначных чисел, у которых сумма цифр в 13 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 468.

▹ **4.** Винни-Пух варит волшебное варенье: к 1,2 кг малины он добавил 100 г смородины, 100 г сливы и 200 г крыжовника. Сколько процентов крыжовник составляет от массы всего полученного варенья?

Ответ: 12,5.

▹ **5.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 4, то получится то же самое, что и если умножить его на 3. Тогда, если умножить его на 5 – получится то же самое, что и если прибавить к нему ...?

Ответ: 8.

▹ **6.** Колобок, Лисица и Волк решили навестить Зайца и подарить ему подарок. Лисица решила, что Волк заплатит 45% всей стоимости, сама она $\frac{1}{4}$ всей стоимости, а Колобок 333 монеты. Сколько стоит подарок для Зайца?

Ответ: 1110.

▹ **7.** Деревянный куб, длина ребра которого 4 см, окрашен, а затем разрезан на кубы, рёбра которых равны 0,5 см. Сколько получится кубов с двумя окрашенными гранями?

Ответ: 72.

▹ **8.** Периметр квадрата уменьшили на 20%. На сколько процентов уменьшилась площадь этого квадрата?

Ответ: 36.

▹ **9.** Найдите наибольшее пятизначное натуральное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 98630.

▹ **10.** Сторона квадрата равна 6 см. Сумма длин сторон прямоугольника равна сумме длин сторон квадрата, причём ширина прямоугольника составляет $\frac{1}{3}$ части стороны квадрата. Найдите стороны прямоугольника, в ответе укажите его площадь.

Ответ: 20.

Отборочный тур, 5 класс, 3 вариант

▹ **1.** В Изумрудном городе есть улицы Аптечная и Ромашковая. Половина всех домов города расположена на улице Ромашковой, а четверть всех на Аптечной. У каждого дома 4 окна: 2 белых, синее и красное. Каких окон больше: красных на улице Ромашковой или белых на Аптечной? В ответе укажите 1, если больше красных на Ромашковой, 2, если больше белых на Аптечной, и 0, если их одинаковое количество.

Ответ: 0.

▹ **2.** Незнайка собрал в корзину 250 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 34.

▹ **3.** Незнайка решил узнать все трёхзначные числа, у которых сумма цифр в 12 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 108.

▹ **4.** Винни-Пух варит волшебное варенье: к 1,1 кг малины он добавил 500 г смородины, 200 г сливы и 200 г крыжовника. Сколько процентов крыжовник составляет от массы всего полученного варенья?

Ответ: 10.

▹ **5.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 6, то получится то же самое, что и если умножить его на 2. Тогда, если умножить его на 3 – получится то же самое, что и если прибавить к нему ...?

Ответ: 12.

▹ **6.** Колобок, Лисица и Волк решили навестить Зайца и подарить ему подарок. Лисица решила, что Волк заплатит 30% всей стоимости, сама она $\frac{1}{4}$ всей стоимости, а Колобок 999 монет. Сколько стоит подарок для Зайца?

Ответ: 2220.

▹ **7.** Деревянный куб, длина ребра которого 5 см, окрашен, а затем разрезан на кубы, рёбра которых равны 1 см. Сколько получится кубов с двумя окрашенными гранями?

Ответ: 36.

▹ **8.** Периметр квадрата увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилась площадь этого квадрата?

Ответ: 21.

▹ **9.** Найдите наибольшее четырёхзначное натуральное число, все цифры которого различны и которое делится на 3, 4, 5, 7.

Ответ: 9240.

▹ **10.** В городе планируется построить два катка прямоугольной формы. Длина первого катка составляет 150 м, а длина забора вокруг него 400 м. Второй каток имеет ту же площадь, но его длина составляет $\frac{1}{5}$ длины забора первого катка. Определите длину забора вокруг второго катка.

Ответ: 347,5.

Отборочный тур, 5 класс, 4 вариант

▹ **1.** В Изумрудном городе есть улицы Аптечная и Ромашковая. Половина всех домов города расположена на улице Ромашковой, а четверть всех на Аптечной. У каждого дома 4 окна: 2 белых, синее и красное. Каких окон больше: красных на улице Ромашковой или белых на Аптечной? В ответе укажите 1, если больше красных на Ромашковой, 2, если больше белых на Аптечной, и 0, если их одинаковое количество.

Ответ: 0.

▹ **2.** Незнайка собрал в корзину 350 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубов осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 7.

▹ **3.** Незнайка решил узнать все трёхзначные числа, у которых сумма цифр в 15 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 135.

▹ **4.** Паша и его папа собирали грибы. Паша нашёл на 20 грибов больше, чем половина грибов, найденных папой. Папа нашёл на 11 грибов больше, чем Паша. Сколько грибов нашли Паша и папа вместе?

Ответ: 113.

▹ **5.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 10, то получится то же самое, что и если умножить его на 6. Тогда, если умножить его на 7 – получится то же самое, что и если прибавить к нему ...?

Ответ: 12.

▹ **6.** Три поросёнка Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф собрались в поход. Для похода им необходимо купить снаряжение. Известно, что Ниф-Ниф заплатил 20% от стоимости снастей, 50% заплатил Нуф-Нуф и 1200 желудей Наф-Наф. Сколько стоило всё снаряжение?

Ответ: 4000.

▹ **7.** Деревянный куб, длина ребра которого 7 см, окрашен, а затем разрезан на кубы, рёбра которых равны 1 см. Полученные кубы выложены в один сплошной ряд так, что все видимые грани кубиков неокрашены. Какова наибольшая длина такого ряда?

Ответ: 336.

▹ **8.** Периметр квадрата уменьшили на 10%. На сколько процентов уменьшилась площадь этого квадрата?

Ответ: 19.

▹ **9.** Найдите наименьшее четырёхзначное натуральное число, все цифры которого различны и которое делится на 3, 4, 5, 7.

Ответ: 1260.

▹ **10.** В городе есть два катка прямоугольной формы. Длина первого катка составляет 180 м, а длина забора вокруг него 600 м. Второй каток имеет ту же площадь, но его длина 216 м. Чему равна ширина второго катка?

Ответ: 100.

6 класс

Отборочный тур, 6 класс, 1 вариант

▹ **1.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 2000 см, Белоснежка проходит 100 футов. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 15144 см? Друзья вышли одновременно. Ответ укажите в дециметрах. (1 фут = 30,48 см).

Ответ: 600.

▹ **2.** Найдите наименьший угол между часовой и минутной стрелками в 12 часов 20 минут.

Ответ: 110.

▹ **3.** Пять маленьких утят и два гусёнка весят 16 кг, а два маленьких утенка и четыре гусенка – 24 кг. Сколько весят два утёнка и два гусенка?

Ответ: 13.

▹ **4.** Найдите сумму трёхзначных чисел, каждое из которых является произведением четырёх неравных между собой простых чисел.

Ответ: 10524.

▹ **5.** Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 100 рублей на покупку новой сеялки. После уборки урожая купец к оставшейся сумме добавил третью её часть. В следующем году он вновь потратил 100 рублей на покупку лошадей и после уборки урожая увеличил оставшуюся сумму на третью её часть. В третьем году он опять потратил 100 рублей на покупку семян. После уборки урожая он добавил к остатку третью его часть. В результате его капитал увеличился вдвое. Определите первоначальный капитал купца.

Ответ: 1480.

▹ **6.** Найти наибольшее значение выражения

$$4b(5a-b)-(5a-2)(5a+2).$$

Ответ: 4.

▹ **7.** Найдите все пары натуральных a и b таких, что $a \ldots b$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$.

В ответе запишите сумму всех возможных a из найденных пар.

Ответ: 111.

▹ **8.** Среднее арифметическое восьми чисел равно 190. После того, как одно из восьми чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся семи чисел стало равно 175. Какое число было удалено?

Ответ: 295.

▹ **9.** Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 85 км/ч, а другой со скоростью 95 км/ч. Знайка, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение 4 секунд. Рассказав о своих наблюдениях Незнайке, Знайка спросил его, какова длина первого поезда.

Ответ: 200.

▹ **10.** Найдите сумму всех целых n, при которых $N=\frac{3n-1}{n+3}$ – натуральное число.

Ответ: –21.

Отборочный тур, 6 класс, 2 вариант

▹ **1.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 150 дм, Белоснежка проходит 400 вершков. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 655,6 дм? Друзья вышли одновременно. Ответ укажите в метрах. (1 вершок = 4,445 см).

Ответ: 30.

▹ **2.** Найдите наименьший угол между часовой и минутной стрелками в 12 часов 40 минут.

Ответ: 140.

▹ **3.** 4 линейки и 3 альбома стоят 96 рублей, 2 линейки и 2 альбома – 54 рубля. Сколько стоят 8 линеек и 7 альбомов?

Ответ: 204.

▹ **4.** Найдите три простых числа, произведение которых втрое больше их суммы. В ответе укажите сумму этих простых чисел.

Ответ: 10.

▹ **5.** Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 60 рублей на покупку новой сеялки. После уборки урожая купец к оставшейся сумме добавил третью её часть. В следующем году он вновь потратил 60 рублей на покупку лошадей и после уборки урожая увеличил оставшуюся сумму на третью её часть. В третьем году он опять потратил 60 рублей на покупку семян. После уборки урожая он добавил к остатку третью его часть. В результате его капитал увеличился вдвое. Определите первоначальный капитал купца.

Ответ: 888.

▹ **6.** Найти наименьшее значение выражения

$$2+6b(3b-c-1)+(2c-3b+1)(2c+3b-1).$$

Ответ: 1.

▹ **7.** Найти все делители числа 36. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 91.

▹ **8.** Среднее арифметическое семи чисел равно 190. После того как одно из семи чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся шести чисел стало равно 175. Какое число было удалено?

Ответ: 280.

▹ **9.** Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 75 км/ч, а другой со скоростью 85 км/ч. Знайка, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение 9 секунд. Рассказав о своих наблюдениях Незнайке, Знайка спросил его, какова длина первого поезда.

Ответ: 400.

▹ **10.** Найдите сумму всех целых n, при которых $N = \frac{3n+1}{n-3}$ – натуральное число.

Ответ: 21.

Отборочный тур, 6 класс, 3 вариант

▹ **1.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 250 дм, Белоснежка проходит 600 вершков. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 1033,4 дм? Друзья вышли одновременно. Ответ укажите в метрах. (1 вершок = 4,445 см).

Ответ: 50.

▹ **2.** Найдите наименьший угол между часовой и минутной стрелками в 9 часов 36 минут.

Ответ: 72.

▹ **3.** Четыре слона и три жирафа весят 44 ц, а три слона и 2 жирафа вместе весят 32 ц. Сколько весят один жираф и два слона?

Ответ: 20.

▹ **4.** Сумма квадратов двух некоторых простых чисел оканчивается цифрой 9. Найдите все такие простые числа. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 7.

▹ **5.** Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 50 рублей на покупку новой сеялки. После уборки урожая купец к оставшейся сумме добавил третью её часть. В следующем году он вновь потратил 50 рублей на покупку лошадей и после уборки урожая увеличил оставшуюся сумму на третью её часть. В третьем году он опять потратил 50 рублей на покупку семян. После уборки урожая он добавил к остатку третью его часть. В результате его капитал увеличился вдвое. Определите первоначальный капитал купца.

Ответ: 740.

▹ **6.** Найти наименьшее значение выражения

$$(3d+2c+1)(3d-2c-1)+4c(2c+3d+1)+3.$$

Ответ: 2.

▹ **7.** Найти все делители числа 48. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 124.

▹ **8.** Среднее арифметическое восьми чисел равно 190. После того как одно из восьми чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся семи чисел стало равно 175. Какое число было удалено?

Ответ: 295.

▹ **9.** Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 85 км/ч, а другой со скоростью 95 км/ч. Знайка, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение 4 секунд. Рассказав о своих наблюдениях Незнайке, Знайка спросил его, какова длина первого поезда.

Ответ: 200.

▹ **10.** Найдите сумму всех целых n, при которых $N=\dfrac{2n+1}{n-2}$ – натуральное число.

Ответ: 7.

Отборочный тур, 6 класс, 4 вариант

▹ **1.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 150 дм, Белоснежка проходит 400 вершков. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 655,6 дм? Друзья вышли одновременно. Ответ укажите в метрах. (1 вершок = 4,445 см).

Ответ: 30.

▹ **2.** Найдите наименьший угол между часовой и минутной стрелками в 9 часов 24 минуты.

Ответ: 138.

▹ **3.** Три слона и четыре бегемота весят 96 ц, а два слона и два бегемота вместе весят 54 ц. Сколько весят семь слонов и восемь бегемотов?

Ответ: 211.

▹ **4.** Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5 одно двузначное и одно трёхзначное число так, чтобы второе делилось на первое. В ответе укажите наибольшую возможную сумму этих чисел.

Ответ: 546.

▹ **5.** Купец имел некоторую сумму денег. В первый год он истратил 80 рублей на покупку новой сеялки. После уборки урожая купец к оставшейся сумме добавил третью её часть. В следующем году он вновь потратил 80 рублей на покупку лошадей и после уборки урожая увеличил оставшуюся сумму на третью её часть. В третьем году он опять потратил 80 рублей на покупку семян. После уборки урожая он добавил к остатку третью его часть. В результате его капитал увеличился вдвое. Определите первоначальный капитал купца.

Ответ: 1184.

▹ **6.** Найти наименьшее значение выражения

$$2a^2+5b^2+2c^2+2ab+4ac+2bc+16.$$

Ответ: 16.

▹ **7.** Найдите все пары натуральных c и d таких, что $c \ldots d$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{15}$. В ответе запишите сумму всех возможных d из найденных.

Ответ: 108.

▹ **8.** Среднее арифметическое шести чисел равно 17. После того как одно из шести чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся пяти чисел стало равно 19. Какое число было удалено?

Ответ: 7.

▹ **9.** Два поезда движутся навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 70 км/ч, а другой со скоростью 80 км/ч. Знайка, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шёл мимо него в течение 6 секунд. Рассказав о своих наблюдениях Незнайке, Знайка спросил его, какова длина первого поезда.

Ответ: 250.

▹ **10.** Найдите сумму всех целых n, при которых $N=\frac{2n-1}{n+2}$ – натуральное число.

Ответ: –7.

7 класс

Отборочный тур, 7 класс, 1 вариант

▹ **1.** Сумма цифр трёхзначного числа равна 12; сумма цифр его сотен и десятков кратна 9. Если от искомого числа отнять 99, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число. Если таких чисел несколько, то в ответе запишите наибольшее из найденных.

Ответ: 453.

▹ **2.** Найдите наибольший угол между часовой и минутной стрелками в 9 часов 20 минут.

Ответ: 200.

▹ **3.** Робот вместо слова ХА случайным образом записывает двузначное натуральное число, состоящее из различных цифр. Какова вероятность, что шестизначное число ХАХАХА будет делиться на 21?

Ответ: 1.

▹ **4.** Зная, что $x+3y=8$, найдите

$$\left(2x-6y\right):\left(0,25x^2-2,25y^2\right).$$

Ответ: 1.

▹ **5.** Цена билетов увеличилась на 40%, а выручка при этом снизилась на 16%. На сколько процентов уменьшилось число посетителей?

Ответ: 40.

▹ **6.** Дан ΔMNK, биссектрисы углов $\angle M$ и $\angle N$ пересекаются под углом $50°$. Найдите $\angle MNK$.

Ответ: 80.

▹ **7.** Если

$$b\otimes c=\frac{b^2-c^2+2c}{c+1},$$

то число $(((0\otimes 2)\otimes 2)\otimes 0)$ равно?

Ответ: 0.

▹ **8.** 12 мальчиков и 8 девочек являются членами математического клуба. Каждую неделю в клуб принимают двух новых девочек и нового мальчика. Сколько будет членов в клубе в тот день, когда мальчиков и девочек станет поровну?

Ответ: 32.

▹ **9.** Расшифруйте ребус: ВЕТКА + ВЕТКА = ДЕРЕВО. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными разные. В ответе укажите результат сложения.

Ответ: 148470.

▹ **10.** У продавца имеются две корзины с яблоками: в одной яблоки по цене 100 рублей за 1 кг, а в другой красные по 60 рублей за 1 кг. Стоимости корзин с яблоками одинаковы. Яблоки равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную бессортицу, чтобы получить те же деньги, что и при продаже яблок до перемешивания?

Ответ: 72.

Отборочный тур, 7 класс, 2 вариант

▹ **1.** Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке число, равное сумме цифр исходного числа. Найдите исходное число. Если таких чисел несколько, то в ответе запишите наименьшее из найденных.

Ответ: 83.

▹ **2.** Найдите наибольший угол между часовой и минутной стрелками в 9 часов 40 минут.

Ответ: 310.

▹ **3.** Робот вместо слова АХ случайным образом записывает двузначное натуральное число, состоящее из различных цифр. Какова вероятность, что шестизначное число АХАХАХ будет делиться на 39?

Ответ: 1.

▹ **4.** Зная, что $x-3y=4$, найдите

$$\left(2x+6y\right):\left(0,25x^2-2,25y^2\right).$$

Ответ: 2.

▹ **5.** Цена билетов в кинотеатр уменьшилась на 20%, а выручка при этом возросла на 20%. На сколько процентов изменилось число посетителей?

Ответ: 50.

▹ **6.** Дан ΔMNK, биссектрисы углов $\angle M$ и $\angle N$ пересекаются под углом 80°. Найдите $\angle MKN$.

Ответ: 20.

▹ **7.** Если

$$a\otimes b=\frac{b+ab-a}{a+1},$$

то число $(((0\otimes 1)\otimes 1)\otimes \frac{4}{3})$ равно?

Ответ: 1.

▹ **8.** Малыш и Карлсон собирали грибы. В корзине у них 13 белых грибов и 7 опят, причём Малыш собирает только белые грибы и докладывает их в корзину по одному, а Карлсон опята и докладывает их по 2 гриба. Сколько грибов необходимо собрать Карлсону, чтобы количество белых грибов и опят в корзине стало одинаковым?

Ответ: 12.

▹ **9.** Расшифруйте ребус: КОРОВА + ЛАСКА + КОРМ = МОЛОКО. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными разные. В ответе укажите значение, зашифрованное словом КОРОВА.

Ответ: 579747.

▹ **10.** У продавца имеются два мешка леденцов: в одном леденцы по 50 рублей за 1 кг, в другом – по 75 рублей за 1 кг. Стоимости мешков одинаковы. Леденцы равномерно перемешали. По какой цене нужно продавать полученную смесь, чтобы получить те же деньги, что и при продаже двух мешков до перемешивания?

Ответ: 60.

Отборочный тур, 7 класс, 3 вариант

▹ **1.** Найдите двузначное число, зная, что оно в сумме с числом, составленным из тех же цифр, но взятых в обратном порядке, дает 121 и что произведение его цифр равно 28. Если таких чисел несколько, то в ответе укажите наибольшее из найденных.

Ответ: 74.

▹ **2.** Найдите наибольший угол между часовой и минутной стрелками в 12 часов 36 минут.

Ответ: 196.

▹ **3.** Робот вместо слова ОХ случайным образом записывает двузначное натуральное число, состоящее из различных цифр. Какова вероятность, что шестизначное число ОХОХОХ будет делиться на 91?

Ответ: 1.

▹ **4.** Зная, что $2x+y=0{,}5$, найдите

$$(4x-2y):(32x^2-8y^2).$$

Ответ: 5.

▹ **5.** Цена молока в первый месяц лета уменьшилась на 10%, а надои увеличились на 15%. На сколько процентов изменилась выручка от реализации молока?

Ответ: 3,5.

▹ **6.** Дан ΔABC, биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle C$ пересекаются под углом $60°$. Найдите $\angle ABC$.

Ответ: 60.

▹ **7.** Если

$$d \otimes b = \frac{d - 2bd + b^2}{b},$$

то число $(((0 \otimes 1) \otimes 1) \otimes 1)$ равно?

Ответ: 1.

▹ **8.** Малыш и Карлсон собирали грибы. В корзине у них 13 белых грибов и 7 опят, причём Малыш собирает только белые грибы и докладывает их в корзину по одному, а Карлсон опята и докладывает их по 2 гриба. Сколько грибов будет в корзине, когда количество белых грибов будет равно количеству опят?

Ответ: 38.

▹ **9.** Расшифруйте ребус: ЛЮБА + ЛЮБИТ = АРБУЗЫ. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные. В ответе укажите результат сложения.

Ответ: 102568.

▹ **10.** У продавца имеются два ящика с мандаринами: в одном ящике мандарины из Абхазии по цене 60 рублей за 1 кг, в другом мандарины из Турции – по 90 рублей за 1 кг. Стоимости ящиков с мандаринами одинаковы. Мандарины равномерно перемешали. По какой цене нужно продавать полученную бессортицу, чтобы получить те же деньги, что и при продаже мандаринов до перемешивания?

Ответ: 72.

Отборочный тур, 7 класс, 4 вариант

▹ **1.** Сумму всех четных двузначных чисел разделили без остатка на одно из них. Найдите делитель, если известно, что сумма его цифр равна 9 и что частное отличается от делителя только порядком цифр. Если таких чисел несколько, то в ответе укажите наименьшее из найденных.

Ответ: 54.

▹ **2.** Найдите наибольший угол между часовой и минутной стрелками в 12 часов 24 минуты.

Ответ: 228.

▹ **3.** Робот вместо слова ХО случайным образом записывает двузначное натуральное число, состоящее из различных цифр. Какова вероятность, что шестизначное число ХОХОХО будет делиться на 111?

Ответ: 1.

▹ **4.** Найдите $2022x-1011y$, зная, что

$$\left(4x+2y\right):\left(32x^2-8y^2\right)=0{,}25.$$

Ответ: 1011.

▹ **5.** Цена молока за январь увеличилась на 15%, а надои уменьшились на 20%. На сколько процентов изменилась выручка от реализации молока?

Ответ: 8.

▹ **6.** Дан ΔMNK, биссектрисы углов $\angle M$ и $\angle N$ пересекаются под углом $50°$. Найдите $\angle MNK$.

Ответ: 80.

▹ **7.** Если

$$c\otimes d=\frac{c^2+d^2-d+c}{d+c},$$

то число $(((0\otimes 2)\otimes 1)\otimes 3)$ равно?

Ответ: 2.

▹ **8.** Малыш и Карлсон собирали грибы. В корзине у них 13 белых грибов и 7 опят, причём Малыш собирает только белые грибы и докладывает их в корзину по одному, а Карлсон опята и докладывает их по 2 гриба. Сколько грибов необходимо собрать Карлсону, чтобы количество белых грибов и опят в корзине стало одинаковым?

Ответ: 12.

▹ **9.** Расшифруйте ребус: КУРСК + ГОРСК = ГОРОДА. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными – разные. В ответе укажите результат сложения.

Ответ: 105078.

▹ **10.** У продавца имеются два мешка крупы: в одном по цене 30 рублей за 1 кг, в другом – по 20 рублей за 1 кг. Стоимости мешков одинаковы. По каким-то причинам содержимое мешков равномерно перемешали. По какой цене нужно продавать полученную смесь, чтобы получить те же деньги, что и при продаже двух мешков до перемешивания?

Ответ: 24.

8 класс

Отборочный тур, 8 класс, 1 вариант

▹ **1.** Сумма цифр четырёхзначного числа равна 15, число, изображённое двумя крайними цифрами этого числа, взятого в порядке их написания, равно $\frac{1}{2}$ числа, изображенного двумя средними цифрами. Число, изображенное двумя первыми цифрами этого числа, равно $\frac{8}{21}$ числа, изображённого последними двумя цифрами. Сумма цифр сотен и тысяч равна цифре десятков. Найти число.

Ответ: 2463.

▹ **2.** Свежие грибы содержат 92% воды, а сушёные 4% воды. Сколько грамм получится сушеных грибов из 9 кг свежих грибов?

Ответ: 750.

▹ **3.** Первое число при делении на второе дает в частном 2 и в остатке 3. Второе число при делении на третье дает в частном 1 и в остатке 8. Третье число при делении на четвертое даёт в частном 2 и в остатке 1. Сумма всех четырех чисел равна 76. Найти эти четыре числа. В ответе запишите среднее арифметическое найденных чисел.

Ответ: 19.

▹ **4.** Сколько страниц содержит энциклопедический словарь, если для нумерации всех его страниц было использовано 1875 цифр?

Ответ: 661.

▹ **5.** Если дату 28 февраля 2082 года записать в виде 28.02.2082, а затем убрать точки, то получится палиндром (т.е. число, читающееся слева направо и справа налево одинаково). Найдите ближайшую к 28.02.2082 дату, обладающую тем же свойством, при условии, что эта дата уже прошла. В ответе укажите только год в формате ****.

Ответ: 2081.

▹ **6.** Разгадайте ребус: РЕШИ + ЕСЛИ = СИЛЕН. В ответе запишите результат сложения.

Ответ: 12534.

▹ **7.** Если

$$a \otimes b = \frac{b + ab - a}{a + 1},$$

то число $(((0 \otimes 1) \otimes 1) \otimes \frac{1}{3})$ равно?

Ответ: 0.

▹ **8.** Часы показывают 3:00. Через какое ближайшее время стрелки будут опять перпендикулярны? Найти в часах и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 17.

▹ **9.** Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2, при делении на 4 даёт в остатке 3, при делении на 5 даёт в остатке 4.

Ответ: 1019.

▹ **10.** Если представить десятичную дробь 0,4(25) в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $n - m$ равно...

Ответ: 569.

Отборочный тур, 8 класс, 2 вариант

▹ **1.** Число десятков двузначного числа составляет $\frac{2}{3}$ числа единиц, а число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, больше первоначального числа на 18. Найти число.

Ответ: 46.

▹ **2.** Свежие сливы содержат 96% воды, а сушёные 8% воды. Сколько грамм сушеной сливы получится из 11,5 кг свежей сливы?

Ответ: 500.

▹ **3.** Сумма квадратов крайних цифр четырехзначного числа равна 65, а разность квадратов второй и третьей цифр этого числа равна 27. Сумма этого числа и числа 2727 равна числу, записанному цифрами исходного числа, но в обратном порядке. Найти это число.

Ответ: 4637.

▹ **4.** Сколько страниц содержит энциклопедический словарь, если для нумерации всех его страниц было использовано 2997 цифр?

Ответ: 1026.

▹ **5.** У даты 01.01.1999 (то есть 1 января 1999 года) сумма цифр равна 30. Найдите ближайшую дату после 14.11.2022, у которой сумма цифр равна 35. В ответе укажите только год найденной даты в формате ****.

Ответ: 2049.

▹ **6.** Разгадайте ребус: СИНИЦА + СИНИЦА = ПТИЧКИ. В ответе запишите результат сложения.

Ответ: 684914.

▹ **7.** Если

$$b \otimes c = \frac{b^2 - c^2 + 2c}{c+1},$$

то число $(((0 \otimes 2) \otimes 2) \otimes 0)$ равно?

Ответ: 0.

▹ **8.** Часы показывают 2:00. Через какое ближайшее время стрелки образуют тот же угол? Найти в часах и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 15.

▹ **9.** Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2, при делении на 4 даёт в остатке 3, при делении на 5 даёт в остатке 4.

Ответ: 9959.

▹ **10.** Если представить десятичную дробь 0,3(15) в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $n-m$ равно...

Ответ: 113.

Отборочный тур, 8 класс, 3 вариант

▹ **1.** Числитель дроби на 3 меньше знаменателя. Если к числителю прибавить 5, а из знаменателя вычесть 4, то полученная дробь будет в 4 раза больше первоначальной. Найти дробь. В ответе записать сумму квадратов числителя и знаменателя.

Ответ: 89.

▹ **2.** Свежие помидоры содержат 94% воды, а вяленые 6% воды. Сколько кг вяленых помидоров получится из 141 кг свежих помидоров?

Ответ: 9.

▹ **3.** Найти три числа, удовлетворяющих следующим условиям: первое из них, деленное на второе, дает в частном 4 и в остатке 12; второе, деленное на третье, дает в частном 5 и в остатке 5; наконец, первое, деленное на третье, дает в частном 21 и в остатке 12. В ответе укажите сумму трёх чисел.

Ответ: 548.

▹ **4.** Сколько страниц содержит энциклопедический словарь, если для нумерации всех его страниц было использовано 2024 цифры?

Ответ: 744.

▹ **5.** У даты 01.01.1999 (то есть 1 января 1999 года) сумма цифр равна 30. Найдите ближайшую дату до 14.11.2022, у которой сумма цифр равна 7. В ответе укажите только год найденной даты в формате ****.

Ответ: 2021.

▹ **6.** Разгадайте ребус: ВДСЕ + ВДАЕ = АЕСВЕ. В ответе запишите результат сложения.

Ответ: 10450.

▹ **7.** Если

$$d \otimes b = \frac{d - 2bd - b^2}{b},$$

то число $(((0 \otimes 1) \otimes 1) \otimes 1)$ равно?

Ответ: –1.

▹ **8.** Часы показывают 9:00. Через какое ближайшее время стрелки будут опять перпендикулярны? Найти в часах и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 17.

▹ **9.** Найдите наименьшее четырёхзначное число, которое при делении на 3 даёт в остатке 2, при делении на 5 даёт в остатке 4, при делении на 7 даёт в остатке 6, при делении на 11 даёт в остатке 10.

Ответ: 1154.

▹ **10.** Если представить сумму десятичных дробей $0,8(7) + 0,7(8)$ в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $m - n$ равно...

Ответ: 2.

Отборочный тур, 8 класс, 4 вариант

▹ **1.** Найдите два целых числа, сумма которых равна 1244. Если к первому числу приписать справа цифру 3, а во втором числе отбросить последнюю цифру 2, то полученные числа будут равны. В ответе запишите остаток от деления большего числа на меньшее.

Ответ: 8.

▹ **2.** Свежая малина содержит 82% воды, а сушёная 1% воды. Сколько грамм сушеной малины получится из 1100 г свежей малины?

Ответ: 200.

▹ **3.** Найти четырёхзначное число по следующим условиям: произведение крайних цифр равно 40; произведение средних цифр равно 28;

цифра тысяч на столько меньше цифры единиц, на сколько цифра сотен меньше цифры десятков; если к исходному числу прибавить 3267, то получится число обращённое.

Ответ: 5478.

▹ **4.** Сколько страниц содержит энциклопедический словарь, если для нумерации всех его страниц было использовано 3997 цифр?

Ответ: 1276.

▹ **5.** У даты 14.11.2022 (то есть 14 ноября 2022 года) сумма цифр равна 13. Найдите ближайшую к 14.11.2022 дату, у которой сумма цифр равна 30. В ответе укажите только год найденной даты в формате ****.

Ответ: 2026.

▹ **6.** Разгадайте ребус: ВДСЕ + ВДСЕ = АДСВЕ. В ответе запишите результат сложения.

Ответ: 17480.

▹ **7.** Если

$$a \otimes b = \frac{a - ab - b}{b + 1},$$

то число $(((1 \otimes 0) \otimes 0) \otimes 2)$ равно?

Ответ: 1.

▹ **8.** Часы показывают 6:00. Через какое ближайшее время стрелки будут опять иметь развернутый угол? Найти в часах и записать в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать $m + n$.

Ответ: 23.

▹ **9.** Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое при делении на 3 даёт в остатке 2, при делении на 5 даёт в остатке 4, при делении на 7 даёт в остатке 6, при делении на 11 даёт в остатке 10.

Ответ: 9239.

▹ **10.** Если представить сумму десятичных дробей $0{,}5(6) + 0{,}6(5)$ в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $m - n$ равно...

Ответ: 26.

9 класс

Отборочный тур, 9 класс, 1 вариант

▹ **1.** Найти сумму всех таких векторов $\vec{l}\,(x,y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-6x+6y \le 0, \\ y^2-2xy+9 \le 0. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат длины найденной суммы.

Ответ: 36.

▹ **2.** Решить уравнение $\left(13x^2+2x-14\right)\arccos x=0$. Пусть a – наименьший корень уравнения, а b – наибольший. Чему равно $\left(13a+b\right)^2$?

Ответ: 183.

▹ **3.** На базе имелось три вида наборов флажков: белых, красных, синих (в набор каждого вида входят флажки одного цвета). Спортивный лагерь купил для игры "Зарница" по одному набору белых и красных флажков и 4 набора синих (из расчёта по одному флажку на каждого ребёнка). При этом оказалось, что общее количество флажков больше, чем количество детей, на 2. Если бы было куплено 4 набора белых и один синих флажков, то 55 детям флажков бы не досталось. Если купить 4 набора красных флажков и один синих, то общее число флажков будет на 39 меньше числа детей. Сколько детей было в лагере, если, купив по 3 набора флажков каждого цвета, лагерь не обеспечил бы всех детей флажками?

Ответ: 82.

▹ **4.** Стороны треугольника a, b, c связаны соотношением

$$25a^2+41b^2+34c^2 \le 30ab+40ac+24bc.$$

Найдите $k=\dfrac{R}{r}$ – отношение радиусов вписанной и описанной окружностей данного треугольника. В ответе запишите $2k$.

Ответ: 5

▹ **5.** Груз вначале погрузили в вагоны вместимостью по 80 тонн, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше, и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью 50 тонн, однако понадобилось ещё на 5 вагонов больше. При этом все вагоны оказались полностью загружены. Сколько было тонн груза?

Ответ: 1750.

▹ **6.** Основание треугольника делится высотой на отрезки 36 см и 14 см. Перпендикулярно к основанию проведена прямая, делящая площадь треугольника пополам. На какие отрезки эта прямая разбила основание треугольника? В ответе укажите произведение длин найденных отрезков.

Ответ: 600.

▹ **7.** При каких трехзначных натуральных n остаток от деления числа $A_n = n^5 - 5n^4 - 25n^3 + 5n^2 - 26n$ на 120 принимает наибольшее значение? Если таких чисел n несколько, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных значений.

Ответ: 1099.

▹ **8.** Для целых x решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(3x - \sqrt{9x^2 - 16x - 80}\right)\right) = 1.$$

В ответе записать разность между наибольшим и наименьшим из найденных решений.

Ответ: 18.

▹ **9.** При каких натуральных n число

$$m = \frac{3n+6}{2n+1}$$

является целым? В ответе запишите сумму квадратов всех найденных n.

Ответ: 17.

▹ **10.** Сумма цифр двузначного числа равна 7. Если к каждой цифре прибавить по 2, то получится число, на 3 меньше удвоенного первоначального числа. Найти это число.

Ответ: 25.

Отборочный тур, 9 класс, 2 вариант

▹ **1.** Найти сумму всех таких векторов $\vec{l}\,(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 4 \leq 0, \\ y^2 - 4y - 4x \leq 0. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат длины найденной суммы.

Ответ: 16.

▹ **2.** Решить уравнение $(17x^2 + 2x - 18)\arcsin x = 0$. Пусть a – наименьший корень уравнения, а b – наибольший. Чему равно $(17b+1)^2$?

Ответ: 307.

▹ **3.** При отделке квартир в новом доме в качестве наружных могут использоваться три типа деревянных дверей, поставляемых в комплектах (в каждом комплекте некоторое количество дверей одного типа). На стройку были привезены комплекты дверей: по одному комплекту первого и второго типов и четыре комплекта третьего типа. Оказалось, что количество наружных дверей в квартирах дома больше, чем общее количество дверей в поставленных комплектах, на 2. Если бы поставили четыре комплекта второго типа и один третьего, то 44 квартиры остались бы без дверей. Если поставить четыре комплекта первого типа и один третьего, то 60 квартир окажутся без наружных дверей. Известно, что какое-то количество квартир может остаться без дверей, если поставить по три комплекта дверей каждого типа. Сколько квартир в доме?

Ответ: 92.

▹ **4.** Стороны треугольника a, b, c связаны соотношением

$$169a^2+313b^2+194c^2 \;,,\; 130ab+312ac+120bc.$$

Найдите $k=\dfrac{R}{r}$ – отношение радиусов описанной и вписанной окружностей данного треугольника. В ответе запишите $4k$.

Ответ: 13.

▹ **5.** Имеется некоторое количество проволоки. Если её намотать на катушки, на которых умещается по 800 метров проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. То же самое произойдёт, если воспользоваться только катушками, на которых умещается по 900 метров проволоки, причём таких катушек понадобится на 3 меньше. Если же проволоку наматывать только на катушки, на которых умещается по 1100 метров проволоки, то таких катушек понадобится ещё на 6 штук меньше, но при этом все такие катушки будут намотаны не полностью. Сколько было метров проволоки?

Ответ: 25300.

▹ **6.** Высота треугольника, равная 4 см, делит основание на две части в отношении 1:8. Найти длину отрезка, параллельного этой высоте и делящего треугольник на равные по площади части.

Ответ: 3.

▹ **7.** При каких двузначных натуральных n остаток от деления числа $B_n=n^6+59n^2$ на 60 принимает наибольшее значение? Если таких чисел n несколько, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных значений.

Ответ: 109.

▹ **8.** Для целых x решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1.$$

В ответе записать разность между наибольшим и наименьшим из найденных решений.

Ответ: 24.

$\triangleright$ **9.** При каких натуральных n число

$$m = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2n + 3}$$

также будет натуральным? В ответе запишите сумму квадратов всех найденных n.

Ответ: 1.

$\triangleright$ **10.** Двузначное число, делённое на сумму своих цифр, дает в частном 4 и в остатке 3. Если цифры этого числа переставить, то получится число на 5 больше ушестерённой суммы его цифр. Найти число.

Ответ: 35.

Отборочный тур, 9 класс, 3 вариант

$\triangleright$ **1.** Найти сумму всех таких векторов $\vec{l}\,(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - 2xy \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y \leqslant 0. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат длины найденной суммы.

Ответ: 2.

$\triangleright$ **2.** Решить уравнение $\left(15x^2 + 2x - 16\right)\arccos x = 0$. Пусть a – наименьший корень уравнения, а b – наибольший. Чему равно $\left(15a + b\right)^2$?

Ответ: 241.

$\triangleright$ **3.** В киоске продаются три вида наборов игрушек: деревянных, пластиковых и мягких. Детский клуб купил по одному набору деревянных и пластиковых игрушек и 4 набора мягких. При этом количество игрушек совпало с количеством детей в клубе. Если бы было куплено 4 набора деревянных и один набор мягких игрушек, то 57 детям игрушек бы не досталось. Количество игрушек, составляющих 4 набора пластиковых и один мягких, на 41 меньше числа детей. Сколько детей было в клубе, если, купив по 3 набора игрушек каждого вида, клуб не обеспечил бы всех детей игрушками?

Ответ: 84.

▹ **4.** Стороны треугольника *a, b, c* связаны соотношением

$$289a^2+514b^2+353c^2 \,„\, 272ab+510ac+240bc.$$

Найдите $k=\dfrac{R}{r}$ – отношение радиусов описанной и вписанной окружностей данного треугольника. В ответе запишите $6k$.

Ответ: 17.

▹ **5.** Жидкость налита в бутыли вместимостью по 40 литров, при этом одна из бутылей оказалась не совсем полной. Если же эту жидкость перелить в бутылки вместимостью по 50 литров, то такие бутыли будут заполнены полностью, но при этом понадобится на 5 бутылей меньше. Если же эту жидкость перелить по бутылям вместимостью по 70 литров, то понадобится ещё меньше на 4 бутыли. При этом опять одна бутыль будет не совсем полной. Сколько было литров жидкости?

Ответ: 850.

▹ **6.** Высота треугольника делит основание на отрезки 8 см и 64 см. Прямая, перпендикулярная основанию, делит треугольник на равные по площади части. В каком отношении $\dfrac{m}{n}$ находятся длина высоты и длина отрезка, делящего треугольник на две равновеликие части? В ответе запишите значение $\dfrac{m+n}{m-n}$.

Ответ: 15.

▹ **7.** При каких трёхзначных натуральных n остаток от деления числа $C_n=n^5-125n^3+4n$ на 120 принимает наибольшее значение. Если таких чисел n несколько, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных значений.

Ответ: 1099.

▹ **8.** Для целых x решить уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\left(3x-\sqrt{9x^2-80x-40}\right)\right)=1.$$

В ответе записать разность между наибольшим и наименьшим из найденных решений.

Ответ: 46.

▹ **9.** При каких натуральных n число

$$m=\frac{2n^2+5n+4}{n+2}$$

является натуральным? В ответе запишите сумму квадратов всех найденных n.

Ответ: 1.

▹ **10.** Сумма двух чисел, умноженная на сумму квадратов этих чисел, равна 369, а разность их, умноженная на разность их квадратов, равна 9. Найти числа. В ответе запишите x^3+y^3.

Ответ: 189.

Отборочный тур, 9 класс, 4 вариант

▹ **1.** Найти сумму всех таких векторов $\vec{l}\,(x,y)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 2xy+6x+9 \le 0, \\ x^2+y^2+6y \le 0. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат длины найденной суммы.

Ответ: 36.

▹ **2.** Решить уравнение $\left(22x^2+2x-23\right)\arcsin x=0$. Пусть a – наименьший корень уравнения, а b – наибольший. Чему равно $\left(22b+1\right)^2$?

Ответ: 507.

▹ **3.** Садовник подготовил в теплице лунки для выращивания помидоров (по одной лунке на растение). В питомнике продавалась рассада помидоров трёх типов (в каждом ящике одного типа некоторое количество растений одного сорта). У него хватило денег, чтобы купить по одному ящику рассады первого и второго сорта и 4 ящика рассады третьего сорта. При посадке оказалось, что общее количество лунок больше, чем количество растений, на 2. Если бы он купил 4 ящика рассады первого сорта и один ящик рассады третьего сорта, то 60 лунок остались бы пустыми. Если купить 4 ящика второго сорта и один третьего, то 44 лунки останутся пустыми. Какое-то количество лунок останутся пустыми, если даже он купит по 3 ящика рассады каждого сорта. Сколько лунок заготовил садовник?

Ответ: 92.

▹ **4.** Стороны треугольника *a*, *b*, *c* связаны соотношением

$$625a^2+1201b^2+674c^2 \;„\; 350ab+120ac+408bc.$$

Найдите $k=\dfrac{R}{r}$ – отношение радиусов описанной и вписанной окружностей данного треугольника. В ответе запишите $3k$.

Ответ: 25.

▹ **5.** Группу людей попытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Когда ту же группу людей построили по 7 человек в ряд, то все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей построили по 5 человек в ряд, то рядов было бы ещё на 7 больше, причём один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

Ответ: 119.

▹ **6.** Высота треугольника делит основание на две части 7:25. Перпендикулярно к основанию проведена прямая, делящая площадь треугольника пополам. Насколько большая часть превосходит меньшую часть основания, если она равна 100 см?

Ответ: 25.

▹ **7.** При каких двузначных натуральных n остаток от деления числа $D_n=n^5+115n^3+4n$ на 120 принимает наибольшее значение? Если таких чисел n несколько, то в ответе запишите сумму наибольшего и наименьшего из найденных значений.

Ответ: 109.

▹ **8.** Для целых x решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right)=0.$$

В ответе записать разность между наибольшим и наименьшим из найденных решений.

Ответ: 33.

▹ **9.** Найдите сумму всех двузначных натуральных n, при которых выражение

$$m=\frac{3n^2-26n+35}{4n-28}$$

целое.

Ответ: 2475.

▹ **10.** Сумма цифр трёхзначного числа равна 11, а сумма квадратов тех же цифр 45. Если от искомого числа отнять 198, то получится число, написанное в обратном порядке. Найти это число.

Ответ: 452.

10 класс

Отборочный тур, 10 класс, 1 вариант

▹ **1.** Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\left|x-\sqrt{x}-3\right|+\left|\sqrt{x}+7-x\right|=6.$$

Ответ: 4.

▹ **2.** Найдите сумму всех натуральных *a*, при каждом из которых неравенство

$$2a+a\left(3-\sin^2 x\right)^2+22\cos^2 x<88$$

выполняется при всех действительных значениях *x*.

Ответ: 15.

▹ **3.** Восьмизначное натуральное число *A*, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа *B* перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число *B* взаимно просто с числом 12 и B,, 88888888. Найти наибольшее среди чисел *A*, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 98888887.

▹ **4.** В пачке письменных работ абитуриентов не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку отлично. Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой отлично. Сколько работ было в пачке?

Ответ: 28.

▹ **5.** Положительные числа *x*, *y*, *z* таковы, что

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=75, \\ y^2+yz+z^2=432, \\ z^2+zx+x^2=507. \end{cases}$$

Чему равно $(xy+yz+zx)^2$?

Ответ: 4800.

▹ **6.** Имеются 3 слитка: первый слиток – сплав меди и никеля, второй слиток – сплав никеля с цинком, третий слиток – сплав цинка с медью. Если сплавить первый слиток со вторым, то процент меди в полученном сплаве будет в два раза меньше, чем он был в первом слитке. Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в три раза меньше, чем он был во втором слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплаве всех трёх слитков, если во втором слитке цинка 12 %, а в третьем – 5 %?

Ответ: 5,5.

▹ **7.** Найти среднее арифметическое всех целых b, при которых уравнение имеет не одно решение

$$2|x+1|-2|x-2|+|x-6|=x+b.$$

Ответ: 0,375.

▹ **8.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 59.

▹ **9.** Пусть N – количество решений уравнения

$$\sqrt{4\cos(2x\pi)-2\sin(2x\pi)}=2\cos(x\pi)$$

на интервале (0; 100), a – наибольший, а b – наименьший корень в промежутке. Чему равно $\frac{a-b}{N}$?

Ответ: 1.

▹ **10.** В группе из 16 детей 7 родились в Москве, 4 – в Санкт-Петербурге, 3 – в Казани и 2 – в Урюпинске. Выбирают группу из 4 детей. Какова вероятность, что в выбранной группе есть дети из всех 4 городов? Ответ дать в виде десятичной дроби с двумя десятичными знаками.

Ответ: 0,09.

Отборочный тур, 10 класс, 2 вариант

▹ **1.** Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\left|2\sqrt{x}+1-x\right|+\left|x-2\sqrt{x}+2\right|=7.$$

Ответ: 9.

▹ **2.** Найдите сумму всех натуральных m, при каждом из которых неравенство

$$m\left(3-\cos^2 x\right)^2+13\sin^2 x+65m<65$$

выполняется при всех действительных значениях x.

Ответ: 10.

▹ **3.** Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 12 и $B\ldots 44444444$. Найти наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 14444446.

▹ **4.** В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них белые. Если отложить 3 самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

Ответ: 25.

▹ **5.** Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=75, \\ y^2+yz+z^2=121, \\ z^2+zx+x^2=196. \end{cases}$$

Чему равно $xy+yz+zx$?

Ответ: 110.

▹ **6.** Имеются два раствора серной кислоты в виде: первый – 40%-ный, второй – 60%-ный. Эти два раствора смешали, а потом добавили 5 литров чистой воды и получили 20%-ный раствор. Если бы вместо чистой воды добавили 5 литров 80%-ного раствора, то получили бы 70%-ный раствор. Сколько было литров 40%-ного раствора?

Ответ: 1.

▹ **7.** Найти сумму квадратов всех целых a, при которых уравнение

$$\left|x^2-8x-a\right|=4x$$

имеет ровно один корень меньше 1 и хотя бы один корень больше 11,5.

Ответ: 50.

▹ **8.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 61.

▹ **9.** Пусть N – количество решений уравнения

$$\sqrt{\sin(2x\pi)-2\cos(2x\pi)}=\sqrt{2}\sin(x\pi)$$

на интервале (0; 100), a – наибольший, а b – наименьший корень в промежутке. Чему равно $\frac{a-2b}{N-2}$?

Ответ: 1.

▹ **10.** В группе из 15 детей 5 родились в Москве, 4 – в Санкт-Петербурге, 2 – в Саратове и 4 – в Козьмодемьянске. Выбирают группу из 4 детей. Какова вероятность, что в выбранной группе есть дети из всех 4 городов? Ответ дать в виде десятичной дроби с двумя десятичными знаками.

Ответ: 0,12.

Отборочный тур, 10 класс, 3 вариант

▹ **1.** Найдите решения уравнения

$$\left|x-\sqrt{x}-2\right|+\left|6+\sqrt{x}-x\right|=8.$$

В ответе запишите целую часть суммы всех решений

Ответ: 12.

▹ **2.** Найдите сумму всех натуральных *k*, при каждом из которых неравенство

$$29\sin^2 x + k\left(5-\cos^2 x\right)^2 + 4k < 174$$

выполняется при всех действительных значениях *x*.

Ответ: 10.

▹ **3.** Девятизначное натуральное число *A*, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа *B* перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число *B* взаимно просто с числом 24 и B,, 666666666. Найти наибольшее среди чисел *A*, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 966666665.

▹ **4.** В урне лежали белые и чёрные шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу чёрных как 3:2. После того, как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и чёрных равно 4:3. Сколько шаров лежало в урне?

Ответ: 25.

▹ **5.** Положительные числа *x*, *y*, *z* таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 108, \\ y^2 - yz + z^2 = 36, \\ z^2 + zx + x^2 = 144. \end{cases}$$

Найдите $xy + yz + zx$.

Ответ: 72.

▹ **6.** Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый состав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько кг олова содержится в новом сплаве.

Ответ: 170.

▹ **7.** Найти сумму всех целых значений a, при которых уравнение

$$2|x+3|-2|x-2|+|x-4|=x+2a$$

имеет ровно два корня.

Ответ: 30.

▹ **8.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 49.

▹ **9.** Пусть N – количество решений уравнения

$$\sin(\pi x)+2\sin(2\pi x)+\sin(3\pi x)=|1+2\cos(\pi x)+\cos(2\pi x)|$$

на интервале (0;100), a – наибольший, а b – наименьший корень в промежутке. Чему равно $\frac{5a+15b}{2N}$?

Ответ: 1.

▹ **10.** Какова вероятность, что наугад составленное слово из пяти букв русского алфавита (33 буквы) будет словом, в котором никакие две соседние буквы не совпадают? Ответ дать в виде десятичной дроби с двумя десятичными знаками.

Ответ: 0,88.

Отборочный тур, 10 класс, 4 вариант

▹ **1.** Решить равнение

$$|3\sqrt{x}+2-x|+|x-3\sqrt{x}+3|=9.$$

В ответе запишите среднее арифметическое значение найденных чисел.

Ответ: 16.

▹ **2.** Найдите сумму всех натуральных b, при каждом из которых неравенство

$$b + b\left(4 - \sin^2 x\right)^2 + 22\cos^2 x < 110$$

выполняется при всех действительных значениях x.

Ответ: 55.

▹ **3.** Девятизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 24 и $B \ldots 666666666$. Найти наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 166666667.

▹ **4.** Рыбаки поймали n рыб, из них 48% окуней. Пять рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали и оказалось, что среди оставшихся 50% составляют окуни. Сколько рыб поймали рыбаки, если известно, что $30 „ n „ 100$?

Ответ: 75.

▹ **5.** Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 169, \\ y^2 - yz + z^2 = 196, \\ z^2 + zx + x^2 = 225. \end{cases}$$

Найдите $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(xy + yz - zx\right)$.

Ответ: 56.

▹ **6.** Имеются 3 слитка: первый слиток – сплав меди и никеля, второй слиток – сплав никеля с цинком, третий слиток – сплав цинка с медью. Если сплавить первый слиток со вторым, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплаве всех трёх слитков, если во втором слитке цинка 10%, а в третьем – 7%?

Ответ: 6.

▹ **7.** Найти сумму всех целых значений параметра a, при которых уравнение

$$\left|x^2-4x+a\right|=x$$

имеет ровно один корень меньше 1 и хотя бы один корень больше 4.

Ответ: 5.

▹ **8.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. В ответе записать $m+n$.

Ответ: 67.

▹ **9.** Пусть N – количество решений уравнения

$$\sin(\pi x)-2\sin(2\pi x)+\sin(3\pi x)=\left|1-2\cos(\pi x)+\cos(2\pi x)\right|$$

на интервале (0; 100), a – наибольший, а b – наименьший корень в промежутке. Чему равно $\frac{15a+5b}{N}$?

Ответ: 6.

▹ **10.** Какова вероятность, что наугад составленное слово из шести букв латинского алфавита (26 букв) будет словом, в котором никакие две соседние буквы не совпадают? Ответ дать в виде десятичной дроби с двумя десятичными знаками.

Ответ: 0,82.

11 класс

Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▹ **1.** Найдите сумму *S* всех целых решений неравенства

$$\left|x-\sqrt{x}-3\right|+\left|\sqrt{x}+7-x\right| \leqslant 6.$$

Ответ: 60.

▹ **2.** Положительные числа *x*, *y*, *z* таковы, что

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=75, \\ y^2+yz+z^2=121, \\ z^2+zx+x^2=196. \end{cases}$$

Чему равно $xy+yz+zx$?

Ответ: 110.

▹ **3.** Девятизначное натуральное число *A*, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа *B* перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число *B* взаимно просто с числом 18 и $B \leqslant 222222222$. Найти наибольшее среди чисел *A*, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 922222220.

▹ **4.** Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |3x-2a+6|=3y, \\ |3y-a+6|=3x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

▹ **5.** Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен $\frac{1}{2}\arcsin\frac{13}{85}+\mathrm{arctg}13$, а две стороны 84 и 85?

Ответ: 12.

▹ **6.** Функция при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству

$$f(x)+2f(1-x)=x^2.$$

Пусть M – наименьшее её значение достигается в точке x_0. Чему равна дробь $\dfrac{x_0}{1+M}$?

Ответ: 6.

▹ **7.** Вкладчик положил в банк на депозит некоторую сумму денег и в течение пяти лет не снимал деньги со счёта и не делал дополнительных взносов. В течение первых трёх лет банк ежегодно начислял вкладчику проценты по депозиту по постоянной процентной ставке. После этого в стране разразилась инфляция. И хотя банк продолжал ежегодно начислять проценты по вкладу по прежней годовой ставке, деньги в результате инфляции обесценились настолько, что вкладчик каждый год в течение последних двух лет стал нести убытки. Величина убытков в процентном исчислении составляла ровно половину от исходной годовой процентной ставки. При какой исходной процентной ставке, не превышающей 200% годовых, вкладчик будет иметь максимальный суммарный прирост денежных сбережений за пять лет?

Ответ: 80.

▹ **8.** Сколько корней имеет уравнение

$$\sin\frac{\pi x}{3}\left(\lg(x+5)+\lg(400-x)\right)=0?$$

Ответ: 137.

▹ **9.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке убывания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби $\dfrac{m}{n}$. В ответе записать m^2+n^2.

Ответ: 229.

▹ **10.** Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\left(x^4-16x^2+48\right)|x-3|}+\lg\left(2022+331x-x^2\right).$$

В ответе запишите число всех целых значений из области определения.

Ответ: 341.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант

▹ **1.** Найдите все натуральные решения неравенства

$$\left|2\sqrt{x}+1-x\right|+\left|x-2\sqrt{x}+2\right| \text{„ } 7.$$

В ответе запишите среднее арифметическое всех найденных значений.

Ответ: 5.

▹ **2.** Положительные числа *x*, *y*, *z* таковы, что

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=169, \\ y^2-yz+z^2=196, \\ z^2+zx+x^2=225. \end{cases}$$

Найдите $\dfrac{1}{\sqrt{2}}|xy+yz-zx|$.

Ответ: 84.

▹ **3.** Девятизначное натуральное число *A*, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа *B* перестановкой последней цифры а первое место. Известно, что число *B* взаимно просто с числом 18 и $B \ldots 222222222$. Найти наименьшее среди чисел *A*, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 122222224.

▹ **4.** Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |7x+a+7|=7y, \\ |7y+6a-21|=7x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 2.

▹ **5.** Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен $\frac{1}{2}\arccos\frac{15}{17}+\operatorname{arctg}4$, а две стороны 17 и 15?

Ответ: 3.

▹ **6.** Функция при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству

$$g(x)+2g\left(\frac{2}{x}\right)=-(x+1).$$

Пусть M – наименьшее её значение при $x\in(0,+\infty)$ и достигается в точке x_0. Чему равна дробь $\frac{x_0}{M-2}$?

Ответ: 6.

▹ **7.** Мистер X решил открыть собственное дело и вложил в него определённую сумму денег (первоначальный капитал). В первый год мистер X получил прибыль. Во второй год наш предприниматель понес убытки, причём их процент по отношению к финансовым результатам первого года (первоначальный капитал плюс прибыль) был равен проценту прибыли, полученной в предыдущему году. Третий год ознаменовался большой прибылью: её процент в 4 раза превысил полученный в первом году. При каком исходном проценте мистер X сможет получить наибольшую суммарную прибыль за 3 года (убытки рассматриваются как отрицательная прибыль)?

Ответ: 50.

▹ **8.** Сколько корней имеет уравнение

$$\cos\frac{\pi(x-3)}{2}\sqrt{\left(\frac{x}{4}-1\right)\left(200-\frac{3x}{2}\right)}=0?$$

Ответ: 66.

$\triangleright$ **9.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке возрастания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать m^2+n^2.

Ответ: 5674.

$\triangleright$ **10.** Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\lg\left(x^2-2x-2\right)}+\sqrt{24+5x-x^2}.$$

В ответе запишите сумму всех целых значений из области определения.

Ответ: 27.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

$\triangleright$ **1.** Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\left|x-\sqrt{x}-2\right|+\left|6+\sqrt{x}-x\right|\leq 8.$$

Ответ: 66.

$\triangleright$ **2.** Положительные числа *x*, *y*, *z* таковы, что

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=108, \\ y^2-yz+z^2=36, \\ z^2+zx+x^2=144. \end{cases}$$

Найдите $xy+yz+zx$.

Ответ: 72.

$\triangleright$ **3.** Восьмизначное натуральное число *A*, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа *B* перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число *B* взаимно просто с числом 57 и $B\leq 77777777$. Найти наибольшее среди чисел *A*, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 97777775.

▹ **4.** Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |21x + a + 14| = 21y, \\ |7y + 2a - 14| = 7x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

▹ **5.** Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен $\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13} + \operatorname{arctg} 5$, а две стороны 15 и 17?

Ответ: 3.

▹ **6.** Функция при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству

$$2f(x) + 3f(4 - x) = 5x^2.$$

Пусть M – наименьшее её значение достигается в точке x_0. Чему равна дробь $\frac{x_0}{100 + M}$?

Ответ: 3.

▹ **7.** Фирма осуществляла капиталовложение на определённую сумму денег в некоторый проект. По истечении первого года фирма получила некоторый процент прибыли на вложенный капитал. Однако по истечении второго года фирма понесла убытки. Причём их процент по отношению к финансовым результатам предыдущего года (первоначально авансированный капитал плюс прибыль) был в точности равен проценту прибыли, полученной в предыдущем году. Аналогичным образом третий, четвёртый и пятый годы чередовались получением прибыли, несением убытков и снова получением прибыли. Причём всякий раз процент прибыли или убытков по отношению к финансовым результатам предыдущего года был таким же, как и в первые два года. При каком исходном проценте, не превышающем 100%, суммарная прибыль фирмы за 5 лет будет наибольшей? Убытки рассматриваются как отрицательная прибыль.

Ответ: 20.

▹ **8.** Сколько корней имеет уравнение

$$\sin\frac{\pi x}{4}\left(\lg(x+3)+\lg(300-x)\right)=0?$$

Ответ: 77.

▹ **9.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке неубывания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать m^2+n^2.

Ответ: 3721.

▹ **10.** Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\left(x^4-44x^2+288\right)\left|x-5\right|}+\lg\left(56+5x-x^2\right).$$

В ответе запишите сумму всех целых значений из области определения.

Ответ: 12.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▹ **1.** Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\left|3\sqrt{x}+2-x\right|+\left|x-3\sqrt{x}+3\right|\leq 9.$$

Ответ: 136.

▹ **2.** Положительные числа x, y, z таковы, что

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=169, \\ y^2+yz+z^2=196, \\ z^2+zx+x^2=225. \end{cases}$$

Чему равно $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(xy+yz+zx\right)$?

Ответ: 112.

▹ **3.** Восьмизначное натуральное число A, записанное в десятичной системе счисления, получается из числа B перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число B взаимно просто с числом 57 и $B \ldots 77777777$. Найти наименьшее среди чисел A, удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 17777779.

▹ **4.** Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |2x-a+2| = 2y, \\ |6y+2a+6| = 6x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 3.

▹ **5.** Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен $\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{37}+\operatorname{arctg}6$, а две стороны 12 и 35?

Ответ: 5.

▹ **6.** Функция при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству

$$g(x)+2g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x.$$

Пусть M – наибольшее значение функции $(x-1)g(x)$, которое достигается в точке x_0. Чему равна дробь $\frac{x_0}{M}$?

Ответ: 2.

▹ **7.** Маклер осуществил удачную сделку, в результате которой получил некоторый процент прибыли на вложенный капитал. Затем он вложил первоначальный капитал и полученную прибыль в новую операцию и понес убыток, в процентном отношении равный первоначальному проценту прибыли. После третьей (также неудачной) сделки процент убытков возрос в 4 раза по сравнению с процентом прибыли после первой сделки. При каком исходном проценте такая деятельность маклера приведет к его наибольшим возможным суммарным потерям? Ответ округлить до целого числа.

Ответ: 67.

▹ **8.** Сколько корней имеет уравнение

$$\cos\frac{\pi(x-2)}{4}\sqrt{\left(\frac{x}{8}+1\right)\left(150-\frac{2x}{3}\right)}=0?$$

Ответ: 60.

▹ **9.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке невозрастания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. В ответе записать m^2+n^2.

Ответ: 95329.

▹ **10.** Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\lg\left(x^2-4x-4\right)}+\sqrt{21+4x-x^2}.$$

В ответе запишите сумму всех целых значений из области определения.

Ответ: 12.

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

Каждое из заданий заключительного тура могло быть максимально оценено в 10 баллов. От участников требовалось предоставить полное решение.

5 класс

▹ **Задача 1.** Есть 8 кубиков со стороной 1 см. Сколько различных прямоугольных параллелепипедов можно сложить из этих кубиков? (Используйте все кубики).

Решение:

$$1\times1\times8, 1\times2\times4, 2\times2\times2$$

$$8=2^3, x=2^{\alpha}, y=2^{\beta}, z=2^{\gamma}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=3, (0,0,3)(0,1,2)(1,1,1)$$

Ответ: 3.

▹ **Задача 2.** Даны 3 квадрата. Площадь второго на 40% больше площади первого, а площадь третьего на 40% меньше площади второго. Какой из трёх квадратов самый маленький?

Решение:

Квадрат	Площадь
I	1
II	1,4
III	$0,6\cdot1,4=0,84$

Ответ: Наименьшая площадь у третьего квадрата.

▹ **Задача 3.** За 5 часов катер проходит по течению реки на 20 км больше, чем против течения за это же время. Сколько километров проплывёт бревно за 2 часа?

Решение: Пусть x – скорость катера. Тогда y – скорость течения (бревно плывёт со скоростью течения).

$$5(x+y)-5(x-y)=20;$$

$$10y=20;$$

$$y=2.$$

Значит, скорость течения 2 км/ч, и за 2 часа бревно проплывёт $2\cdot 2=4$.

Ответ: 4.

▹ **Задача 4.** В ящике находится 10 пар чёрных перчаток и 5 пар синих одного размера и фасона, правая и левая перчатки различаются. Сколько нужно вытянуть перчаток, не глядя, чтобы образовалась пара одноцветных перчаток?

Решение: Можно случайно вытянуть первые 10 чёрных перчаток с левой (или с правой) руки, а потом ещё 5 синих перчаток с одной руки, так что никакие из этих 15 перчаток не могут образовать пары. Но уже 16-я перчатка будет образовывать пару с одной из 15 первых.

Ответ: Не более шестнадцати.

▹ **Задача 5.** Из 27 монет одна фальшивая – она легче остальных. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь можно определить фальшивую монету?

Решение: За одно взвешивание определяется, в какой из трёх одинаковых кучек монет находится фальшивая.

Первое взвешивание – 9, 9, 9.

Второе взвешивание – 3, 3, 3.

Третье взвешивание – 1, 1, 1.

▹ **Задача 6.** Разность двух натуральных чисел равна 2023. Если у одного из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе. Найдите эти числа.

Решение: Пусть x и y – эти числа.

$$x>y,\ x=10A+B,\ y=A;$$

$$x-y=10A+B-A=9A+B;$$

$$9A+B=2023=9\cdot 224+7;$$

$$A = 224, B = 7;$$

$$x = 2247, y = 224.$$

Ответ: $x = 2247, y = 224$.

▹ **Задача 7.** В некотором месяце три субботы пришлись на чётные числа. Какой день недели был 14 числа этого месяца?

Решение: Пусть А – первая из "чётных" суббот, В – вторая, С – третья. От одной субботы месяца до другой может быть 7, 14, 21 или 28 дней. Однако число дней от одного чётного числа месяца до другого его чётного числа должно быть чётным. Поэтому от А до В должно быть 14 дней, а от А до С – 28 дней, но тогда суббота А может приходиться на второе число: даже если А – четвертое, то В – 18-е, а С – 32-е, чего не бывает. Итак, А – второе число, В – 16-е число, С – 30-е число, а 14-е число четверг.

Ответ: Четверг.

▹ **Задача 8.** Записаны 4 числа: 2, 0, 2, 3. За один ход разрешается прибавить единицу к любым двум из этих чисел или отнять ее от любого из них. Какое наименьшее число ходов надо сделать, чтобы получить четыре одинаковых числа?

Решение: Возможны ходы (+1, –1) (–1,+1) (–1, –1) (+1, +1). Каждый ход изменяет сумму исходных чисел на (2, 0, –2), т.е. не изменяет чётность суммы (7). Четыре одинаковых числа имеют чётную сумму. Не существует стратегий, изменяющих чётность суммы полученных чисел.

Ответ: Такое невозможно.

▹ **Задача 9.** В трёх кучках 22, 14 и 12 орехов. Требуется уравнять число орехов во всех этих кучках, причём можно перекладывать из одной кучки в другую столько орехов, сколько в ней уже имеется (удваивать число орехов в кучке). Как это сделать?

Решение: В результате распределение орехов должно быть таким: 16, 16, 16.

Поэтому предпоследнее распределение должно быть таким: 16, 24, 8.

Перед этим распределение орехов может быть разнообразным. Но нас должно заинтересовать такое, в котором есть хоть одна кучка с 22 или с 14 или с 12 орехами.

Это может выглядеть так: 12, 20, 16 или 12, 8, 4.

Если не трогать кучку в 12 орехов, то перед этим возможны такие распределения: 12, 10, 26 или 12, 28, 8 или 12, 4, 8 или 12, 2, 10.

Второе распределение можно получить из первоначального.

Ответ: Возможен следующий путь решения: 22, 14, 12; 8, 28, 12; 16, 20, 12; 16, 8, 24; 16, 16, 16.

▹ **Задача 10.** В ящике 35 шариков. Каждый из двух играющих по очереди вынимает из ящика от одного до пяти шариков. Выигрывает взявший последний шарик. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или второй игрок?

Решение: Выигрывает тот, кто возьмет 35-й шарик, следовательно, тот, кто возьмет 29-й шарик, 23-й, 17-й, 11-й, 5-й шарики.

Выигрывает начинающий, если он возьмет пять шариков и затем будет дополнять до шести число шариков, взятых партнёром.

6 класс

▹ **Задача 1.** Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

Решение: Вычтем из искомого числа 17. Разность оканчивается двумя нулями, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 9. Два последних свойства сохраняются в том случае, если два нуля, которыми оканчивается разность, вычеркнуть. Значит, достаточно найти наименьшее число, которое делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 9, а потом приписать к нему сзади 17. Выписывая подряд числа, делящиеся на 17, находим, что наименьшее из них с суммой цифр, равной 9, – это 153. Отсюда – ответ.

Ответ: 15317.

▹ **Задача 2.** На дороге между горными селениями A и B нет горизонтальных участков. Машина без остановок проехала по ней от A до B и вернулась в A, потратив на весь путь 6 часов. При этом в гору она всегда ехала со скоростью 15 км/ч, а под гору со скоростью 30 км/ч. Чему равна длина дороги?

Решение: Пусть длина дороги равна x км. Тогда в гору машина ехала $x/15$ часов, а под гору $x/30$ часов. Поскольку на весь путь у неё ушло 6 часов, имеем $x/15+x/30=6$, откуда $x=60$ км.

Ответ: 60.

▹ **Задача 3.** Коля поймал за 5 дней 512 мух. Каждый день он отлавливал столько мух, сколько во все предыдущие дни вместе. Сколько мух поймал он за каждый из этих дней?

Решение: За последний день он поймал столько мух, сколько в первые 4 дня, то есть половину всех мух. В четвертый день – половину мух, пойманных за 4 дня. И так далее.

Ответ: В пятый день 256, в четвёртый 128, в третий 64, во второй 32, в первый 32.

▹ **Задача 4.** Выписаны подряд все числа от 1 до 60, без пробелов между цифрами: 123456789101112...585960. Надо вычеркнуть 100 цифр, чтобы оставшееся число оказалось наименьшим.

Решение: Всего выписано 111 цифр (9 – на однозначные числа и ещё 102 на 51 двузначное число). Значит, после вычёркивания 100 цифр останется 11-значное число. Чтобы оно было самым маленьким, нужно поставить в нём на первое место 1, а на последующие – нули. Однако нулей в нашей записи всего 6. Если мы выпишем их все, то за последним нулём цифр уже не останется. Попробуем оставить нули только от чисел 10, 20, 30, 40 и 50. Тогда у нас получится такое число: 10000051525354555657585960. От него можно оставить после 100000 ещё 5 цифр. Так как нуль поставить нельзя, поставим самую маленькую из возможных – 1, вычеркнув первую пятёрку после пяти нулей. Теперь можно вычеркнуть ещё три пятёрки, оставляя следующие за ними цифры: 10000012340.

Ответ: 10000012340.

▹ **Задача 5.** Пусть запись $a \triangle b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a+b$. Решите уравнение $x \triangle 3 = 5 \triangle x$

Решение: Запись $x \triangle 3$ может означать либо $2x$ (если $x \geq 3$), либо $x+3$ (если $x \leq 3$). Запись $5 \triangle x$ – либо 10 (если $x \leq 5$), либо $5+x$ (если $x \geq 5$). Поэтому наше уравнение выглядит так: $2x=10$ (если $3 \leq x \leq 5$), либо $x+3=10$ (если $x \leq 3$), либо $2x=5+x$ (если $x \geq 5$).

Первое уравнение даёт ответ 5, отвечающий условию $3 \leq x \leq 5$, второе – ответ 7, не отвечающий условию $x \leq 3$, третье – ответ 5, отвечающий условию $x \geq 5$. Следовательно, $x=5$.

Ответ: 5.

▹ **Задача 6.** Имеется много жетонов стоимостью 3 тугрика и два жетона по 5 тугриков. Можно ли составить сумму 2023 тугрика с помощью этих жетонов?

Решение: Сумму в 8 тугриков составляем как 3 + 5, в 9 как 3 + 3 + 3, сумму в 10 тугриков как 5 + 5. Любую сумму больше добиваем n жетонами по 3.

Проверяем любое число на остаток на деление на 3. Если остаток 1 (как для числа 10), то можно разбить выражением $5\cdot 2+3n$. Если остаток 2 (как для числа 8), то можно разбить выражением $5+3(n+1)$. Если остаток 3, то – $3n$.

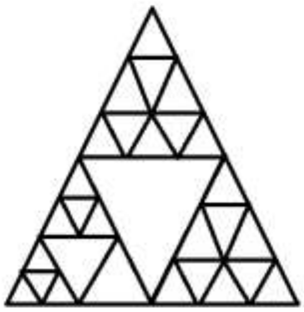
2023 при делении на 3 даёт остаток 1. Следовательно, данную сумму можно собрать из $5\cdot 2+3\cdot 671$ с помощью двух жетонов по 5 тугриков, и 671 жетона по 3 тугрика.

Ответ: Да.

▹ **Задача 7.** Можно ли разрезать правильный треугольник на 29 правильных треугольников?

Решение: Да, можно. Как это сделать:

$$1\Rightarrow 4\Rightarrow 3+9=12\Rightarrow 11+9=20\Rightarrow 19+4=23\Rightarrow 21+8=29$$



Ответ: Да.

▹ **Задача 8.** В 2023 году городу-"миллионнику" Перми исполняется 300 лет. Докажите, что найдётся в этом славном городе по крайней мере 25 человек, у которых совпадают инициалы (начальные буквы фамилии, имени и отчества).

Решение: Всего в русском языке 33 буквы. Некоторые буквы не могут быть инициалами, но посчитаем их тоже для оценки сверху. Всего вариаций

$N = 33^3 = 35937.$

$35937 \cdot 25 = 898425,\ 898425 < 1000000$.

▹ **Задача 9.** Какое количество различных по весу гирь (целое количество граммов) необходимо иметь продавцу, чтобы он мог точно отмерить любое целое количество граммов (от 1 до 2023) на двухчашечных весах, если разрешается гири ставить на обе чаши весов?

Решение: Запись о взвешивании одного килограмма может быть такой: $0\,0\,0\,1_3$. Взвешивание двух килограммов требует использования двух гирь – $0\,0\,1{-}1_3$.

Взвешивание груза в 5 кг: $0\,1{-}1{-}1_3$. Эта запись означает, что на пустую чашу помещена гиря, масса которой равна единице третьего разряда в троичной системе исчисления, то есть 9, а на чашу с грузом помещены гири в 1 и 3 кг.

Аналогично следует, что результат любого взвешивания на чашечных весах выражается числом, записанным в системе счисления с основанием 3 и с алфавитом, состоящим из –1, 0 и 1. Следовательно, хватит гирь 1, 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$.

Ответ: 7.

▹ **Задача 10.** В ящике 2023 шарика. Каждый из двух играющих по очереди вынимает из ящика от 1 до 7 шариков. Выигрывает взявший последний шарик. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или второй игрок?

Решение: Выигрывает тот, кто возьмёт 2023-й шарик, следовательно, тот, кто возьмёт 2015-й шарик.

$2023 = 8 \cdot 252 + 7$ Выигрывает начинающий, если он возьмет семь шариков и затем будет дополнять до восьми число шариков, взятых партнёром.

Ответ: Первый игрок.

7 класс

▹ **Задача 1.** К числу 23 слева и справа подписали по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 23. Найдите все такие числа.

Решение:

$$1000 = 23 \cdot 433 + 11 = 23 \cdot 44 - 12;$$

$$2000 = 23 \cdot 88 - 24 = 23 \cdot 87 - 1 = 2001 - 1 \Rightarrow 2231 = 23 \cdot 97;$$

$$3000 = 23 \cdot 132 - 36 = 23 \cdot 131 - 13;$$

$$4000 = 23 \cdot 176 - 48 = 23 \cdot 174 - 2 \Rightarrow 4232 = 23 \cdot 184;$$

$$5000 = 23 \cdot 220 - 60 = 23 \cdot 218 - 14;$$

$$6000 = 23 \cdot 264 - 72 = 23 \cdot 261 - 3 \Rightarrow 6233;$$

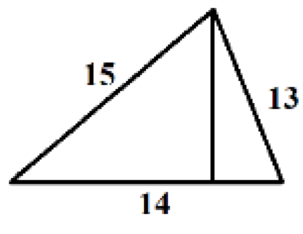
$$8000 = 23 \cdot 354 - 96 = 23 \cdot 350 - 4 \Rightarrow 8234.$$

Ответ: 2231, 4232, 6233, 8234.

▹ **Задача 2.** Даны 84 треугольные плитки со сторонами 13,14,15. Какой наибольший по площади квадрат мастера могут замостить этой плиткой, если разрешается разрезание любой плитки не более, чем на три части?

Решение:

$$S_{\Delta} = 84$$



$$S = \frac{1}{2} h \cdot 14 = 84,$$

$$h = 12,$$

$$84^2 = 7056.$$

Ответ: 7056.

▹ **Задача 3.** Решите уравнение

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}}=\frac{53}{37}.$$

Решение:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}}=\frac{53}{37}\Leftrightarrow\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}}=\frac{16}{37}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}=\frac{37}{16}\Leftrightarrow\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+x}}=\frac{5}{16}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{1}{4+x}=\frac{16}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{4+x}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x+4=5\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $x=1$.

▹ **Задача 4.** Пусть запись $a\vartriangle b$ обозначает наименьшее из чисел $a+b$ и $2b$. Решите уравнение $x\vartriangle 20=23\vartriangle x$.

Решение: Запись $x\vartriangle 20$ может означать либо $2x$ (если $x\geq 20$), либо $x+20$ (если $x\leq 20$). Запись $23\vartriangle x$ – либо 46 (если $x\leq 46$), либо $46+x$ (если $x\geq 46$). Поэтому наше уравнение выглядит так: $2x=46$ (если $20\leq x\leq 23$), либо $x+20=46$ (если $x\leq 20$), либо $2x=23+x$ (если $x\geq 23$).

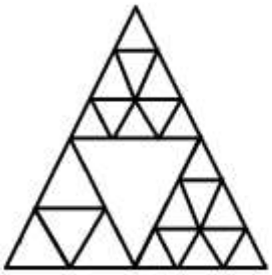
Первое уравнение даёт ответ 13, не отвечающий условию $20\leq x\leq 23$, второе – ответ 23, не отвечающий условию $x\leq 20$, третье – ответ 23, отвечающий условию $x\geq 23$. Следовательно, $x=23$.

Ответ: 23.

▹ **Задача 5.** Можно ли разрезать правильный треугольник на 23 правильных треугольника?

Решение: Да, можно. Как это сделать:

$$1\Rightarrow 4\Rightarrow 3+9=12\Rightarrow 11+9=20\Rightarrow 19+4=23.$$



Ответ: Да.

▹ **Задача 6.** Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр 2023?

Решение:

$$\left(5\cdot 10^k+2023\right)^2=25\cdot 10^{2k}+2023\cdot 10^{k+1}+2023^2;$$

$$2023^2=4092529 \Rightarrow k=6;$$

$$5002023^2=25020234092529.$$

Ответ: 5002023.

▹ **Задача 7.** Выписаны подряд все числа от 1 до 60 без пробелов между цифрами 123456789101112...585960. Вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число осталось наибольшим.

Решение: Всего выписано 111 цифр (9 – на однозначные числа и ещё 102 на 51 двузначное число). Значит, после вычёркивания 100 цифр останется 11-значное число. Чтобы оно было самым большим, нужно поставить в нём на первое место 9, как и на последующие. Однако девяток в нашей записи всего 6. Если мы выпишем их все, то за последней девяткой цифр будет всего 2. Попробуем оставить девятки только от чисел 9, 19, 29, 39 и 49. Тогда у нас получится такое число: 999995051525354555657585960. От него можно оставить после 99999 ещё 6 цифр. Так как девятку поставить нельзя, поставим самое большое из возможных чисел – 7 (8 нельзя – мало цифр), вычеркнув всё кроме первой цифры 7 и зачеркивая всё, кроме больших цифр. Остаётся: 99999785960 .

Ответ: 99999785960.

▹ **Задача 8.** Найти все пары натуральных чисел, разность которых равна 170, а их наименьшее общее кратное 2023.

Решение:

$$a-b=170=17\cdot 2\cdot 5;$$

$$\text{НОК}(a,b)=2023=7\cdot 17^2.$$

Пусть

$$a=xd\ (x,y)=1;\ b=yd;$$

$$\begin{cases} d(x-y)=2\cdot 5\cdot 17, \\ x\cdot yd=7\cdot 17^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d=17, \\ x-y=10, \\ xy=7\cdot 17, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=17, \\ x=17, \\ y=7, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=289, \\ b=119. \end{cases}$$

Ответ: 289; 119

▹ **Задача 9.** Запишем предложение "Четыре усталых молчаливых путника долго пережидали внезапно разразившуюся грозу". Будем вычёркивать из него слова так, чтобы всякий раз получалось правильное предложение (например, нельзя вычеркнуть слово "четыре", но можно вычеркнуть слово "усталых"). Вычеркивать слова можно в любом порядке одно за другим. Сколькими способами можно прийти к предложению, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова?

Решение: Конечное предложение, из которого уже нельзя вычеркнуть ни одного слова, – это "четыре путника пережидали грозу", и поэтому из исходного предложения нужно вычеркнуть 5 слов. Эти слова можно вычеркивать в любом порядке, за исключением одного ограничения: слово "разразившуюся" нельзя вычеркивать раньше слова "внезапно". Таким образом надо выяснить, сколькими различными способами можно поставить в ряд 5 предметов, чтобы первый предмет был всегда раньше второго? Она решается просто: число способов расстановки пяти предметов в ряд равно

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$, и из них ровно половина, т.е. 60, удовлетворяют указанному условию. К конечному предложению можно прийти 60 способами.

Ответ: 60.

▹ **Задача 10.** Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается цифра 1, или тех, в записи которых её нет?

Решение: Подсчитаем количество чисел от 0 до 999999, в записи которых нет единиц, т.е. сколько можно составить шестизначных чисел из цифр 0, 2, 3, 4, …, 9 (если число имеет менее шести цифр, условимся дописывать слева недостающее число нулей). На первом месте в таком числе может стоять любая из девяти цифр, к каждой из них можно приписать справа любую из тех же девяти цифр: 0, 2, 3, 4, …, 9; таким образом, получится 81 двухзначное число из цифр 0, 2, 3, 4, …, 9. Продолжая таким образом, получим 9^6 шестизначных чисел, из них нужно исключить 000000. Таким образом, показано, что среди первого миллиона существуют ровно $9^6 - 1$ чисел, в записи которых нет единиц, т.е. $9^6 - 1 = 531371$.

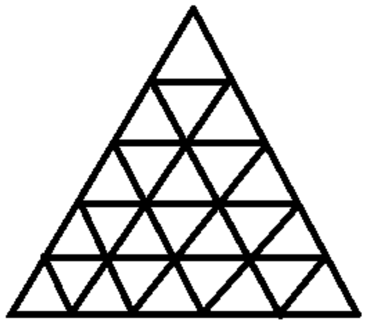
Таким образом, среди первого миллиона больше чисел, в записи которых нет единиц.

8 класс

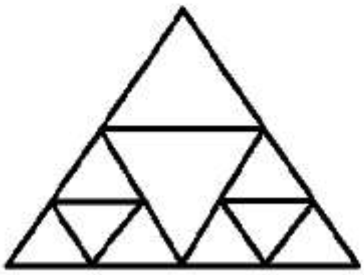
▹ **Задача 1.** Можно ли разрезать правильный треугольник на

а) 2022; б) 2023; в) 2024 равносторонних треугольника?

Решение: Если сторону равностороннего треугольника разрезать на n частей, то треугольник можно разделить на n^2.



а) $$2022 = 4 \cdot 22^2 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 1$$



4 треугольника разрезаем на 22^2 треугольников

2 треугольника – на 6^2;

1 треугольник – на 3^2;

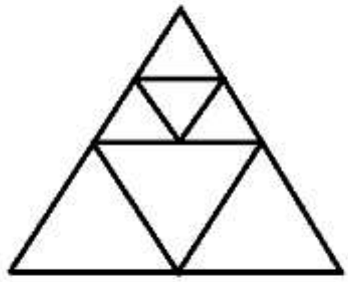
1 треугольник – на 2^2;

1 треугольник – без изменений.

б) если известно разрезание для $n = 3k - 2$ (разрезая один из треугольников на 4 части по средним линиям), то известно и для $n = (3k - 2) - 1 + 4 = 3k + 1$.

$$2023 = 3 \cdot 667 + 1$$

в) $$2024 = 4 \cdot 22^2 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 4^2$$



7 треугольников:

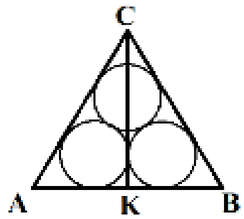
4 треугольника – разрезаем на 22^2 треугольников;

2 треугольника – на 6^2;

1 треугольник – на 4^2.

▹ **Задача 2.** В правильный треугольник со стороной *a* вписаны три касающиеся друг друга равные окружности. Найдите их радиус.

Решение: Проведём медиану *CK*, она пройдёт через точку касания двух окружностей, касающихся сторон *AB*.



Тем самым они окажутся вписанными в равные ΔACK и ΔBCK. Радиус вписанной в треугольник окружности можно найти, поделив удвоенную площадь треугольника на его периметр. В нашем случае $P_{\Delta ACK} = AC + CK + AK = a + \frac{a\sqrt{3}}{a} + \frac{a}{2} = a\left(3+\sqrt{3}\right)/2,\ 2S_{\Delta ACK} = AK \cdot CK = a^2\sqrt{3}/4.$

Ответ: $a \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

▹ **Задача 3.** В некотором месяце три субботы пришлись на нечётные числа. Какой день недели был 13 числа этого месяца?

Решение: Пусть А – первая из "нечётных" суббот, В – вторая, С – третья. От одной субботы месяца до другой может быть 7, 14, 21 или 28 дней. Однако число дней от одного нечётного числа месяца до другого его нечётного числа должно быть чётным. Поэтому от А до В должно быть 14 дней, а от А до С – 28 дней, тогда суббота А может приходиться на первое число или на третье, если в месяце 31 день. Если А – третье, то В – 17-е, а С – 31-е, 13-е число – вторник. А если А – первое число, В – 15-е число, С – 29-е число, то 13-е число четверг.

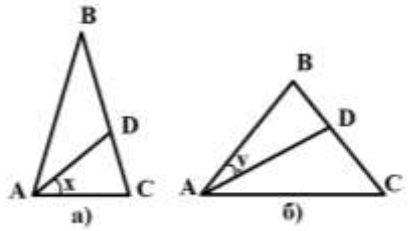
Ответ: Вторник (если в месяце 31 день) или четверг.

▹ **Задача 4.** Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна одной из его сторон. Какое наименьшее значение может принимать наибольший угол этого треугольника?

Решение: Возможны два случая:

а) биссектриса равна основанию треугольника;

б) биссектриса равна боковой стороне треугольника.



а) обозначим угол *DAC* через *x*. Поскольку *AD* – биссектриса и $AB = BC$, каждый из двух углов *BAC* и *BCA* равен $2x$. Но угол *BCA* равен также углу *CDA*, т.к. треугольник *DAC* по условию равнобедренный. Теперь, находя сумму углов треугольника *DAC*, получаем $x + 2x + 2x = 180°$, откуда $x = 36°$. Далее без труда находим, что в треугольнике *ABC* $\angle A = \angle C = 72°$, а $\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 36°$.

Ответ: $72°, 72°, 36°$.

б) Обозначим угол *BAD* через *y* (как и в случае а)) каждый из двух углов *BAC* и *BCA* равен $2y$. Из треугольника *ABC* найдём, что угол $ABC = 180° - 4y$. Теперь рассмотрим треугольник *BAD*. В нём $AB = AD$, поэтому угол ADB равен углу ABC. Находя теперь сумму углов треугольника BAD, получаем уравнение $2(180° - 4y) + y = 180°$, откуда $y = \frac{180°}{7}$. Находя теперь углы треугольника ABC, получаем $\angle A = \angle C = 2y = \frac{360°}{7}$ и $\angle B = 180° - 4y = \frac{540°}{7}$.

Ответ: $\frac{360°}{7}, \frac{360°}{7}, \frac{540°}{7}$.

Надо найти наименьшее значение из наибольших углов. Наибольшие углы – $\frac{540°}{7}$ и $72°$. Наименьшее значение – $72°$.

Ответ: $72°$.

▹ **Задача 5.** На доске записана сумма

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}.$$

а) Найдите эту сумму.

б) Выберите из этой суммы несколько слагаемых так, чтобы оставшаяся сумма была равна 2023.

Решение: а) Прибавим к нашей сумме 1. Получим: $1 + 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{10} = 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} = \ldots = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11}$. Исходная сумма равна $2^{11} - 1 = 2047$.

б)
$$2023 = 2047 - 24;$$
$$24 = 2^4 + 2^3.$$

Ответ: а) 2047, б) $2023 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^2 + 2 + 1$.

▹ **Задача 6.** Пусть запись $a'' b$ обозначает наибольшее из чисел $2a$ и $a + b$, а запись – $a \triangle b$ – наименьшее из чисел $a + b$ и $2b$.

Найдите все целые решения уравнения $x'' 20 = 23 \triangle x$.

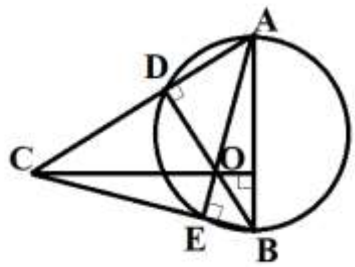
Решение:

Уравнение	Условие для уравнения	Полученное x	Подходящие x по условию
$x+20=2x$	$x \leq 20$	$x=20$	$x=20$
$x=x$	$20 \leq x \leq 23$	x – любое	$x=20;21;22;23$
$2x=23+x$	$x \geq 23$	$x=23$	$x=23$

Ответ: 20; 21; 22; 23.

▹ **Задача 7.** Даны окружность с проведённым в ней диаметром AB и точка C, не лежащая ни на окружности, ни на прямой AB. Как с помощью одной линейки опустить из точки C перпендикуляр на прямую AB? Центр окружности не дан.

Решение: Проведём прямые AC и BC.



Обозначим вторые их точки пересечения с окружностью соответственно через D и E. Углы $\angle ADB$ и $\angle AEB$ – прямые, т.к. вписаны в окружность и опираются на её диаметр AB. Поэтому AE и BD – высоты в ΔABC. Пусть O – точка их пересечения. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, прямая CO содержит третью высоту треугольника ABC и, следовательно, является искомым перпендикуляром.

▹ **Задача 8.** Существует ли число, в десятичной записи квадрата которого имеется последовательность цифр 2023?

Решение:

$$(5\cdot 10^{k}+2023)^{2}=25\cdot 10^{2k}+2023\cdot 10^{k+1}+2023^{2};$$

$$2023^{2}=4092529 \Rightarrow k=6;$$

$$5002023^{2}=25020234092529.$$

Ответ: 5002023.

▹ **Задача 9.** Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a,b)=60$, $\text{НОК}(a,c)=270$. Найти $\text{НОК}(b,c)$.

(НОК – наименьшее общее кратное).

Решение:

$$\text{НОК}(a,b)=60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5,$$

$$\text{НОК}(a,c)=270=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5.$$

Очевидно, что числа a, b и c можно представить в виде $a=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\alpha_5}$, $b=2^{\beta_2}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\beta_5}$, $c=2^{\gamma_2}\cdot 3^{\gamma_3}\cdot 5^{\gamma_5}$.

$\text{НОК}(b,c)=2^{\lambda_2}\cdot 3^{\lambda_3}\cdot 5^{\lambda_5}$, где λ – наибольшее из чисел β и γ: $\lambda_i=\max(\beta_i;\gamma_i)$, $i=2,3,5.$

Рассмотрим по отдельности каждый из множителей.

1) Допустим сначала, что в числе a есть двойка, то есть $\alpha_2=1$. Тогда в числе b должно быть две двойки, в противном случае их не было бы в $\text{НОК}(a,b)$. В числе c может либо не быть двоек, либо одна двойка.

2) Запишем этот случай в виде:

$$\alpha_2=1, \beta_2=2, \gamma_2=0$$

или

$$\gamma_2=1.$$

Выбирая наибольшее между β и γ, получаем $\tau_2=2$.

Рассуждая аналогично, получим:

$$\alpha_2=0, \beta_2=2, \gamma_2=1 \Rightarrow \tau_2=2.$$

3) Такие же рассуждения для тройки:

$$\alpha_3=0, \beta_3=1, \gamma_3=3 \Rightarrow \tau_3=3.$$

$$\alpha_3=1, \beta_3=0$$

или

$$\beta_3 = 1,\ \gamma_3 = 3 \Rightarrow \tau_3 = 3.$$

4) Для пятёрки:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 1, \gamma_5 = 1 \Rightarrow \tau_5 = 5.$$

$$\alpha_5 = 1, \beta_5 = 0$$

или

$$\beta_5 = 1, \gamma_5 = 0$$

или

$$\gamma_5 = 1 \Rightarrow \tau_5 = 0$$

или

$$\tau_5 = 1.$$

Таким образом, $\text{НОК}(b,c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 = 108$ или $\text{НОК}(b,c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540.$

Ответ: $\text{НОК}(b,c) = 108$ или $\text{НОК}(b,c) = 540.$

▹ **Задача 10.** Клетки шахматной доски занумерованы по порядку числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд слева направо – числами от 1 до 8, второй горизонтальный ряд слева направо – числами от 9 до 16 и т.д. На доске расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Какое наибольшее значение может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи?

Решение: Напишем сверху над каждой вертикалью шахматной доски числа $1, 2, 3, \ldots, 8,$ слева около каждой горизонтали – числа 0, 8, 16, 24, …, 56; тогда можно считать, что в каждой клетке доски написана сумма двух чисел, соответствующих её вертикалям и горизонталям. Так как 8 ладей, стоящих на шахматной доске, не бьют друг друга, то обязательно в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит по одной ладье. Значит, в сумму номеров тех клеток, на которых стоят ладьи, войдут по одному разу все числа 1, 2, …, 8, соответствующие разным вертикалям, и по одному разу все числа 0, 8, 16, …, 56, соответствующие разным горизонталям. Поэтому сумма номеров всегда будет иметь одно и то же значение: $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 0 + 8 + 16 + \ldots + 56 = 260.$

Ответ: 260.

9 класс

▹ **Задача 1.** Доказать, что при неравных положительных *a, b* и *c*:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}>\frac{a+b+c}{3}.$$

Решение: Попробуем доказать от противного. Из данного уравнения мы имеем:

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)>\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a+b+c\right)$$

или

$$3\left(a^3+b^3+c^3\right)>a^3+ab^2+ac^2+a^2b+b^3+bc^2+a^2c+b^2c+c^3.$$

Отсюда:

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)>\left(a^2b+ab^2\right)+\left(b^2c+bc^2\right)+\left(a^2c+ac^2\right)$$

или

$$\left(a^3+b^3\right)+\left(b^3+c^3\right)+\left(a^3+c^3\right)>ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ac\left(a+c\right);$$

$$\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)+\left(b+c\right)\left(b^2-bc+c^2\right)+\left(a+c\right)\left(a^2-ac+c^2\right)>$$

$$>ab\left(a+b\right)+bc\left(b+c\right)+ac\left(a+c\right).$$

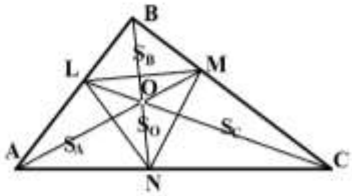
Отсюда, по перенесении всех членов в левую часть, получим:

$$\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2+\left(b+c\right)\left(b-c\right)^2+\left(a+c\right)\left(a-c\right)^2>0.$$

Но это неравенство очевидно при положительных и неравных между собой числах *a, b* и *c*. Отсюда, производя преобразования в обратном порядке, получим требуемое неравенство.

▹ **Задача 2.** Основания биссектрис треугольника *ABC* со сторонами *a, b, c* соединены прямыми. Найти отношение площади каждого из четырёх полученных треугольников к площади данного.

Решение:



По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{AN}{NC}=\frac{c}{a}.$$

Беря производные пропорции, получим:

$$\frac{AN}{AN+NC}=\frac{AN}{b}=\frac{c}{a+c};\ AN=\frac{bc}{a+c};$$

$$\frac{AN+NC}{NC}=\frac{b}{NC}=\frac{a+c}{a};\ NC=\frac{ab}{a+c}.$$

Аналогично получим:

$$AL=\frac{bc}{a+b};\ LB=\frac{ac}{a+b};\ BM=\frac{ac}{b+c};\ MC=\frac{ab}{b+c}.$$

Обозначив площадь треугольника ABC через S и применяя теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, найдём:

$$\frac{S_a}{S}=\frac{AL\cdot AN}{AC\cdot AB}=\frac{cb}{a+b}\cdot\frac{bc}{a+c}:bc=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично получим:

$$\frac{S_B}{S}=\frac{ac}{(b+a)(b+c)};$$

$$\frac{S_C}{S}=\frac{ab}{(c+a)(c+b)}.$$

Нетрудно видеть, что последнее равенство можно было получить из предпоследнего круговой подстановкой. Сложим их:

$$\frac{S_A+S_B+S_C}{S}=\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Найдём, наконец, $\frac{S_O}{S}$:

$$\frac{S_O}{S}=\frac{S-(S_A+S_B+S_C)}{S}=1-\frac{S_A+S_B+S_C}{S}=1-\frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

После очевидных преобразований из предыдущего равенства получим:

$$\frac{S_O}{S}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

▹ **Задача 3.** Найти число, содержащее только множители 2 и 3 и обладающее тем свойством, что число всех делителей его куба в 7 раз больше делителей самого числа.

Решение: Согласно условию искомое число x имеет вид:

$$x = 2^m \cdot 3^n.$$

Тогда

$$x^3 = 2^{3m} \cdot 3^{3n}.$$

Число всех делителей этих чисел будет

$$(m+1)(n+1) \text{ и } (3m+1)(3n+1).$$

По условию:

$$(3m+1)(3n+1) = 7(m+1)(n+1). \qquad (1)$$

Из последнего равенства следует, что или $3m+1$, или $3n+1$ должно делиться на 7.

Пусть $3m+1=7t$, где t – натуральное число и $m=7k+a$, где $a<7$. Тогда

$$3m+1 = 21k+3a+1 = 7t.$$

Отсюда заключаем, что $3a+1$ должно делиться на 7, что может быть лишь при $a=2$. Значит m имеет вид

$$m = 7k+2.$$

Подставив это выражение в (1), получим:

$$(21k+7)(3n+1) = 7(7k+3)(n+1),$$

или

$$(3k+1)(3n+1) = (7k+3)(n+1). \qquad (2)$$

Из (2) определим n. Найдем

$$n = \frac{2k+1}{k} = 2 + \frac{1}{k}.$$

Но так как n число целое, то может быть только $k=1$. Отсюда

$$n = 3 \text{ и } m = 7k+2 = 9.$$

Искомое число

$$x = 2^9 \cdot 3^3 = 13824.$$

Так как уравнение (1) симметрично относительно m и n, то, очевидно, предположив, что $3n+1$ делится на 7, найдём

$$m = 3 \text{ и } n = 9.$$

Получим второе решение:

$$x = 2^3 \cdot 3^9 = 157464.$$

Ответ: 13824 и 157464.

▹ **Задача 4.** Построены: четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник и т.д. Число диагоналей во всех многоугольниках 800. Сколько построено многоугольников?

Решение: Пусть число многоугольников равно x. Тогда последний многоугольник будет иметь $x+3$ стороны. Число диагоналей в многоугольнике выражается формулой:

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Давая здесь n значения 4,5,6,..., $x+3$, получим по условию:

$$\frac{4(4-3)}{2}+\frac{5(5-3)}{2}+\ldots+\frac{(x+3)|(x+3)-3|}{2}=800$$

или

$$\left[4^2+5^2+6^2+\ldots+(x+3)^2\right]-3\left[4+5+6+\ldots+(x+3)\right]=1600. \tag{1}$$

Но по известным формулам:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(x+3)^2=\frac{(x+3)(x+4)(2x+7)}{6};$$

$$4+5+6+\ldots+(x+3)=\frac{(x+7)x}{2}.$$

Следовательно, уравнение (1) мы можем переписать в виде:

$$\frac{(x+3)(x+4)(2x+7)}{6}-1^2-2^2-3^2-\frac{3x(x+7)}{2}=1600$$

или

$$\left(x+3\right)\left(x+4\right)\left(2x+7\right)-9x\left(x+7\right)=9684.$$

После обычных упрощений, получим:

$$x^3+6x^2+5x-4800=0.$$

Преобразуем левую часть:

$$x^3+6x^2+5x-4800=x^3-15x^2+21x^2-315x+320x-4800=$$

$$=x^2\left(x-15\right)+21x\left(x-15\right)+320\left(x-15\right)=\left(x-15\right)\left(x^2+21x+320\right).$$

Итак, имеем:

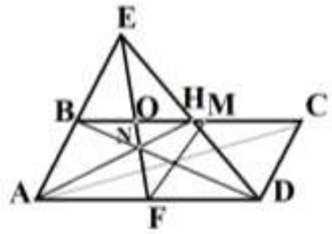
$$\left(x-15\right)\left(x^2+21x+320\right)=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) даёт одно действительное значение для *x*, а именно:

$$x=15.$$

▹ **Задача 5.** При помощи одной линейки разделить параллелограмм на две части, площади которых относятся как 3:1.

Решение: На продолжении стороны *AB* возьмём произвольную точку *E* и соединим её с *D*.



Разделим параллелограмм сначала на две равновеликие части. Докажем, что мы можем опустить прямую из точки *E*, которая разделит сторону *AD* пополам. Параллельные прямые *AD* и *BH* рассечены прямыми *EA*, *EF* и *ED* на пропорциональные части. Отсюда:

$$\frac{AF}{FD}=\frac{BO}{OH}.$$

Из подобия треугольников *ANF* и *HNO* имеем:

$$\frac{AF}{OH}=\frac{NF}{NO}.$$

Из подобия треугольников FND и ONB:

$$\frac{NF}{NO}=\frac{FD}{BO},$$

$$\frac{AF}{OH}=\frac{FD}{BO},$$

$$\frac{AF}{FD}=\frac{OH}{BO},$$

$$\frac{AF^2}{FD^2}=1,$$

откуда

$$\frac{AF}{FD}=1, AF=FD.$$

Прямая FM, проведённая через точку a и через точку пересечения диагоналей параллелограмма, и будет искомой. Далее делим на две равновеликие части один из полученных параллелограммов, таким образом, решая задачу.

▹ **Задача 6.** Приведите пример многочлена $P(x)$, такого, что $P(20)=23$, $P(23)=20$, который во всех рациональных точках интервала $(20;23)$ принимает иррациональные значения.

Решение: Добавим иррациональный множитель для того, чтобы при рациональных $x\in(20;23)$ многочлен $P(x)$ принимал иррациональные значения. Однако для того чтобы при $x\in(20;23)$ значение не было иррациональным, приравняем другие множители к нулю. Чтобы получить необходимое значение, добавим параметры a и b. Получим:

$$P(x)=\sqrt{2}(x-20)(x-23)-ax+b.$$

Подставляя значения x, получаем систему, при решении которой находим параметры a и b:

$$\begin{cases}\sqrt{2}(20-20)(20-23)-20a+b=23;\\ \sqrt{2}(23-20)(23-23)-23a+b=20.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -20a+b=23, \\ -23a+b=20. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=1, \\ b=43. \end{cases}$$

Ответ: $P(x)=\sqrt{2}(x-20)(x-23)-x+43$.

▹ **Задача 7.** Докажите, что уравнение $x^3-y^3=2023$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение:

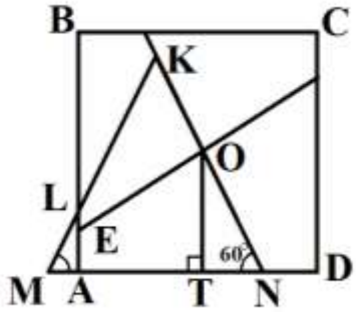
$$x>y,$$

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y).$$

$x-y$,, 12	$3xy(x-y)$
$12^3=1728$	295 не делится на 3
$11^3=1331$	692 не делится на 3
$10^3=1000$	$1023:3=341 \quad xy\cdot 10=341\varnothing$
$9^3=729$	1294 не делится на 3
$8^3=512$	1511 не делится на 3
$7^3=343$	$1680:3=560 \quad xy\cdot 7=560 \quad xy=80\varnothing$
$6^3=216$	1807 не делится на 3
$5^3=125$	1898 не делится на 3
$4^3=64$	$1959:3=653 \quad xy\cdot 4=653\varnothing$
$3^3=27$	1996 не делится на 3
$2^3=8$	2015 не делится на 3
$1^3=1$	$2022:3=674 \quad xy=674\varnothing$

▹ **Задача 8.** В квадрате со стороной 12 расположены 2023 точки. Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 11, в котором расположено, по крайней мере, 500 из этих точек.

Решение: Разобьём исходный квадрат на четыре одинаковые части так, как показано на рисунке.



По принципу Дирихле, по крайней мере, в одной из них находится не менее 500 точек. Докажем, что *AEON* можно накрыть равносторонним треугольником *MNK*. Пусть *O* – центр квадрата *ABCD* со стороной 12, *T* – середина стороны *AD*, а равносторонний треугольник *MNK* со стороной 111 расположен так, как показано на рисунке. Тогда

$$ND = TD - TN = TD - OT \cdot \mathrm{ctg}\ 60^\circ = 6 - 6/\sqrt{3},$$

$$MA = MN - AN = MN - (AD - ND) = 5 - 6/\sqrt{3}.$$

Следовательно, $AL = MA \cdot \ \mathrm{tg}60^\circ = 5\sqrt{3} - 6 > ND = AE$, и поэтому треугольник *MKN* полностью покрывает четырёхугольник *AEON*.

▹ **Задача 9.** Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

если α, β, γ - углы некоторого треугольника?

Решение:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right)+\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\beta\right)+\sin^2\gamma=$$

$$=1-\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)+\sin^2\gamma=$$

$$=1-\sin\gamma\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]=$$

$$=1-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Поэтому

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$

$$=1+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Но если 2α, 2β, 2γ – углы некоторого треугольника, то, как известно,

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{9}{8}.$$

Ответ: $\frac{9}{8}$.

▹ **Задача 10.** В плоскости имеются a параллельных прямых, пересечённых b параллельными прямыми. Сколько при этом образовалось параллелограммов?

Решение: Для простоты допустим, что прямые пересекаются под прямым углом. Тогда стороны прямоугольников будут служить их основанием и высотой. Подсчитаем, сколько получится прямоугольников с некоторым основанием k и высотой l. Очевидно, что левая нижняя вершина такого прямоугольника может лежать лишь на 1-й, 2-й, …, $\left(a-k\right)$-й из вертикальных прямых (так как если взять эту вершину на $\left(a-k+1\right)$-й прямой, то правая вершина будет уже за a-й прямой). Другими словами, если принять нашу сеть за координату, то абсцисса x левой нижней вершины прямоугольника может принимать $(a-k)$ значений от 1 до $(a-k)$.

Точно так же найдем, что ордината у той же вершины может принимать $(b-l)$ значений. Комбинируя эти значения, получим всего $(a-k)(b-l)$ прямоугольников со сторонами k и l.

Но k может принимать значения от 1 до $(a-1)$, а l – от 1 до $(b-1)$. Оставляя пока l фиксированным и давая k значения 1, 2, …, $a-1$, получим

$$(b-1)\left[(a-1)+(a-2)+(a-3)+\ldots+2+1\right]=(b-l)\frac{a(a-1)}{2}$$

прямоугольников. Наконец, давая l значения 1,2, …, $(b-1)$ и складывая результаты, получим всего

$$\left[(b-1)+(b-2)+\ldots+2+1\right]\frac{a(a-1)}{2}=\frac{a(a-1)b(b-1)}{4}$$

прямоугольников. Ход рассуждений остаётся абсолютно тем же, если вместо прямоугольников возьмём параллелограммы. Полученные решения отличаются исключительно длиной.

10 класс

▹ **Задача 1.** Робот случайным образом выбирает натуральные числа x от 1 до 10000. Какова вероятность, что $N = 2^x - x^2$ не кратно 7?

Решение: Вычислим, сколько существует целых чисел от 1 до 10000, для которых $2^x - x^2$ не делится на 7.

Исключим из значений x от 1 до 10000 те, при которых данное выражение делится на 7. Подсчитаем последние случаи. Для того чтобы $2^x - x^2$ делилось на 7, необходимо, чтобы 2^x и x^2 при делении на 7 давали равные остатки. Легко проверить, что остатки от деления 2^x на 7, начиная от $x=1$, будут идти в такой последовательности: $2,4,1,2,4,1,2,4,1\ldots$

Остатки же от деления x^2 будут: $1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0\ldots$ Итак, первые остатки повторяются через 3, а вторые через 7 . Значит, через каждые 21-е значения x оба остатка будут повторяться, т.е. например, при $x = 22$ оба остатка будут те же, что и при $x = 0$, при $x = 23$ – те же, что и при $x = 2$, и т.д. Следовательно, достаточно будет подсчитать, при скольких значениях x в пределах 1,, x,, 21 2^x и x^2 будут давать равные остатки.

Равные остатки получаются при $x = 2,4,5,6,10,15,$ всего шесть значений. Так как 10000 = 21 · 476 + 4, то чисел, делящихся на 7, будет 6 · 476 = 2856 и ещё два числа при x = 21 · 476 + 2 и при x = 21 · 476 + 4. Всего 2858 чисел. Отсюда чисел, не делящихся на 7, будет:

$$10000 - 2858 = 7142.$$

Следовательно, вероятность равна 0,7142.

Ответ: 0,7142.

▹ **Задача 2.** При каких значениях n сумма натуральных чисел от 1 до n делится на 99?

Решение: Сумма n первых натуральных чисел равна $\dfrac{n(n+1)}{2}$. По условию должно быть:

$$\frac{n(n+1)}{2}=99m,$$

или:

$$n(n+1)=2\cdot 9\cdot 11m,$$

где m – натуральное число. Так как n и $n+1$ – взаимно простые числа (причем одно из них непременно чётное), то одно из них должно делиться на 9. Одновременно это же число или второе должно делиться на 11. Отсюда имеем следующие возможные случаи:

$$n=99x,$$

$$n+1=99x,\text{ откуда } n=99x-1.$$

Оба решения удовлетворяют задаче при любом $x \ldots 1$.

$$n=9x;\ n+1=11y,\quad x \text{ и } y-\text{разной чётности.}$$

Отсюда:

$$11y-9x=1.$$

Последнее уравнение решим обычным способом. Имеем:

$$x=\frac{11y-1}{9}=y+\frac{2y-1}{9}.$$

Совершенно очевидно, что $\frac{2y-1}{9}$ дает целое значение при $y=5$; тогда из уравнения получим $x=6$.

Итак, имеем третье решение задачи:

$$x=11t+6,$$

а, следовательно,

$$n=99t+54.$$

$$n=11x;\ n+1=9y.$$

Отсюда:

$$9y-11x=1.$$

Так же, как и в предыдущем случае, найдем:

$$x=9t+4$$

и, следовательно:

$$n = 99t + 44.$$

Получаем четвертое решение.

Сопоставляя формулы, заключаем, что все значения n, удовлетворяющие условию задачи, являются членами одной из четырех арифметических прогрессий, у которых разность $d = 99$, а первые члены равны 44, 54, 98 и 99.

Ответ: 44, 54, 98 и 99.

▹ **Задача 3.** Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд слева направо – числами от 1 до 8, второй горизонтальный ряд слева направо – числами от 9 до 16 и т.д. На доске расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Какое наименьшее значение может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи?

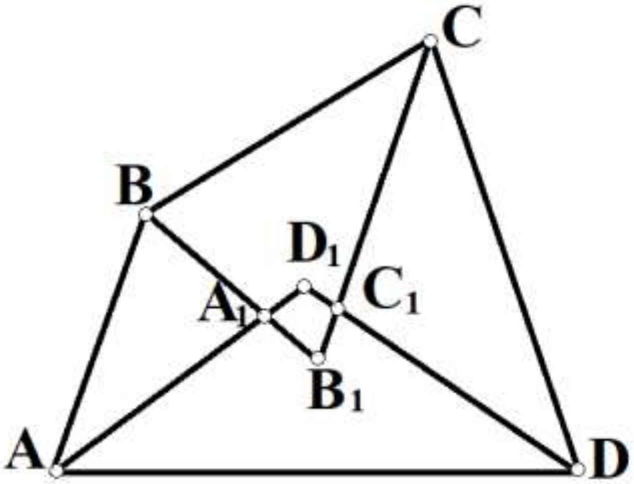
Решение: Напишем сверху над каждой вертикалью шахматной доски числа $1, 2, 3, \ldots, 8,$ слева около каждой горизонтали – числа 0, 8, 16, 24, …, 56; тогда можно считать, что в каждой клетке доски написана сумма двух чисел, соответствующих её вертикалям и горизонталям. Так как 8 ладей, стоящих на шахматной доске, не бьют друг друга, то обязательно в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит по одной ладье. Значит, в сумму номеров тех клеток, на которых стоят ладьи, войдут по одному разу все числа 1, 2, …, 8, соответствующие разным вертикалям, и по одному разу все числа 0, 8, 16, …, 56, соответствующие разным горизонталям. Поэтому сумма номеров всегда будет иметь одно и то же значение: $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 + 0 + 8 + 16 + \ldots + 56 = 260.$

Ответ: 260.

▹ **Задача 4.** Биссектрисы углов данного выпуклого четырёхугольника своими пересечениями образуют новый четырёхугольник внутри данного. Биссектрисы этого нового четырёхугольника опять образуют четырёхугольник и т.д. Найти пределы, к которым стремятся последовательности углов этих четырёхугольников.

Решение: В первом полученном четырёхугольнике $A_1B_1C_1D_1$ имеем:

$$\begin{cases} \text{из } \Delta AA_1B: A_1 = 180° - \dfrac{A+B}{2}; \\ \text{из } \Delta BB_1C: B_1 = 180° - \dfrac{B+C}{2}; \\ \text{из } \Delta DC_1C: C_1 = 180° - \dfrac{C+D}{2}; \\ \text{из } \Delta AD_1D: D_1 = 180° - \dfrac{D+A}{2}. \end{cases} \tag{1}$$



Совершенно аналогично для углов второго четырёхугольника найдём:

$$A_2 = 180° - \frac{A_1+B_1}{2}, \tag{2}$$

но из (1) имеем:

$$\frac{A_1+B_1}{2} = 180° - \frac{A+2B+C}{4}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{A+2B+C}{4}, \\ B_2 = \dfrac{B+2C+D}{4}, \\ C_2 = \dfrac{C+2D+A}{4}, \\ D_2 = \dfrac{D+2A+B}{4}. \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) найдём:

$$A_2 - C_2 = \frac{B - D}{2};\ B_2 - D_2 = \frac{A - C}{2}. \qquad (5)$$

Точно так же, продолжая далее, найдём:

$$A_4 - C_4 = \frac{B_2 - D_2}{2};\ B_4 - D_4 = \frac{A_2 - C_2}{2}. \qquad (6)$$

Итак, заменяя правые части в (6) из (5):

$$A_4 - C_4 = \frac{A - C}{4}; B_4 - D_4 = \frac{B - D}{4}. \qquad (7)$$

Итак, после четырёхкратного построения разность между противоположными углами четырёхугольников уменьшается вчетверо. После $4n$ построений будем иметь:

$$A_{4n} - C_{4n} = \frac{A - C}{4^n};\quad B_{4n} - D_{4n} = \frac{B - D}{4^n}.$$

Отсюда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(A_{4n} - C_{4n}\right) = 0;\quad \lim_{n\to\infty}\left(B_{4n} - D_{4n}\right) = 0$$

или:

$$\lim A_{4n} = \lim C_{4n};\quad \lim B_{4n} = \lim D_{4n}. \qquad (8)$$

Но

$$A_{4n} + C_{4n} = \left(180^\circ - \frac{A_{4n-1} + B_{4n-1}}{2}\right) + \left(180^\circ - \frac{C_{4n-1} + D_{4n-1}}{2}\right) =$$

$$= 360^\circ - \frac{A_{4n-1} + B_{4n-1} + C_{4n-1} + D_{4n-1}}{2} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) заключаем, что

$$\lim A_{4n} = \lim C_{4n} = 90^\circ.$$

То же самое можно сказать относительно углов B_{4n} и D_{4n}.

Ответ: 90°.

▹ **Задача 5.** Пусть *A*, *B*, *C* – углы треугольника. Какое наименьшее значение может принимать выражение $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}$?

Решение: Докажем, что

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\ldots\frac{1}{8}.$$

Имеем:

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right]\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{180-C}{2}0\right]\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\sin^2\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right)+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2\ldots\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\ldots\frac{1}{8}.$$

Равенство достигается при $A=B=C=60°$, тогда

$$\left(\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\right)^{-1}\ldots 64.$$

Применив теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\ldots$$

$$\ldots 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{(\frac{1}{8})^2}}=12.$$

Ответ: 12.

▹ **Задача 6.** Пусть $f(t)=\frac{2t-1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2t-1}{2}\pi\right)$. Найдите такие $x, y, z,$ что

$$\begin{cases} x+f(y)+z=2{,}1+f(z), \\ x+y+f(z)=3{,}2+f(x), \\ f(x)+y+z=4{,}3+f(y). \end{cases}$$

Решение: Докажем, что $f(t)=[t]$. Полагая $t=k+\alpha$, где k – целое число, а $0<\alpha<1$, будем иметь

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2t-1}{2}\pi\right)= \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(k\pi+\frac{2t-1}{2}\pi\right)\right]=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2t-1}{2}\pi\right)=\frac{2t-1}{2}\pi.$$

Делая подстановку в данное выражение, получим:

$$\frac{2k+2\alpha-1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha-1}{2}\pi=$$

$$=\frac{2k+2\alpha-1-2a+1}{2}=k=[t],$$

что и требовалось доказать.

Вернёмся к системе

$$\begin{cases} x+[y]+z=2{,}1, \\ x+y+[z]=3{,}2, \\ [x]+y+z=4{,}3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1{,}5, \\ y=0{,}7, \\ z=2{,}6. \end{cases}$$

Ответ: 1,5; 0,7; 2,6.

▹ **Задача 7.** Известно, что расстояние от города Волгоградской области Урюпинска (У) до города Кабардино-Балкарской республики Прохладный (П) – 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния от У до П записаны так: $0{,}999;\ 1{,}998;\ 2{,}997;\ \ldots\ 999{,}0$. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

Решение: Два числа могут быть на одном столбе тогда и только тогда, когда их сумма равна 999. Поэтому, если рассмотреть один столб, на котором только две различные цифры, то, если одна из цифр X, другая обязательно $9-X$. Всего таких столбов, на которых есть числа, изображаемые цифрами X и $9-X$, существует $2^3=8$ (на каждом из первых трёх мест может стоять одна цифра: X или $9-X$); всех таких возможных пар цифр существует 5. Поэтому число всех столбов, на которых только две различные цифры, равно 40.

Ответ: 40.

▹ **Задача 8.** Доказать, что при любых натуральных m и n выражение $A=\dfrac{\left[(mn)!\right]^2}{(m!)^{n+1}\cdot(n!)^{m+1}}$ является натуральным числом.

Решение: Прежде всего

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n}=\frac{(mn)!}{m!(mn-m)!}\cdot\frac{(mn-m)!}{m!(mn-2m)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(2m)!}{m!m!}=$$

$$=C_{2m}^{m}\cdot C_{3m}^{n}\cdot\ldots\cdot C_{mn}^{m}.$$

Далее легко проверить, что $C_{mk}^{m}=kC_{mk-1}^{m-1}$, и поэтому

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n}=n!C_{2m-1}^{m-1}\cdot C_{3m-1}^{m-1}\cdot\ldots\cdot C_{mn-1}^{m-1},$$

откуда следует, что число $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ (а равно и число $\dfrac{(mn)!}{(n!)^m m!}$) – натуральное; но тогда натуральным будет и число

$$\frac{\left[(mn)!\right]^2}{(m!)^{n+1}\cdot(n!)^{m+1}}=\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}\cdot\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}.$$

▹ **Задача 9.** Если $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{2023}$ – положительные числа, то какое наименьшее значение принимает выражение

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}?$$

Решение: Как следует из неравенства $x+y \ldots 2(xy)^{\frac{1}{2}}$ (неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим), выражение не меньше

$$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{a_1a_2}{a_3^2}}+\sqrt[4]{\frac{a_2a_3}{a_4^2}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{a_{n-1}a_n}{a_1^2}}+\sqrt[4]{\frac{a_na_1}{a_2^2}}\right).$$

Поскольку произведение n корней, стоящих в скобках, равно 1, то по теореме Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом их сумма не меньше n. Получается, что наименьшее значение данного выражения $n\sqrt{2}$.

Ответ: $n\sqrt{2}$.

▹ **Задача 10.** На сторонах четырёхугольника *ABCD* взяты точки A^1, B^1, C^1, D^2 так, что они делят все стороны в одном и том же отношении:

$$\frac{AA^1}{A^1B}=\frac{BB^1}{B^1C}=\frac{CC^1}{C^1D}=\frac{DD^1}{D^1A}=\frac{m}{n}.$$

Найти отношение площадей $A^1B^1C^1D^1$ и *ABCD*.

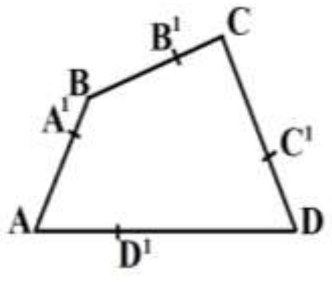
Решение: Составляя из выражения производные пропорции, будем иметь:

$$\frac{AA^1}{AB}=\frac{m}{m+n}. \tag{1}$$

$$\frac{DD^1+D^1A}{D^1A}=\frac{m+n}{n},$$

или

$$\frac{AD^1}{AD}=\frac{n}{m+n}. \tag{2}$$



Отношение площадей треугольников AA^1D^1 и ABD, как имеющих по равенству $\angle A$, будет равно:

$$\frac{S_{AA^1D}}{S_{ABD}} = \frac{AA^1 \cdot AD^1}{AB \cdot AD} = \frac{mn}{(m+n)^2}. \tag{3}$$

Совершенно аналогично получим:

$$\frac{S_{A^1BB^1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{B^1CC^1}}{S_{BCD}} = \frac{S_{C^1DD^1}}{S_{CDA}} = \frac{mn}{(m+n)^2}. \tag{4}$$

Из (3) и (4), пользуясь свойством равных отношений, можем написать:

$$\frac{S_{AA^1D^1} + S_{A^1BB^1} + S_{B^1CC^1} + S_{C^1DD^1}}{S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{ABC}} = \frac{mn}{(m+n)^2}. \tag{5}$$

Обозначив площадь $ABCD$ через S, а площадь $A^1B^1C^1D^1$ через S^1, из (5) будем иметь:

$$\frac{S - S^1}{2S} = \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Отсюда:

$$2mnS = (m+n)^2 S - (m+n)^2 S^1,$$

$$(m+n)^2 S^1 = (m+n)^2 S^1 - 2mnS = (m^2+n^2)S,$$

$$\frac{S^1}{S} = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

Ответ: $\frac{S_{A^1B^1C^1D^1}}{S_{ABCD}} = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$.

11 класс

▹ **Задача 1.** Наборщик рассыпал некоторое число, представляющее седьмую степень натурального числа. Его цифры: 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6. Восстановить по этим цифрам число.

Решение: Седьмая степень натурального числа

$$10^{10} < x^7 < 10^{11},$$

$$10\sqrt[7]{10} < x < 10\sqrt[7]{1000},$$

$$26 < 10\sqrt[7]{1000} < 27.$$

$$N = 27 \Rightarrow$$

$$27^4 = 531441,$$

$$27^3 = 19683.$$

Проводим операцию умножения и получаем в итоге:

$$27^7 = 10460353203.$$

Для N = 36

$$36^4 = 1679616,$$

$$36^3 = 46656,$$

$$36^7 = 1679616 \cdot 46656 = \ldots 096.$$

Операцию умножения не производим, так как вторая цифра с конца будет девятка.

Ответ: $27^7 = 10460353203.$

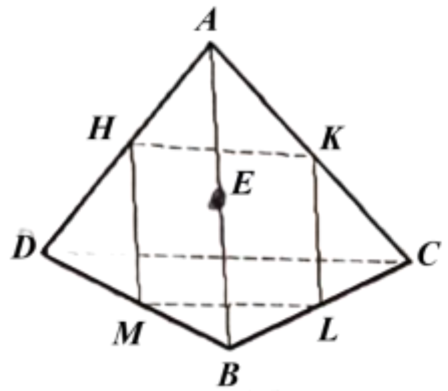
▹ **Задача 2.** Используя все цифры от 1 до 9, составить три трёхзначных числа с наибольшим возможным произведением.

Решение: $941 \cdot 852 \cdot 763$

Ответ: 683519816.

▹ **Задача 3.** Правильный тетраэдр разделили плоскостью на две части так, что в сечении получился единичный квадрат. Найдите объём шара, вписанный в этот тетраэдр и отношение объёмов полученных тел.

Решение: Пусть *ABCD* – правильный тетраэдр (см. рисунок ниже). Проведем в *ABC* и *ABD* средние линии *KL* и *MN*. Обе они параллельны ребру *AB*, а значит друг другу, т.е. параллельны и лежат в одной плоскости, которая пересекает тетраэдр по четырехугольнику *NKLM*. Покажем, что он и есть искомый квадрат.



Сначала заметим, что все четыре его стороны – средние линии равных правильных треугольников – граней тетраэдра. Поэтому они равны между собой, т.е. *KLMN* – ромб. Стороны его параллельны ребрам *AB* и *CD* тетраэдра. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что прямые *AB* и *CD* перпендикулярны. Для этого обозначим середину ребра *AB* через *E* и заметим, что прямая *AB* перпендикулярна плоскости *CDE*, т.к. перпендикулярна лежащим в ней пересекающимся прямым *CE* и *DE*. Поэтому она перпендикулярна и лежащей в плоскости *CDE* прямой *CD*. Тогда:

$$V_1 : V_2 = 1:1,$$

$$HK = 1 => AD = 2 = a,$$

$$v = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}, S_{\text{ï.ï.}} = a^2\sqrt{3}, r = \frac{3V}{S_{\text{ï.ï.}}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4\cdot a^2\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{12},$$

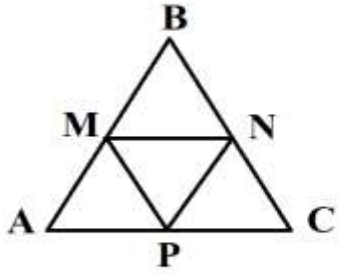
$$r = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{6\sqrt{6}} = \frac{2\pi\sqrt{6}}{9\cdot 6} = \frac{\pi\cdot\sqrt{6}}{27}.$$

Ответ: $\frac{\pi\cdot\sqrt{6}}{27}$.

▹ **Задача 4.** Внутри правильного треугольника случайно бросили точку O. Пусть a, b, c – длины отрезков, равные расстоянию от точки O до сторон этого угла. Найдите вероятность того, что из отрезков a, b, c можно построить треугольник.

Решение:



Перпендикуляр, опущенный на AC из любой точки, лежащей внутри треугольника MBN (M,N,P - середины AB , BC, AC соответственно), будет больше $\frac{H}{2}$, а опущенный из точки, лежащей на MN, равен $\frac{H}{2}$. Следовательно, все эти точки не удовлетворяют условию задачи. Аналогичный вывод по отношению к точкам, лежащим внутри треугольников MAP и PCN, а также к лежащим на MP и NP.

Наоборот, по отношению к любой точке O, лежащей внутри треугольника MNP, имеем (предположив, что OB_1 – наибольший из перпендикуляров, что не уменьшает общности)

$$OA_1 + OB_1 = H - OB_1$$

и так как $OB_1 < \frac{H}{2}$, то

$$OA_1 + OC_1 > H - \frac{H}{2} = \frac{H}{2},$$

$$OA_1 + OC_1 > OB_1,$$

$$P = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 0,25.

▹ **Задача 5.** В круг радиуса 2023 вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить отрезок длиной 1.

Решение: Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$.

1. Проводим AD.

2. Проводим CF.

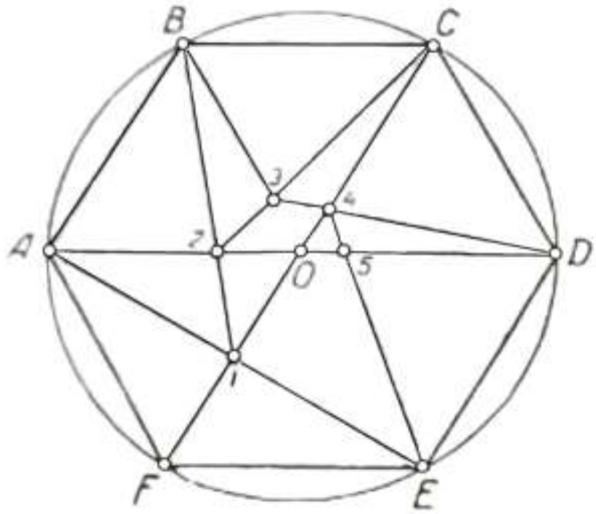
3. Проводим AL. Отрезок $O1 = \frac{1}{2}R$.

4. Проводим $B1$. Отрезок $O2 = \frac{1}{3}R$, это следует из подобия треугольников $B1C$ и $21O$

$$\frac{O2}{R} = \frac{O1}{C1} = \frac{1}{3}.$$

5. Проводим BO.

6. Проводим $C2$. Отрезок $O3 = \frac{1}{4}R$.



7. Проводим $D3$. Отрезок $O4 = \frac{1}{5}R$.

8. Проводим $E4$. Отрезок $O5 = \frac{1}{6}R$ и т.д.

Доказательство везде основывается на подобии треугольников.

▹ **Задача 6.** Если *A*, *B*, *C* – углы остроугольного треугольника, то какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{\mathrm{tg}^{2023}A+\ \mathrm{tg}^{2023}B+\ \mathrm{tg}^{2023}C}{\mathrm{tg}A+\ \mathrm{tg}B+\ \mathrm{tg}C}?$$

Решение: Известно, что $\mathrm{tg}\left(A+B\right)=\dfrac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B}{1-\mathrm{tg}A\cdot\ \mathrm{tg}B}$. Тогда

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}\left(A+B\right)=-\mathrm{tg}\left(A+B\right)\mathrm{tg}A\cdot\ \mathrm{tg}B.$$

Если $A+B+C=180$, то $\mathrm{tg}\left(A+B\right)=-\mathrm{tg}C.$

$$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A\cdot\ \mathrm{tg}B\cdot\ \mathrm{tg}C\le 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}A\cdot\ \mathrm{tg}B\cdot\ \mathrm{tg}C},\text{ тогда } \mathrm{tg}A\cdot\ \mathrm{tg}B\cdot\ \mathrm{tg}C\le 3^{\frac{3}{2}},$$

$$\mathrm{tg}^nA+\mathrm{tg}^nB+\mathrm{tg}^nC\le 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}^nA\cdot\ \mathrm{tg}^nB\cdot\ \mathrm{tg}^nC},$$

$$\frac{\mathrm{tg}^nA+\ \mathrm{tg}^nB+\ \mathrm{tg}^nC}{\mathrm{tg}A+\ \mathrm{tg}B+\ \mathrm{tg}C}\le 3\left(\mathrm{tg}A+\ \mathrm{tg}B+\ \mathrm{tg}C\right)^{\frac{n}{3}-1}=3\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{n}{3}-1}=3^{1011}.$$

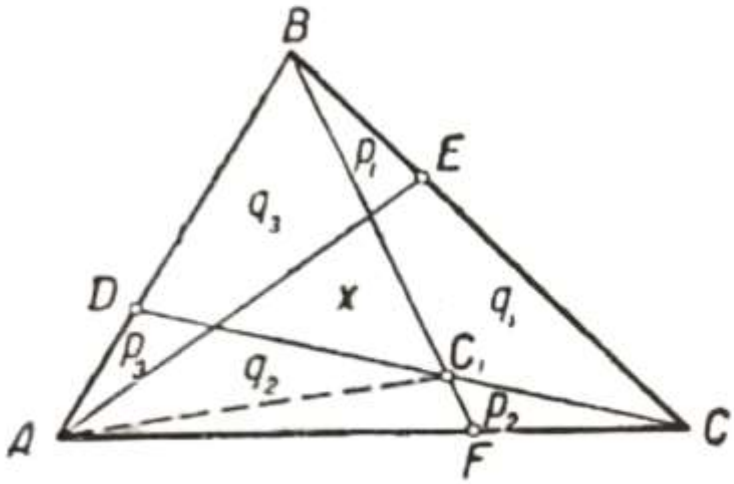
Ответ: 3^{1011}.

▹ **Задача 7.** Точками *E*, *F* и *D* каждая из сторон треугольника *ABC* разделена в отношении *m:n*. Найти отношение площади треугольника, образованного прямыми *AE, BF* и *CD* , к площади данного треугольника.

Решение: Согласно условию

$$\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}=\frac{m}{n}=k.$$

Обозначим искомую площадь через *x*, а площади треугольников и четырехугольников, на которые разбивается прямыми *AE*, *BF*, *CD* данный треугольник, соответственно через p_1,p_2,p_3 и q_1,q_2,q_3.



Из равновеликости треугольников *BAE* и *CBD* следует, что

$$p_2 + q_3 = p_2 + q_1. \tag{1}$$

Точно так же из равновеликости треугольников BAE и ACD:

$$P_2 + q_2 = p_1 + q_3 v. \tag{2}$$

На основании теоремы о треугольниках, которые имеют общую вершину, найдем что

$$\frac{S_{AC_1D}}{S_{DC_1B}} = \frac{m}{n} = k.$$

Отсюда:

$$S_{AC_1D} = k\left(x + q_3\right). \tag{3}$$

На том же основании:

$$S_{AC_1F} = \frac{1}{k} p_2, \tag{4}$$

$$S_{AC_1D} = q_2 + p_2 - S_{AC_1F} = p_3 + q_2 - \frac{1}{k} p_2. \tag{5}$$

Из (3) и (5) получаем:

$$k\left(x + q_3\right) = p_3 + q_2 - \frac{1}{k} p_2. \tag{6}$$

Совершенно аналогично найдем:

$$k\left(x + q_1\right) = p_1 + q_2 - \frac{1}{k} p_3. \tag{7}$$

Исключим x из (6) и (7) путем вычитания и получим следующее:

$$k\left(q_2 - q_1\right) = p_3 + q_2 - \frac{1}{k}p_2 - p_1 - q_3 + \frac{1}{k}p_3 \qquad (8)$$

или

$$k^2 q_3 - k^2 q_1 = kp_3 + k\left(q_2 - p_1\right) + \left(p_3 - p_2\right) - kq_3.$$

Но из (1) и (2) имеем:

$$q_2 - p_1 = q_3 - p_2 \text{ и } p_3 - p_2 = q_1 - q_3.$$

После подстановки получим:

$$k^2 q_3 - k^2 q_1 = k\left(p_3 + q_3 - p_2\right) + q_1 - q_3 - kq_2.$$

Наконец, приняв во внимание (1), вычислим:

$$k^2 q_3 - k^2 q_3 = kq_1 + q_1 - q_3 - kq_2$$

или

$$k^2 q_3 + kq_3 + q_3 = k^2 q_1 + kq_1 + q_1.$$

Но отсюда непосредственно следует:

$$q_3 = q_1.$$

А тогда из (1):

$$p_3 = p_2.$$

Совершенно аналогично найдем, что

$$q_2 = q_3,$$

а тогда из (3), получим, что

$$p_1 = p_2$$

и, следовательно, в итоге имеем:

$$p_1 = p_2 = p_3 = p \text{ и } q_1 = q_2 = q_3 = q.$$

Выразим площадь S треугольника ABC через p и q и через площадь x искомого треугольника. Будем иметь:

$$x + 3p + 3q = S.$$

С другой стороны, имеют место соотношения для площадей

$$\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = \frac{AD}{AB} = k,$$

откуда для p и q:

$$2p + q = k\left(x + p + 2q\right),$$

$$p + q - \frac{p}{k} = k\left(x + q\right)$$

или

$$\left(2 - k\right)p + \left(1 - 2k\right)q = kx,$$

$$\left(k - 1\right)p + \left(k - k^2\right)q = k^2 x.$$

Решив эту систему, найдем:

$$p = \frac{k^3 x}{\left(k-1\right)^2\left(k+1\right)} \text{ и } q = \frac{\left(k + k^2 - k^2\right)x}{\left(k-1\right)^2\left(k+1\right)}.$$

Подставив полученные значения в (7), в итоге получаем:

$$x = \frac{\left(k-1\right)^2}{k^2 + k + 1} = \frac{\left(m-n\right)^3}{m^3 - n^3}.$$

Ответ: $\frac{\left(m-n\right)^3}{m^3 - n^3}$.

▹ **Задача 8.** Доказать, что в каждой бесконечной десятичной дроби существует последовательность десятичных знаков произвольной длины, которая в разложении дроби встречается бесконечно много раз.

Решение: Пусть m – произвольное заданное натуральное число. Разобьём данную бесконечную дробь по m цифр в каждом множестве. Таких отрезков будет бесконечно много. С другой стороны, число систем из m цифр равно числу упорядоченных m-выборок из (10)-множества, $A_{(10)}^{m} = 10^m$, т.е. конечное число. Следовательно, хотя бы одна из этих систем должна повторяться бесконечно много раз.

▹ **Задача 9.** Найти шестизначные числа такие, что: $\overline{xyznut} = \left(\overline{xyz} + \overline{nut}\right)^2$.

Решение: Обозначим:

$$\overline{xyz} = M \quad \text{и} \quad \overline{nut} = N.$$

По условию:

$$1000M + N = \left(M + N\right)^2.$$

Отсюда:

$$999M = \left(M + N\right)^2 - \left(M + N\right) = \left(M + N\right)\left(M + N + 1\right). \qquad (1)$$

Так как $M + N$ и $M + N - 1$ – два соседних натуральных числа, то они взаимно простые. Число $999 = 27 \cdot 37$. Отсюда можно сделать следующие предположения:

$$M + N = 999. \qquad (2)$$

(Точнее, $M + N = 999k$, но легко показать, что k может быть рано только 1).

Тогда

$$M + N - 1 = 998.$$

и из (1)

$$M = \frac{999 \cdot 998}{999} = 998.$$

Следовательно, из (2)

$$\boldsymbol{N = 1},$$

и искомое число равно

$$998001 = \left(998 + 001\right)^2.$$

$$M + N = 27m; \; M + N - 1 = 37n;$$

$$M = mn.$$

Отсюда:

$$27m = 37n + 1.$$

Решив это неопределённое уравнение в целых положительных числах, найдём:

$$m = 11 + 37t; \quad n = 8 + 27t.$$

Но

$$M = mn = (11 + 37t)(8 + 27t) < 1000.$$

Следовательно, $t = 0$ (так как уже при $t = 1$ имеем $48 \cdot 35 > 1000$). Значит:

$$M = 11 \cdot 8 = 88.$$

Это значение M не подходит, так как M по условию трёхзначное число.

$$M + N = 37m; \quad M + N - 1 = 27n;$$

$$M = mn.$$

Отсюда:

$$37m = 27n + 1.$$

Это уравнение даёт

$$m = 19 + 27t; \quad n = 26 + 37t,$$

и так как (аналогично предыдущему) $t = 0$, то имеем:

$$m = 19; \quad n = 26.$$

$$M = mn = 19 \cdot 26 = 494;$$

$$M + N = 37 \cdot m = 37 \cdot 19 = 703;$$

$$N = 703 - 494 = 209.$$

Искомое число:

$$494209 = (494 + 209)^2.$$

Предположение $M + N - 1 = 999k$ не подходит, так как уже при $k = 1$ получим $M + N = 1000$ и из (1) $M = 1000$ – четырёхзначное (хотя второе условие задачи имеет место).

Итак, имеем два числа

$$998001 \text{ и } 494209,$$

удовлетворяющие условию задачи.

▹ **Задача 10.** Пусть координаты вектора $\vec{l}\,(x, y, z, w)$ удовлетворяют трём условиям. Найдите все натуральные значения, которые может принимать $\left|\vec{l}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 6y + 12, \\ z^2 + w^2 + 8z = 2w + 19, \\ xw + zy + 2w + 4y \ldots 44 + x + 3z. \end{cases}$$

Решение: Преобразуем систему:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25, \\ (z+4)^2 + (w-1)^2 = 36, \\ (w-1)(x+2) + (z+4)(y-3) .. 30. \end{cases}$$

Обозначим:

$$30\cos\phi\sin\psi + 30\sin\phi\cos\psi \ldots 30.$$

Тогда:

$$\begin{cases} x + 2 = 5\cos\phi, \\ y - 3 = 5\sin\phi, \\ z + 4 = 6\cos\psi, \\ w - 1 = 6\sin\psi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 ,, \ \phi ,, \ 360°, \\ 0 ,, \ \psi ,, \ 360°. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\sin(\phi + \psi) \ldots 1 \Rightarrow$$

$$\phi + \psi = 90^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\left|\vec{l}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4 - 20\cos\phi + 25\cos^2\phi + 9 + 30\sin\phi +$$

$$+25\sin^2\phi + 16 - 48\cos\psi + 36\cos^2\psi + 1 + 12\sin\psi + 36\sin^2\psi =$$

$$= 91 - 20\cos\phi + 30\sin\phi - 48\cos\psi + 12\sin\psi.$$

$$\cos\psi = \cos\left(90° - \phi + 360° n\right) = \sin\phi; \quad \sin\psi = \sin\left(90° - \phi + 360° n\right) = \cos\phi.$$

$$\vec{l}|^2 = 91 - 8\cos\phi - 18\sin\phi = 91 - \sqrt{8^2 - 18^2}\left\{\sin\alpha\cos\phi + \cos\alpha\sin\phi\right\} =$$

$$= 91 - \sqrt{388}\sin(\alpha + \phi).$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{388}} = \frac{4}{\sqrt{97}}; \cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{97}}.$$

$$\vec{l}|^{2} = 91 - \sqrt{388}\sin(\alpha+\phi) \in \left[91-\sqrt{388}; 91+\sqrt{388}\right].$$

$$91-\sqrt{388} \in (71;72) \quad 91+\sqrt{388} \in (110;111).$$

$$\sqrt{91-\sqrt{388}} \in (8;9) \quad \sqrt{91+\sqrt{388}} \in (10;11).$$

Ответ: $|l| \in \{9;10\}$.

Критерии определения призеров отборочного тура олимпиады по математике

Каждое верно решенное задание отборочного тура оценивалось в 1 балл. Прошли в заключительный тур олимпиады участники, набравшие:

4-5 класс 4 и более баллов;
6 класс 4 и более баллов;
7 класс 4 и более баллов;
8 класс 4 и более баллов;
9 класс 3 и более балла;
10 класс 3 и более балла;
11 класс 3 и более балла.

Статистика отборочного тура олимпиады по математике

В олимпиаде по математике принял участие 6031 школьник из 9 стран ближнего зарубежья (123 участника) и 75 регионов РФ. Заключительный тур прошел на 47 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-на-Дону, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Венгрии.

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	1139	368	126
6	1170	394	23
7	855	258	31
8	1017	279	45
9	671	206	5
10	648	230	6
11	531	82	4
Итого	6031	1817	240

Призеры отборочного тура получили сертификаты призера и прошли в заключительный тур.

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады

Максимальная оценка за каждую из задач заключительного тура — 10 баллов. Призовые места определялись в соответствии со следующими критериями:

Класс	Баллы за 1 место	Баллы за 2 место	Баллы за 3 место
5 класс и младше	60	50	40
6 класс	60	50	40
7 класс	50	40	30
8 класс	60	50	40
9 класс	40	32	25
10 класс	40	32	25
11 класс	40	32	25

Статистика заключительного тура

В финале олимпиады приняли участие 1108 школьников, из них 26 – иностранцы, остальные проживают в 45 различных регионах России.

Количество участников, призеров и победителей заключительного тура представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	248	41	27
6 класс	228	38	21
7 класс	191	34	14
8 класс	201	49	7
9 класс	113	8	2
10 класс	87	10	4
11 класс	40	8	2

Олимпиада по информатике

Задания отборочного тура олимпиады с решениями

Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике проводился с применением системы автоматического тестирования решений учащихся на наборах тестовых данных. Каждая из шести задач максимально оценивалась в 100 баллов в соответствии с количеством успешно пройденных тестов. Задания были рассчитаны на учащихся 8-11 классов, все учащиеся решали один вариант. На решение отводилось 5 часов как для отборочного, так и для заключительного тура.

▹ **Задача 1.** Над златом чахнет

В честь нового года Кощей решил провести лотерею среди лесных жителей, одарив их своим златом. Всего было выпущено 200 000 билетов. По правилам лотереи перед розыгрышем можно выбрать любой билет, но только один. Иван Царевич очень хочет выиграть и ухитрился узнать заранее выигрышный номер. Номера билетов формируются следующим образом:

1. Первый билет имеет номер 1.
2. Второй билет имеет номер 1.

3. Остальные номера проставлены по следующему принципу: билет, лежащий на месте $2n$, имеет такой же номер, как и билет, лежащий на месте n. Номер билета, лежащего на месте $(2n+1)$, равен сумме номеров билетов, лежащих на местах n и $n+1$.

Входные данные:

$1,, n,, 2023$, выигрышный номер.

Выходные данные:

Целое число, наименьший порядковый номер выигрышного билета или фразу “nobody gets my money”, если билета с таким номером нет.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
2023	145003
100	1179
200	4659
150	5619

Решение задачи на языке Python

Данная задача, по сути, является задачей на нахождение первого вхождения заданного числа в последовательность значений реккурентной функции $fusc(n)$, вычисляемой описанным в условиях задачи образом.

Целочисленная функция $fusc(n)$, которую в 1976 году Э. Дейкстра определил на множестве натуральных чисел, связана также с последовательностью Штерна–Броко и деревом Штерна–Броко — способом расположения всех неотрицательных несократимых дробей в вершинах упорядоченного бесконечного двоичного дерева.

В книге Р. Грэма, Д. Кнута, О. Паташника «Конкретная математика» открытие «дерева Штерна — Броко» связывается с именами Морица Штерна (1858) и Ахилла Броко (1860).

Однако аналогичное построение в форме «дерева Калкина-Уилфа» было известно ещё древнегреческим математикам. Оно описано под именем «порождения всех отношений из отношения равенства как из матери и корня» в двух математических обзорах II в. н.э., принадлежащих Никомаху Герасскому и Теону Смирнскому. Теон сообщает, что эта конструкция была известна Эратосфену Киренскому — знаменитому учёному, жившему в III в. до н. э.

См. также: Роналд Грэхем, Дональд Кнут, Орен Паташник. “Конкретная математика. Основание информатики”, 1998.

```
def main(k):
    ar = [None] * 200000
    ar[0] = 1
    ar[1] = 1
    ar[2] = 1

    if k==1:
        print(1)
        return 1
    if k==2:
        print(1)
        return 1
    for i in range(3,200000):
        ar[i]= ar[i//2] + ar[i//2+1] * (i%2)
        if k==ar[i]:
            print(i)
            return i
    print('nobody gets my money');

def dec_to_bin(x):
    return int(bin(x)[2:])

k = int(input())
main(k)
```

▹ **Задача 2.** Забор для тридевятого царства

Царь постановил возвести ограду прочную, чтобы отделить земли своего царства великого, тридевятого, от прочих.

Инженерам поставлена задача — начертить границу вокруг владений царя, используя символы +, -, | (вертикальная черта) и пробелы.

Данные о владениях — координаты точек, принадлежащих царству.

Известно следующее:

- царство может быть различной формы;
- в центре полученной фигуры могут быть пропуски;
- внутри царства заборы не нужны;
- царство состоит из одной фигуры.

Примеры:

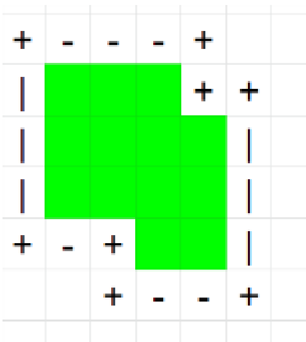


Рисунок 1 – Тридевятое царство

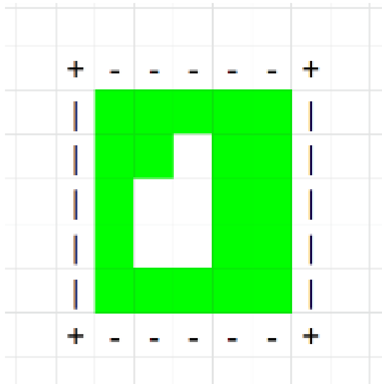


Рисунок 2 – Тридевятое царство с внутренним пространством

Допустимые значения: размер области: 1 – 2000 единичных квадратов; длина/ширина области: 1 – 90.

Входные данные

Координаты точек *x*, *y*, разделенные пробелом, каждая пара с новой строки, $-150 \le x, y \le 150$.

Выходные данные:

Чертеж.

Требования к выходным данным:

Минимальное количество начальных пробелов (хотя бы одна строка должна начинаться не с пробела).

Отсутствие пробелов в конце строки.

Отсутствие лишних переносов строк в конце вывода.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Результат работы программы</th></tr>
<tr><td><pre>1 1</pre></td><td><pre>+-+
| |
+-+</pre></td></tr>
<tr><td><pre>1 1
2 1</pre></td><td><pre>+--+
| |
+--+</pre></td></tr>
<tr><td><pre>1 1
2 1
3 1
1 2</pre></td><td><pre>+---+
| |
| |
+---+</pre></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Результат работы программы</th></tr>
<tr><td>2 2
3 2</td><td></td></tr>
<tr><td>1 2
2 2
3 2
4 2
5 2
5 3
5 4
4 4
3 4
2 4
1 4
1 5
1 6
2 6
3 6
4 6
5 6
6 6
7 6
8 6
8 5
8 4
8 3
8 2
9 2
10 2
11 2</td><td>+--------+
| |
| +---++ |
| || |
+---+ || +--+
| || |
+-----++----+</td></tr>
</table>

Решение на C++

С заданием полностью справились только три участника. Приводим решение призера отборочного тура, Эмиля Талыпова, 10 класс, г. Бишкек.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

const int N = 305;
const int INF = 1e+3;

char m[N][N];
bool used[N][N];

void dfs(int y, int x)
```

```
{
    if (0 <= y and y < N and 0 <= x and x < N and m[y][x] ==
0)
    {
        m[y][x] = 1;

        dfs(y - 1, x);
        dfs(y + 1, x);
        dfs(y, x - 1);
        dfs(y, x + 1);
    }
}

void replace(int y, int x)
{
    if (m[y][x] == 1) m[y][x] = '+';
}

void draw(int y, int x)
{
    for (int i = y + 1; y < N and m[i][x] == '+'; i++)
    {
        m[i - 1][x] = '|';

        if (m[i][x + 1] == '+' and m[i][x + 2] == '+')
        {
            draw(i, x); break;
        }

        while (m[i][x - 1] == '+' and m[i + 1][x] == '+')
i++;
    }

    for (int i = x + 1; i < N and m[y][i] == '+'; i++)
    {
        m[y][i - 1] = '-';

        if (m[y + 1][i] == '+' and m[y + 2][i] == '+')
        {
            draw(y, i); break;
        }

        while (m[y - 1][i] == '+' and m[y][i + 1] == '+')
```

```
i++;
    }

    used[y][x] = true, m[y][x] = '+';
}

signed main()
{
    ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0);

    int y, x;

    while (cin >> y >> x)
        m[N - x - 152][y + 152] = ' ';

    dfs(1, 1);

    int sy = INF, sx = INF, ey = -INF, ex = -INF;

    for (y = 2; y < N; y++)
        for (x = 2; x < N; x++)
            if (m[y][x] == ' ')
            {
                sy = min(sy, y - 1);
                sx = min(sx, x - 1);
                ey = max(ey, y + 1);
                ex = max(ex, x + 1);

                replace(y - 1, x - 1);
                replace(y - 1, x + 1);
                replace(y + 1, x - 1);
                replace(y + 1, x + 1);
                replace(y - 1, x);
                replace(y + 1, x);
                replace(y, x - 1);
                replace(y, x + 1);
            }

    for (y = 2; y < N; y++)
        for (x = 2; x < N; x++)
            if (!used[y][x] and m[y][x] == '+')
                draw(y, x);
```

```
    for (y = sy; y <= ey; y++)
    {
        for (x = sx; x <= ex; x++)
            if (m[y][x] != ' ' and m[y][x] != '|' and 
m[y][x] != '-' and m[y][x] != '+')
                cout << ' ';
            else
                cout << m[y][x];

        cout << '\n';
    }
}
```

▹ **Задача 3.** 2048

У детворы тридесятого царства новая забава: они узнали про популярную игру 2048.

2048 — браузерная игра, написанная 19-летним итальянским разработчиком Габриэле Чирулли (итал. Gabriele Cirulli) на языке программирования JavaScript. Игровое поле имеет форму квадрата 4x4. Целью игры является получение плитки номинала «2048» (при желании можно продолжить дальше).

Код игры открыт и выложен на странице разработчика в GitHub. Только вот играют они пока, рисуя игровое поле мелом на доске, поэтому один тур длится несколько дней.

Чтобы сложности не мешали веселью, взялись они за разработку этой игры, пользуясь тем, чему научились в школе на уроках информатики. Первая задача, которую им предстоит решить, — вычисление изменений одной строки игрового поля после сдвига влево.

Одна строка игрового поля задается четырьмя числами. Каждое из этих чисел — степень числа 2. При сдвиге влево соседние элементы, если на них одинаковое число, объединяются в один, в два раза большего номинала. Следующие элементы сдвигаются на освободившееся место.

Элементы, разделенные свободным местом (нулем), также считаются соседними.

Операция выполняется слева направо, и если возможно несколько таких объединений, они выполняются за один ход.

Входные данные:

Одна строка, содержащая 4 целых неотрицательных числа n_k ,, 1024, разделенных пробелами.

Выходные данные:

Вид строки после преобразования. Одна строка, содержащая 4 целых неотрицательных числа n_k ,, 1024, разделенных пробелами.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
2 0 2 2	4 2 0 0
4 4 8 16	8 8 16 0
0 0 0 0	0 0 0 0

Решение задачи на языке Python

```
def merge(line):
    lst = [x for x in line if x != 0]
    for i in range(len(lst) - 1):
        if lst[i] == lst[i + 1]:
            lst = lst[:i] + [lst[i] + lst[i + 1]] + lst[i + 2:] + [0]
    return ' '.join(list(map(str,(lst + [0] * (len(line) -
len(lst))))))

line = list(map(int,input().split()))
print(merge(line))
```

▹ **Задача 4.** Градиент

Елена Прекрасная взялась за изучение дизайна. Понравилось ей одно слово заморское “градиент”. И стала она изображения свои в разные цвета раскрашивать с использованием градиента.

Градиент (англ. Gradient) — вид заливки в компьютерной графике, которая по заданным параметрам цвета в ключевых точках рассчитывает промежуточные цвета остальных точек. При этом создаются плавные переходы из одного цвета в другой. Обычно в градиенте можно использовать более двух цветов и дополнительно указывать настройки прозрачности и смещения границы цветов.

Елена размещает на холсте три точки: одна содержит красный цвет максимальной яркости, другая – зеленый, третья – синий. Цвета расходятся от центров кругами и смешиваются. И хочется ей знать, какой цвет получается в случайно выбранной четвертой точке.

При вычислениях считать, что заливка распространяется на соседние координаты, теряя одну единицу цвета, и три цвета распространяются независимо:

		FD		
	FD	FE	FD	
FD	FE	FF	FE	FD
	FD	FE	FD	
		FD		

Рисунок 1 – Схема распространения одного цвета

3	FCFBFA	FBFCFB	FAFBFC
2	FDFCFB	FCFDFC	FBFCFD
1	FEFDFC	FDFEFD	FCFDFE
0	FFFEFD	FEFFFE	FDFEFF
	0	1	2

Рисунок 2 – Распространение трех цветов, координаты красного (0,0), зеленого – (1,0), синего – (2,0)

Для вычисления значения цвета используется HEX-модель.

HEX происходит от слова Hexadecimal (в переводе "шестнадцать"). В веб-дизайне используется так называемый шестнадцатеричный код цвета # RRGGBB, RR – красный, GG – зеленый и BB – синий. Каждая доля цвета находится в диапазоне от 00 до FF.

Пример цвета пастельно-розовый: # *FFD4DD*.

Входные данные:

1 строка – координаты *x* и *y* красной точки;

2 строка – координаты *x* и *y* зеленой точки;

3 строка – координаты *x* и *y* синей точки;

4 строка – координаты *x* и *y* точки, цвет которой надо определить.

Выходные данные:

HEX-код (HTML-код) цвета, который получается в четвертой точке.

Ограничения на значения:

$0 \leq x, y \leq 1024$.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
0 0 0 256 0 512 0 768	#000000
0 0 0 256 0 512 128 0	#7F0000
10 10 20 20 30 30 40 40	#C3D7EB

Решение задачи на языке Python

```
def componenta(d1,d2):
    return format(max(255 - abs(d1[0] - d2[0]) -  abs(d1[1]
- d2[1]),0),'02X')


d1 = list(map(int,input().split()))
d2 = list(map(int,input().split()))
d3 = list(map(int,input().split()))
t = list(map(int,input().split()))

print
('#'+componenta(d1,t)+componenta(d2,t)+componenta(d3,t))
```

▹ **Задача 5.** Книга рецептов

Баба-Яга получила в подарок книгу с заморскими рецептами зелий и снадобий. Да только непонятно там как-то написано, не по-нашему. Например “Pepper(MouseWater2)4”.

Язык английский Баба-Яга знает в совершенстве, но это знание ей не помогло. Загрустила Яга, такая книга хорошая, да ничего не понятно. И попросила Василису Премудрую написать программу для расшифровки принятой в книге нотации.

Входные данные:

1 строка – рецепт.

В рецепте допустимы круглые, квадратные и фигурные скобки, цифра за скобками обозначает, что все, находящееся в скобках, берется *n* раз.

Каждый ингредиент начинается с заглавной буквы.

Выходные данные:

Каждый ингредиент с новой строки.

Формат строки: ингредиент и количество, разделенные пробелом.

Ограничения на значения: Входные данные содержат буквы латинского алфавита, скобки и цифры.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
`Pony2Rainbow5`	`Pony 2` `Rainbow 5`

`Pepper(MouseWater2)4`	`Pepper 1`
	`Mouse 4`
	`Water 8`

`Frog2Hair1Haredroppings`
`(Breachbark)3Water10`
	`Frog 2`
	`Hair 1`
	`Haredroppings 1`
	`Breachbark 3`
	`Water 10`

Решение задачи на языке Python с использованием регулярных выражений

Регулярные выражения присутствуют практически во всех современных языках программирования и представляют собой мощный инструмент для обработки текстовых данных.

```
from collections import Counter
import re

COMPONENT_RE = (
 r'('
 r'[A-Z][a-z]*'
 r'|'
 r'\([^(]+\)'
 r'|'
 r'\[[^[]+\]'
 r'|'
 r'\{[^}]+\}'
 r')'
 r'(\d*)'
)
```

```
def parse_recipe(recipe):
 counts = Counter()
    for element, count in re.findall(COMPONENT_RE, recipe):
        count = int(count) if count else 1
        if element[0] in '([{':
            for k, v in parse_recipe(element[1:-1]).items():
                counts[k] += count * v
        else:
            counts[element] += count
    return counts

counts = parse_recipe(input())
dict_val = dict(counts.items())
for key in dict_val:
    print(key, dict_val[key])
```

Решение задачи на языке С++

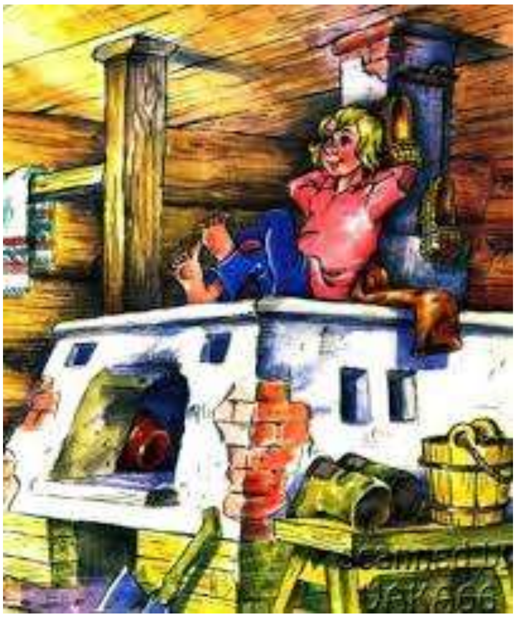
Решение призера отборочного тура, Степиной Елизаветы, 11 класс, г. Бронницы.

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#define ll long long
using namespace std;

int main()
{
    vector<pair<string, int>> v, v1;
    vector<int> vs;
    string s;
    int sch = -1, x1, x2, x3;
    x1 = 0; x2 = x1; x3 = x2; x1 = x3;
    cin >> s;
    for (unsigned int i = 0; i < s.length(); ++i) {
        if (s[i] >= 65 && s[i] <= 90) {
            string ss;
            ss.push_back(s[i]);
            i += 1;
            while (i < s.length() && s[i] >= 97 && s[i] <= 122) {
                ss.push_back(s[i]);
                i += 1;
            }
            i -= 1;
            sch += 1;
            v.push_back({ ss, 1 });
        }
```

```
if (s[i] >= 47 && s[i] <= 57) {
    int sum = s[i] - '0';
    i += 1;
    while (i < s.length() && s[i] >= 47 && s[i] <= 57) {
        sum = (sum * 10) + s[i] - '0';
        i += 1;
    }
    i -= 1;
    v.back().second = sum;
}
if (s[i] == 40) {
    x1 = sch + 1; //(
}
if (s[i] == 91) {
    x2 = sch + 1; //[
}
if (s[i] == 123) {
    x3 = sch + 1; //{
}

if (s[i] == 41) {
    i += 1;
    int sum = s[i] - '0';
    i += 1;
    while (i < s.length() && s[i] >= 47 && s[i] <= 57) {
        sum = (sum * 10) + s[i] - '0';
        i += 1;
    }
    i -= 1;

    for (int j = x1; j <= sch; ++j) {
        v[j].second *= sum;
    }
}

if (s[i] == 93) {
    i += 1;
    int sum = s[i] - '0';
    i += 1;
    while (i < s.length() && s[i] >= 47 && s[i] <= 57) {
        sum = (sum * 10) + s[i] - '0';
        i += 1;
    }
    i -= 1;

    for (int j = x2; j <= sch; ++j) {
        v[j].second *= sum;
    }
}
```

```
        if (s[i] == 125) {
            i += 1;
            int sum = s[i] - '0';
            i += 1;
            while (i < s.length() && s[i] >= 47 && s[i] <= 57) {
                sum = (sum * 10) + s[i] - '0';
                i += 1;
            }
            i -= 1;

            for (int j = x3; j <= sch; ++j) {
                v[j].second *= sum;
            }
        }
    }
for (unsigned int i = 0; i < v.size(); ++i) {
        int z = 0;
        for (unsigned int j = 0; j < v1.size(); ++j) {
            if (v[i].first == v1[j].first) {
                z = 1;
                v1[j].second += v[i].second;
            }
        }
        if (z == 0) {
            v1.push_back(v[i]);
        }

    }


    for (unsigned int i = 0; i < v1.size(); ++i) {
        cout << v1[i].first << " " << v1[i].second << "\n";
    }
    return 0;
}
```

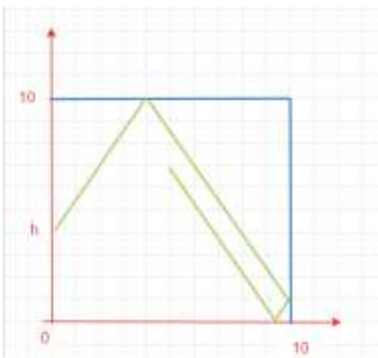
▹ **Задача 6.** Лазерная указка



Получил Емеля от щуки лазерную указку. Чтобы не ходить никуда, а просто показывать на нужную вещь и она сама в руки прилетала. И, разумеется, сразу приступил к тестам у себя в избе. То на одну стену посветит, то на другую, а свет еще и отражается, как будто все стены из зеркала.

Комната, в которой проходит тестирование, имеет размеры 10x10 метров. Емеля включает указку из произвольной точки, всегда у одной и той же стены комнаты, направляя ее параллельно полу, и смотрит, где луч отразился от стены.

Если свет луча попал в угол, считать, что он отражается обратно по той же траектории, по которой в угол попал.



Входные данные:

Одна строка, содержащая числа, разделенные пробелом: Значение h координаты, из которой луч указки начинает свое движение, $0 \le h \le 10$.

Угол между лучом и стеной $0 \le a < 90$.

Длина луча $0.5 \le l < 20000000000$.

Выходные данные:

Координата *x*, *y*, в которой луч затухнет, округленная до трех знаков после запятой.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

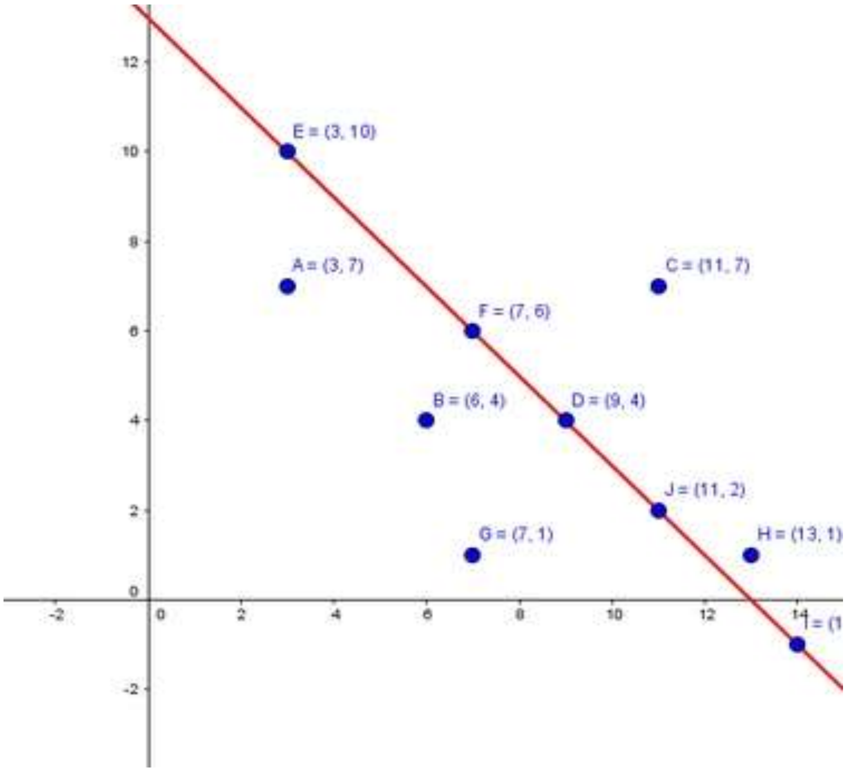
Входные данные	работы программы
5 60 18	9.0 0.588
5 60 25	7.5 6.651
5 60 18000000007.5	3.75 0.385

Решение задачи на языке Python

```
from math import sin, cos, radians

def helper(n):
    q, r = divmod(n, 10)
    return 10-r if q%2 else r

def laser_coord(h, a, l):
    return helper(l * cos(radians(a))), helper(h + l *
sin(radians(a)))

(h,a,l) = list(map(float,input().split()))

res = laser_coord(h,a,l)
print(round(res[0],3), round(res[1],3))
```

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

▹ **Задача 1.** Максимальное количество



Известны координаты n точек на плоскости $(2,, \ n,, \ 40)$.

Через какое максимальное число точек m можно провести одну прямую?

Сколько можно провести прямых, проходящих через m точек?

Входные данные:

Число n, $2,, \ n,, \ 40$.

n строк с координатами x и y, разделенными пробелом, x и y – целые числа.

Выходные данные:

Число точек m и количество прямых l, проходящих через m точек, разделенные пробелом.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
3 -1 1 1 0 0 0	2 3
12 3 9 3 8 6 4 11 7 9 4 3 10 7 6 7 1 13 1 16 -1 14 -1 11 2	5 1
7 2 4 5 1 4 3 2 -2 8 4 11 -3 11 1	3 1

Входные данные	Результат работы программы
7 2 4 6 -6 4 3 2 -2 8 4 11 -3 11 1	2 21

Решение задачи на языке Python

Идея приведенного решения состоит в том, чтобы “записать” уравнения прямых, проходящих через все возможные сочетания точек, после чего сосчитать максимальное количество совпадений в списке уравнений.

```
def count_points(listPoints):
     # Все возможные прямые
    line_lists = [
        [
            line_eq(listPoints[i], listPoints[j])
            for j in range(i + 1, len(listPoints))
        ]
        for i in range(len(listPoints))
    ]

    # Количество совпадений для каждой прямой
    number_lists = [
        [
            line_list.count(line) + 1 for line in line_list
        ]
        for line_list in line_lists
    ]

    numbers = [
        number
        for number_list in number_lists
            for number in number_list
    ]
```

```
      # Максимальное число совпадений
    max_numbers = max(numbers)

    frequencies = [
        number_list.count(max_numbers)
        for number_list in number_lists
    ]

    count_max_numbers = None
    if max_numbers == 2:
        count_max_numbers = sum(frequencies)
    else:
        maximum_frequency = max(frequencies)
        count_max_numbers = frequencies.count(maximum_frequency)

    return  (max_numbers, count_max_numbers)

# Функция возвращает уравнение прямой по двум точкам
def line_eq(point1, point2):
    result = None
    x1, y1 = point1
    x2, y2 = point2
    if x1 == x2:
        result = f"x = {x1}"
    elif y1 == y2:
        result = f"y = {y1}"
    else:
        m = (y2 - y1) / (x2 - x1)
        b = y1 - m * x1
        result = f"y = {m}x + {b}"
    return result

# Получаем число точек из стандартного ввода
n = int(input())
intervals = []

# Записываем координаты точек из стандартного ввода в список
интервалов
for i in range(n):
    intervals.append(list(map(int, input().split())))

print(' '.join(map(str,count_points(intervals)) ))
```

▹ **Задача 2.** Большие числа

Задано натуральное число m, $1,,\ m,,\ 10^{24}$.

Найти наименьшее n, такое, что n^n делится на m без остатка.

Входные данные:

Число m, $1,,\ m,,\ 10^{24}$.

Выходные данные:

Число n.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
17	17
480	30
999	111
12345	12345
654321	654321
92812	46406
18663	18663
1024	8
123456799	123456799
7576507881	841834209
465625359367	465625359367
150678007667	150678007667
849974449459008	26561701545594
595261012762099	595261012762099
265810403357172049	265810403357172049
458622479488159988	229311239744079994
480340172940925918931	480340172940925918931

Входные данные	Результат работы программы
859766721564453703972	429883360782226851986
385793285260553180041986	42865920584505908893554
871499258247560694421845	871499258247560694421845

Решение задачи на языке Python

Очевидно, что n,, m, и для решения задачи в случае небольших значений m или неограниченного времени работы программы подойдет и решение простым перебором, с проверкой $pow(n,n,m) == 0$ для каждого из проверяемых значений.

Такое решение работает за время $O(n\log(n))$. Соответственно, с возрастанием m растет и сложность вычислений, и нам требуется более оптимальный алгоритм.

Для определения простоты числа в решении используется алгоритм Миллера-Рабина, для разложения на простые множители — ρ–алгоритм Полларда.

Подробнее об этих и других методах быстрых вычислений можно прочитать, в том числе, в пособии “Введение в криптографию”, под общ. ред. В. В. Ященко, МЦНМО, 2012 г., и монографии Василенко О. Н. “Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии”, МЦНМО, 2003.

```
import math
import random

#Miller-Rabin

def MR_is_prime(n: int) -> bool:
    if n < 2:
        return False
    if n in [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]:
        return True
    if n % 2 == 0:
        return False
    k, r, d = 37, 0, n - 1
    while d % 2 == 0:
        d //= 2
        r += 1
```

```
    for i in range(k):
        a = random.randint(2, n - 2)
        x = pow(a, d, n)
        if x == 1 or x == n - 1: continue
        for j in range(r - 1):
            x = pow(x, 2, n)
            if x == n - 1: break
        else:
            return False
    return True

# Pollard
def Pollard_rho(n: int) -> int:
    if n & 1 == 0:
        return 2
    c = random.randint(1, n - 1)
    r, t = c * (c + 1) % n, c
    while r != t:
        d = math.gcd(abs(t - r), n)
        if d > 1:
            return d
        r = (c + (r * r + c) ** 2) % n
        t = (c + t * t) % n
    return n

def factor(n: int) -> set:
    if n <= 1:
        return {*()}
    if MR_is_prime(n):
        return {n}
    r = n
    while r == n:
        r = Pollard_rho(n)
    while n % r == 0:
        n //= r
    return factor(r) | factor(n)

def solve(m: int) -> int:
    n, i = 0, 1
    for p in factor(m):
        i *= p
    while True:
        n += i
        if pow(n, n, m) == 0:
            return n

print(solve(int(input())))
```

▹ **Задача 3.** Затопление дачного массива

Во время паводка дачный массив Колиной бабушки часто затапливает.

Для мониторинга состояния участков Коля решил написать программу, вычисляющую затопленные участки и отсылающую уведомления всем соседям по массиву, которых могло затопить.

Известно, что затопление начинается из левого верхнего угла и затопленными оказываются все участки, которые ниже уровнем или на том же уровне и являются соседними (слева, справа, сверху и снизу, но не по диагонали) с затопленным.

У Коли есть карта высот участков $(0 \le h \le 100)$, по ней программа вычисляет распространение воды и передает сведения в модуль рассылки.

Например, если карта высот выглядит так

```
7 2 1
7 2 1
1 2 1
```

то затопленными оказываются все участки, и результат будет иметь вид

```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

Если карта имеет вид

```
7 7 9
8 7 9
9 10 7
```

то результат будет следующим:

```
1 1 0
0 1 0
0 0 0
```

Входные данные:

Первая строка: n m – количество строк и столбцов в карте участков, $3 \le m, n \le 100$.

n строк по m чисел, разделенных пробелом, в каждой.

Каждое из чисел – от 0 до 100.

Выходные данные:

n строк по *m* чисел, разделенных пробелом, в каждой.

0, если участок не затоплен, 1 если затоплен

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Некоторые примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
3 3 8 2 1 7 2 1 1 2 1	1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 3 7 10 7 9 10 7	1 1 0 0 1 0 0 0 0
5 5 2 3 3 3 3 2 3 3 3 3 2 2 3 3 3 2 2 2 3 2 3 2 2 2 1	1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1
3 3 7 9 9 8 7 9 9 10 1	1 0 0 0 0 0 0 0 0
5 6 2 3 3 3 3 4 2 3 3 1 3 4 2 2 3 1 2 4	1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0

Входные данные	Результат работы программы
2 2 2 3 2 4 3 2 2 2 2 5	0 1 1 1 1 0
5 10 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 19 20 20 20 15 20 20 20 20 10 18 20 20 20 14 20 20 20 20 10 17 20 20 20 13 20 20 20 20 10 16 15 14 13 12 11 10 10 10 11	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0

Решение задачи на языке C++

Приводим решение победителя олимпиады, Максима Фомина, 11 класс, г. Тольятти.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
#define str to_string
#define LLM (ll)(1e18)

signed main(){
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    ll n, m;
    cin >> n >> m;
    int **a = new int*[n];
    bool **b = new bool*[n];
    for (int i=0;i<n;i++) {
        a[i] = new int[m];
        b[i] = new bool[m]();
    }
    for (int i=0;i<n;i++) {
        for (int j=0;j<m;j++) {
            cin >> a[i][j];
        }
    }

    queue <pair<int, int>> q;
    q.emplace(0, 0);
```

```
    int dx[] = {1, 0, 0, -1};
    int dy[] = {0, 1, -1, 0};

    b[0][0] = 1;
    while(!q.empty()){
        auto v = q.front();

    q.pop();
        for (int i=0;i<4;i++) {
            int new_x = v.first + dx[i], new_y = v.second + dy[i];
            if ( new_x >= n || new_x < 0 ) continue;
            if ( new_y >= m || new_y < 0 ) continue;
            if (b[new_x][new_y] == 0 && a[new_x][new_y] <=
a[v.first][v.second]) {
                b[new_x][new_y] = 1;
                q.emplace(new_x, new_y);
            }

        }
    }
    for (int i=0;i<n;i++) {
        for (int j=0;j<m;j++) {
            cout << b[i][j] << " ";
        }
        cout << "\n";
    }
    return 0;
}
```

▹ **Задача 4.** Обслуживание трассы

На планете Бигландия есть очень протяженная автомобильная дорога, которая обслуживается n коллективами роботов, каждый из которых отвечает за свой участок. Участок, за который отвечает коллектив, задан своими координатами в метрах. Участки могут пересекаться, и на некоторые части дороги ответственные не назначены.

Новому министру транспорта требуется выяснить, сколько метров дороги обслуживается. Напишите программу, позволяющую вычислить это значение.

Входные данные:

В первой строке число n, количество интервалов, $n \le 200$.

В последующих n строках – координаты начала и конца интервала, разделенные пробелом.

Все координаты находятся в пределах [-100000000, 100000000].

Выходные данные:

Суммарная длина объединения интервалов, целое число.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Примеры тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
3 1 4 7 11 3 5	8
3 0 2 6 10 11 15	10

Входные данные	Результат работы программы
5 0 5 10 20 1 6 16 19 5 11	20
3 1 20 -100000000 10 30 40	100000030
6 88 103 64 104 19 101 4 97 -72 -28 -59 -58	144

Решение задачи на языке Python

```
def total_length(intervals):
    s, top = 0, float("-inf")
    for a,b in sorted(intervals):
        if(a>b):
            print(a,b)
            a = a+b
            b = a - b
            a = a - b
        if top < a: top    = a
        if top < b: s, top = s+b-top, b
```

```
    return s

n = int(input())
intervals = []
for i in range(n):
    intervals.append(list(map(int, input().split())))

print(total_length(intervals))
```

▹ **Задача 5.** Эзотерический язык

В летнем лагере для программистов на экскурсии в пещеру дети нашли какую-то странную клинопись. Они были уверены, что это надписи, оставленные далекими предками. Однако когда приступили к расшифровке, они стали понимать, что это не древний язык, а вполне себе современный, эзотерический язык программирования Tick.

Эзотерических языков немало, многие из них шутливы, некоторые – почти искусство. Так, программа на языке Shakespear выглядит почти как настоящая пьеса Шекспира, а на языке Piet — как постживописная абстракция. Piet получил своё название от имени нидерландского художника Пита Мондриана.

Tick — это эзотерический язык программирования, созданный в 2017 году. В нем всего 4 команды и бесконечная лента памяти.

Команды

- >: Переход к следующей ячейке;
- <: Переход к предыдущей ячейке;
- +: Увеличивает значение в текущей ячейке на 1. Усечение переполнения: 255+1=0;
- *: Вывод на экран содержания текущей ячейки.

Hello, World!

Ниже приведена программа hello world в Tick (пробелы и переносы строк не являются частью программы).

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
++++*+++++++++++++++++++++++++++++++***++++++++**+++*>++++++++++++++++
+++++++++++++++++++<++++++++*>++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++>+++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++_++++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++*>+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++_+++++*>+++++++
+++++++++++++++++++++++++++*
```

Для расшифровки этой “Клинописи” юными дарованиями был написан простой интерпретатор языка Tick. Напиши и ты такую программу, чтобы узнать, что же было написано на стенах пещеры.

Входные данные:

Текст программы на Tick, одна строка.

Выходные данные:

Результат работы программы, одна строка.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
++ ++++++++++++++++++++*<++++++++++++++++++++++++++++++++++++++ ++* <+++ ++*<++ ++ ++*<++++++++++++++++ ++ +++++++++++++++++++++*<	Pasha
++ +++++++++++++++++++++++*<+++++++++++++++++++++++++++++++++++ ++ ++*<++ +++* <+++ +++*<+++++++++++++ ++ ++++++++++++++++++++++++*<	Sasha

Решение задачи на языке Python

```
def interpreter(tape):
    memory, ptr, output = {}, 0, ""

    for command in tape:
        if   command == ">":  ptr += 1
        elif command == "<":  ptr -= 1
        elif command == "+":  memory[ptr] = (memory.get(ptr, 0) + 1) %
256
        elif command == "*":  output += chr(memory[ptr])

    return output

print(interpreter(input()))
```

▹ **Задача 6.** Ромб

Напишите программу, которая выводит на экран ромб заданного размера, нарисованный символами “*”. Если ромб нарисовать невозможно, вывести “None”.

Входные данные:

Размер ромба, $3 \le n \le 30$.

Выходные данные:

n строк, если ромб нарисовать можно, иначе “None”.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Пример тестовых данных:

<table>
<tr><td>Входные данные</td><td>Результат работы программы</td></tr>
<tr><td>10</td><td>None</td></tr>
<tr><td>17</td><td><pre>   *
       ***
      *****
     ****
    ****
   ****
  ****
 ****
****
 ****
  ****
   ****
    ****
     ****
      *****
       ***
        *</pre></td></tr>
<tr><td>3</td><td><pre> *
***
 *</pre></td></tr>
<tr><td>5</td><td><pre> *
 ***
*****
 ***
  *</pre></td></tr>
</table>

Решение задачи на языке Python

```
def diamond(s):
    n  = int(s)
    if n > 0 and n % 2 == 1:
        diamond = ""
        for i in range(n):
            diamond += " " * abs((n//2) - i)
            diamond += "*" * (n - abs((n-1) - 2 * i))
            diamond += "\n"
        return diamond
    else:
        return None

print(diamond(input()))
```

Критерии определения победителей и призеров отборочного тура

Каждое из решений участника по каждой из шести задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов. Прошедшими в заключительный тур считались участники, набравшие суммарно 100 и более баллов.

Статистика отборочного тура

В отборочном туре приняли участие 1826 школьников из 66 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья. Количество иностранных участников — 47 человек. Количество участников и призеров отборочного тура представлено в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров
5 класс и младше	222	0
6	222	2
7	191	4
8	392	20
9	292	35
10	267	51
11	240	53
Итого	1826	165

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура

Каждое из решений участника по каждой из шести задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов.

Дипломы победителя получили участники, набравшие 425 и более баллов. Дипломы призера (2 место) — 330 и более баллов. Участники, набравшие 230 и более баллов, заняли 3 место.

Статистика заключительного тура

В заключительном туре приняли участие 145 школьников из 34 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья.

Призовые места заняли 36 человек. Количество участников, победителей и призеров представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
6	2	0	0
7	4	0	1
8	20	2	1
9	30	8	0
10	42	4	6
11	47	9	2
Итого	145	26	10

План УМД на 2022/23 уч.г.
С. 7, п. 68

Александр Анатольевич Андреев
Екатерина Алексеевна Максимова
Елена Александровна Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ:

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2022/2023 учебный год

Учебное пособие

Подписано в печать 07.04.2023г. Формат 60x90 1/16.
Объём 9,8 усл.п.л. Изд. № 43.