МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2023/2024 учебный год

Учебное пособие

Москва 2024

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2023/2024 учебный год

Учебное пособие

Для учащихся 5-11 классов школ

Москва 2024

УДК 004.02, 37, 51

Андреев А.А., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников: ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2023/2024 учебный год / МТУСИ. – М., 2024. – 169 с.

Издание утверждено Методическим советом университета в качестве учебного пособия. Протокол № 4 от 16.04.2024 г.

Рецензенты: Д.Е. Студеникин, к.т.н., проректор (ГМУ им. Ф.Ф. Ушакова)

К.Н. Панков, к.ф.-м.н., доцент (МТУСИ)

Содержание

О сборнике

Приводятся тексты заданий олимпиады с решениями/ответами отборочного и заключительного туров по математике и информатике, статистические сведения и историческая справка.

Пособие предназначено для участников Олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

Все опубликованные в настоящем издании материалы распространяются свободно, могут копироваться и использоваться в учебном процессе без ограничений.

Желательны (в случаях, когда это уместно) ссылки на источник.

Электронная версия: https://тиим.рф

Авторы: А.А. Андреев, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

Предисловие

Олимпиадная математика и информатика учат обучающихся, прежде всего, думать нестандартно и творчески подходить к решению сложных задач. В будущем это поможет нынешним школьникам решать различные, в том числе и бытовые, жизненные задачи намного лучше. Это связано с тем, что уже с юных лет они научатся смотреть на задачи с разных сторон и рассматривать их под неожиданным углом, ведь олимпиадные задания всегда «с изюминкой», с ними не получится справиться, просто прорешав стандартный задачник за нужный класс. Кроме того, олимпиады – это ещё и интеллектуальный спорт, который пробуждает дух соперничества, воспитывая в участнике такие качества, как целеустремлённость и мотивация к большему развитию и получению углубленных знаний. Ведь равняться нужно на лучших!

Для успешного участия в олимпиадах помимо творческих способностей и нестандартного мышления необходима серьёзная подготовка, важной составляющей которой является знакомство с заданиями и разбор решений олимпиадных соревнований различных уровней.

Основной задачей олимпиады школьников ”ТИИМ” является поддержание и развитие интереса к решению нестандартных задач математики и программирования. Олимпиада проводится рядом образовательных организаций высшего образования, центрами Сириус и школами России и ближнего зарубежья.

Впервые олимпиада школьников ”ТИИМ – Технологии. Интеллект. Информатика. Математика” состоялась в 2020/2021 учебном году по двум предметам — математике и информатике и сразу привлекла к себе внимание более 3500 школьников со всей России и стран ближнего зарубежья. С тех пор количество участников этой олимпиады лишь растет.

В 2023/2024 году в состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по шесть задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В 2023/2024 учебном году в олимпиаде по математике приняли участие 6885 школьников из 74 регионов РФ и ближнего зарубежья, по информатике – 1517 школьников из 66 регионов РФ и ближнего зарубежья. Заключительный тур прошел на 47 очных площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-на-Дону, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике и в дистанционном формате для удаленных регионов и лиц с ограниченными возможностями здоровья с применением технологий, позволяющих идентифицировать участника и отслеживать его действия в реальном времени.

Настоящее пособие содержит

- 280 задач отборочного тура по математике с ответами;
- 110 задач заключительного тура по математике с решениями;
- 12 задач отборочного тура по информатике с решениями – по 6 для 5–9 и 10-11 классов (из них 10 уникальных);
- 12 задач заключительного тура по информатике с решениями – по 6 для 5–9 и 10-11 классов (из них 7 уникальных);
- критерии определения победителей и призеров;
- статистику олимпиады.

Полный текст заданий с ответами и решениями, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады https://тиим.рф.

Олимпиада по математике

Задания отборочного тура олимпиады с ответами

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов отоборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

5 класс

Отборочный тур, 5 класс, 1 вариант

▹ **1.** Восстановите повреждённые записи. В ответе запишите разность между произведением и вторым сомножителем.

$$\begin{array}{cccccc} & \times & & 1 & 2 & 6 \\ & & & & * & * \\ \cline{3-6} + & & & * & * & * \\ & * & * & * & * & \\ \hline & 1 & * & 2 & * & 6 \end{array}$$

Ответ: 10125.

▹ **2.** Четыре слона и три жирафа весят 44 ц, а три слона и два жирафа вместе весят 32 ц. Сколько весят один жираф и два слона?

Ответ: 20.

▹ **3.** Незнайка собрал в корзину 400 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 57.

▹ **4.** Винни Пух варит волшебное варенье: к 1,4 кг малины он добавил 200 г смородины, 100 г сливы и 300 г крыжовника. Сколько процентов крыжовник составляет от массы всего полученного варенья?

Ответ: 15.

▹ **5.** Периметр квадрата уменьшили на 20 %. На сколько процентов уменьшилась площадь квадрата?

Ответ: 36.

▹ **6.** Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 3, 4, 5, 7.

Ответ: 9240.

▹ **7.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 4, то получится то же самое, что и если умножить его на 3. Тогда, если умножить его на 5, получится то же самое, что если прибавить к нему ... ?

Ответ: 8.

▹ **8.** Для того чтобы пронумеровать страницы одного крупного научного труда, потребовалось 3389 цифр. Сколько страниц в книге?

Ответ: 1124.

▹ **9.** Алексею 3 года, а Оле 15 лет. Сколько лет будет Алексею, когда Оля станет втрое старше него?

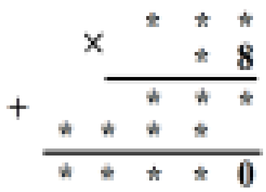
Ответ: 6.

▹ **10.** У Незнайки есть квадрат со стороной 130 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 50 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 120.

Отборочный тур, 5 класс, 2 вариант

▹ **1.** Восстановите повреждённые записи. В ответе запишите разность между произведением и первым сомножителем.



Ответ: 11155.

▹ **2.** Четыре линейки и три альбома стоят 96 рублей, две линейки и два альбома – 54 рубля. Сколько стоят восемь линеек и семь альбомов?

Ответ: 204.

▹ **3.** Незнайка собрал в корзину 250 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 34.

▹ **4.** Винни Пух варит волшебное варенье: к 1,2 кг малины он добавил 100 г смородины, 100 г сливы и 200 г крыжовника. Сколько процентов крыжовник составляет от массы всего полученного варенья?

Ответ: 12,5.

▹ **5.** Периметр квадрата увеличили на 10 %. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

Ответ: 21.

▹ **6.** Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 9870.

▹ **7.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 6, то получится то же самое, что и если умножить его на 2. Тогда, если умножить его на 6, получится то же самое, что если прибавить к нему ... ?

Ответ: 30.

▹ **8.** Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

Ответ: 173.

▹ **9.** Тане 13 лет, а Николаю 2 года. Сколько лет будет Тане, когда она станет вдвое старше Николая?

Ответ: 22.

▹ **10.** У Незнайки есть квадрат со стороной 130 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 120 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 50.

Отборочный тур, 5 класс, 3 вариант

▹ **1.** Восстановите повреждённые записи. В ответе запишите произведение. Если вариантов несколько, то запишите сумму всех возможных произведений.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 4 & * \\ \times & & & * & 6 \\ \hline & & 2 & * & 2 \\ + & 2 & * & * & \\ \hline & * & * & * & 2 \end{array}$$

Ответ: 14050.

▹ **2.** Пять маленьких утят и два гусенка весят 16 кг, а два маленьких утенка и четыре гусенка 24 кг. Сколько весят два утёнка и два гусенка?

Ответ: 13.

▹ **3.** Незнайка собрал в корзину 138 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 13.

▹ **4.** Винни Пух варит волшебное варенье: к 1,1 кг малины он добавил 500 г смородины, 200 г сливы и 200 г крыжовника. Сколько процентов крыжовник составляет от массы всего полученного варенья?

Ответ: 10.

▹ **5.** Периметр квадрата увеличили на 20 %. На сколько процентов увеличилась площадь квадрата?

Ответ: 44.

▹ **6.** Найдите наименьшее пятизначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 12390.

▹ **7.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 8, то получится то же самое, что и если умножить его на 5. Тогда, если умножить его на 7, получится то же самое, что если прибавить к нему ... ?

Ответ: 12.

▹ **8.** Для того чтобы пронумеровать страницы одного крупного научного труда, потребовалось 2025 цифр. Сколько страниц в книге?

Ответ: 711.

▹ **9.** Анастасии 5 лет, а Николаю 19 лет. Через сколько лет Николай станет втрое старше Анастасии?

Ответ: 2.

▹ **10.** У Незнайки есть квадрат со стороной 100 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 60 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 80.

Отборочный тур, 5 класс, 4 вариант

▹ **1.** Восстановите повреждённые записи. В ответе запишите произведение. Если вариантов несколько, то запишите сумму всех возможных произведений.

$$\begin{array}{r} \times\quad 1\;2\;6 \\ *\;* \\ \hline *\;*\;* \\ +\;*\;*\;*\;*\;\; \\ \hline *\;*\;*\;*\;2 \end{array}$$

Ответ: 45108.

▹ **2.** Купили два набора, состоящих из одинаковых коробок конфет и пачек печенья. Известно, что восемь коробок конфет и пять пачек печенья стоят 2981 рубль, а четыре коробки конфет и семь пачек печенья стоят 1819 рублей. Сколько стоит набор, состоящий из одной пачки печенья и одной коробки конфет?

Ответ: 400.

▹ **3.** Незнайка собрал в корзину 800 одинаковых кубиков и решил соорудить из них самый большой из возможных кубов. Сколько кубиков осталось у Незнайки неиспользованными?

Ответ: 71.

▹ **4.** Винни Пух варит волшебное варенье: к 1,9 кг малины он добавил 600 г смородины, 200 г сливы и 300 г крыжовника. Сколько процентов составляет крыжовник от массы всего полученного варенья?

Ответ: 10.

▹ **5.** Периметр квадрата уменьшили на 10 %. На сколько процентов уменьшилась его площадь?

Ответ: 19.

▹ **6.** Найдите наибольшее пятизначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 97860.

▹ **7.** Незнайка задумал число, про которое он рассказал своим друзьям следующее: если прибавить к нему 9, то получится то же самое, что и если умножить его на 4. Тогда, если умножить его на 5, получится то же самое, что если прибавить к нему ... ?

Ответ: 12.

▹ **8.** Для нумерации страниц учебника потребовалось 543 цифры. Сколько страниц в учебнике?

Ответ: 217.

▹ **9.** Софии 3 года, а Марии 21 год. Через сколько лет Мария будет вдвое старше Софии?

Ответ: 15.

▹ **10.** У Незнайки есть квадрат со стороной 290 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 210 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 200.

6 класс

Отборочный тур, 6 класс, 1 вариант

▹ **1.** Незнайка решил узнать сумму всех трехзначных чисел, у которых сумма цифр в 12 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 108.

▹ **2.** Вычислите

$$2022\frac{314}{5202}\cdot 2024\frac{314}{5202}-2025\frac{314}{5202}\cdot 2021\frac{314}{5202}.$$

Ответ: 3.

▹ **3.** Брату и сестре вместе 28 лет. Сколько лет каждому их них в отдельности, если известно, что брату сейчас лет вдвое больше, чем было сестре тогда, когда брату было столько лет, сколько сестре сейчас. В ответе запишите возраст брата.

Ответ: 16.

▹ **4.** Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 3, 4, 5, 7.

Ответ: 9240.

▹ **5.** Через железнодорожную станцию проследовало три воинских эшелона. В первом находилось 462 солдата, во втором – 546 и в третьем – 630. Сколько вагонов было в каждом эшелоне, если известно, что в каждом вагоне находилось одинаковое число солдат и что это число было наибольшим из всех возможных? В ответе укажите количество вагонов во всех составах.

Ответ: 37.

▹ **6.** В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 4 раза больше, чем в предыдущем. Сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 1 больше, чем в предыдущей, а в одной из строк сумма чисел составляет 2023. Найти сумму чисел в первом столбце.

Ответ: 289.

▹ **7.** Есть шесть карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Используя их, можно составить два трехзначных числа, например, 645 и 321. Ученик составил эти числа так, что разность оказалось самой маленькой из всех возможных. Чему равна эта разность?

Ответ: 47.

▹ **8.** Решите ребус: АХ · УХ = 6789. В ответе запишите АХ + УХ.

Ответ: 166.

▹ **9.** У Незнайки есть квадрат со стороной 130 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 50 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 120.

▹ **10.** Алексею 3 года, а Оле 15 лет. Сколько лет будет Алексею, когда Оля станет втрое старше него?

Ответ: 6.

Отборочный тур, 6 класс, 2 вариант

▹ **1.** Незнайка решил узнать сумму всех трехзначных чисел, у которых сумма цифр в 13 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 468.

▹ **2.** Вычислите

$$1235\frac{276}{2023}\cdot 1233\frac{276}{2023}-1237\frac{276}{2023}\cdot 1231\frac{276}{2023}.$$

Ответ: 8.

▹ **3.** Брату и сестре вместе 26 лет. Сколько лет каждому их них в отдельности, если известно, что брату сейчас лет вчетверо больше, чем было сестре тогда, когда брату было столько лет, сколько сестре сейчас. В ответе запишите возраст сестры.

Ответ: 10.

▹ **4.** Найдите наименьшее пятизначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 12390.

▹ **5.** На кольцевой дорожке длиной 660 м проводится эстафета, длина каждого этапа которой 150 м. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете?

Ответ: 22.

▹ **6.** В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 2 раза больше, чем в предыдущем. Сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 2 больше, чем в предыдущей, а в одной из строк сумма чисел составляет 2023. Найти сумму чисел в первом столбце.

Ответ: 867.

▹ **7.** Есть восемь карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Используя их, можно составить два четырехзначных числа, например, 6453 и 1278. Ученик составил эти числа так, что разность оказалось самой маленькой из всех возможных. Чему равна эта разность?

Ответ: 247.

▹ **8.** Решите ребус: УЖ · УЖ · УЖ = ПИТОН. В ответе запишите наибольшее значение П+И+О+Н.

Ответ: 21.

▹ **9.** У Незнайки есть квадрат со стороной 130 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 120 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 50.

▹ **10.** Тане 13 лет, а Николаю 2 года. Сколько лет будет Тане, когда она станет вдвое старше Николая?

Ответ: 22.

Отборочный тур, 6 класс, 3 вариант

▹ **1.** Незнайка решил узнать сумму всех трехзначных чисел, у которых сумма цифр в 11 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 198.

▹ **2.** Вычислите

$$998\frac{123}{899}\cdot 1002\frac{123}{899}-1007\frac{123}{899}\cdot 993\frac{123}{899}.$$

Ответ: 45.

▹ **3.** Мальчика спросили, сколько ему лет. Он ответил, что через 13 лет ему будет в 4 раза больше, чем ему было 2 года назад. Сколько лет мальчику?

Ответ: 7.

▹ **4.** Найдите наибольшее четырехзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 3, 5, 7.

Ответ: 9870.

▹ **5.** Работая на уборке фруктов, 6А собрал 560 кг яблок, 6Б – 595 кг, 6В – 735 кг. Все собранные яблоки разложили в ящики, положив в каждый из них одно и то же наибольшее из возможного число килограммов. Сколько таких ящиков потребовалось каждому классу? В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 54.

▹ **6.** В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 3 раза больше, чем в предыдущем. Сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 3 больше, чем в предыдущей, а в одной из строк сумма чисел составляет 663. Найти сумму чисел в первом столбце.

Ответ: 153.

▹ **7.** На листе клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см нарисован прямоугольник, стороны которого идут по сторонам клеток. Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника двумя прямолинейными разрезами, также идущими по сторонам клеток. Шестиклассник Петя нашёл, что у трёх из этих прямоугольников площади составляют 4 см^2, 8 см^2 и 16 см^2. Чему равна площадь исходного прямоугольника? Найдите все варианты ответа. В ответе запишите наибольшее возможное значение.

Ответ: 60.

▹ **8.** Решите ребус: $ЯЛ^{И}$ = КАНОЭ. В ответе запишите, чему равна разность ЯЛИК – КАЯК.

Ответ: 810.

▹ **9.** У Незнайки есть квадрат со стороной 100 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 60 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 80.

▹ **10.** Анастасии 5 лет, а Николаю 19 лет. Через сколько лет Николай станет втрое старше Анастасии?

Ответ: 2.

Отборочный тур, 6 класс, 4 вариант

▹ **1.** Незнайка решил узнать сумму всех трехзначных чисел, у которых сумма цифр в 14 раз меньше самого числа. Помогите Незнайке.

Ответ: 126.

▹ **2.** Вычислите

$$899\frac{321}{998}\cdot 1101\frac{321}{998}-889\frac{321}{998}\cdot 1111\frac{321}{998}.$$

Ответ: 2120.

▹ **3.** Отцу 41 год, а его детям 13, 10 и 6 лет. Через сколько лет возраст отца будет равен сумме лет его детей?

Ответ: 6.

▹ **4.** Найдите наименьшее пятизначное число, все цифры которого различны и которое делится на 3, 5, 7, 11.

Ответ: 10395.

▹ **5.** На кольцевой дорожке длиной 2024 м проводится эстафета, длина каждого этапа которой 230 м. Старт и финиш эстафеты находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете?

Ответ: 44.

▹ **6.** В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 5 раз больше, чем в предыдущем. Сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 8 больше, чем в предыдущей, а в одной из строк сумма чисел составляет 2023. Найти сумму чисел в первом столбце.

Ответ: 195.

▹ **7.** На листе клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см нарисован прямоугольник, стороны которого идут по сторонам клеток. Прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника двумя прямолинейными разрезами, также идущими по сторонам клеток. Шестиклассник Ваня нашёл, что у трёх из этих прямоугольников площади составляют 3 $см^2$, 9 $см^2$ и 27 $см^2$. Чему равна площадь исходного прямоугольника? Найдите все варианты ответа. В ответе запишите наименьшее возможное значение.

Ответ: 40.

▹ **8.** Решите ребус: ПИОН + ПИ $\cdot$ ОН = 2023. В ответе запишите, чему равно выражение П–И+О:Н.

Ответ: 4.

▹ **9.** У Незнайки есть квадрат со стороной 290 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал из этого квадрата квадрат со стороной 210 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых хочет сложить новый квадрат. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 200.

▹ **10.** Софии 3 года, а Марии 21 год. Через сколько лет Мария будет вдвое старше Софии?

Ответ: 15.

7 класс

Отборочный тур, 7 класс, 1 вариант

▹ **1.** Представьте числовое выражение $2\cdot 2013^2+2\cdot 2012^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. В ответе укажите большее из этих натуральных чисел.

Ответ: 4025.

▹ **2.** Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми

$$4x+y=8, 4x+y=16$$

и осями координат.

Ответ: 24.

▹ **3.** Известно, что $a+b+c=9$, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{9}$. Найдите $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$.

Ответ: 7.

▹ **4.** Несколько девчат разных возрастов, насобирав грибы, поделили их так. Самой младшей дали 10 грибов и 2 % остатка, следующей по возрасту — 11 грибов и 2 % нового остатка и т.д. В итоге оказалось, что всем девочкам досталось грибов поровну. Сколько девочек собирали грибы?

Ответ: 40.

▹ **5.** Сумма квадратов двух некоторых простых чисел оканчивается цифрой 9. Найдите все такие простые числа. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 7.

▹ **6.** Найдите сумму всех натуральных *n*, при которых $\frac{3n-1}{n+3}$ — целое число.

Ответ: 9.

▹ **7.** В магазин привезли крупу, сахар и соль. Полмешка соли весят на 5 кг больше, чем полмешка сахара. А два мешка сахара весят на 10 кг больше, чем два мешка крупы. На сколько кг мешок соли тяжелее мешка крупы?

Ответ: 15.

▹ **8.** В ящике лежат разноцветные шарики: 5 белых, 12 красных и 20 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытянуть из ящика, не заглядывая внутрь, чтобы среди них обязательно оказалось хотя бы по одному шарику всех указанных цветов?

Ответ: 33.

▹ **9.** В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны, $\angle DAC = 50°$, $\angle DCA = 65°$ и $\angle ACB = 70°$. Чему равен $\angle ABC$?

Ответ: 55.

▹ **10.** В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа: 3; 6; 8,4; 15; 22,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

Ответ: 8,4.

Отборочный тур, 7 класс, 2 вариант

▹ **1.** Представьте числовое выражение $5 \cdot 2022^2 + 5 \cdot 2023^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. В ответе укажите большее из этих натуральных чисел.

Ответ: 6068.

▹ **2.** Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми

$$3x + y = -15, 3x + y = -12$$

и осями координат.

Ответ: 13,5.

▹ **3.** Известно, что $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{10}{7}$.

Найдите $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$.

Ответ: 7.

▹ **4.** Несколько ребят разных возрастов, насобирав грибы, поделили их так. Самому младшему дали 10 грибов и 2 % остатка, следующему по возрасту – 11 грибов и 2 % нового остатка и т.д. В итоге оказалось, что всем ребятам досталось грибов поровну. Сколько было собрано грибов?

Ответ: 1960.

▹ **5.** Сумма двух квадратов некоторых двузначных простых чисел оканчивается на 0. Найдите такую пару чисел, что их сумма наибольшая.

Ответ: 186.

▹ **6.** Найдите сумму всех целых n, при которых $\frac{2n+1}{n-2}$ — натуральное число.

Ответ: 7.

▹ **7.** 2023 ореха разложили по кучкам, причем в каждой кучке больше одного ореха. После того как из каждой кучки в первую положили по одному ореху, орехов во всех кучках стало поровну. Сколько имеется кучек? Если вариантов ответов несколько, то в ответе укажите сумму всех возможных ответов.

Ответ: 24.

▹ **8.** В ящике лежит 100 шариков: 30 красных, 30 синих, 30 зелёных, остальные — белые и чёрные. Какое наименьшее количество шариков нужно вынуть, чтобы достать 20 шариков какого-либо одного цвета?

Ответ: 68.

▹ **9.** В четырехугольнике *ABCD* стороны *AD* и *BC* равны, $\angle DAC = 66^\circ$, $\angle DCA = 57^\circ$ и $\angle ACB = 64^\circ$. Чему равен $\angle ABC$?

Ответ: 58.

▹ **10.** В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа: 2; 4; 5,6; 10; 15. Чему равна длина измеренной диагонали?

Ответ: 5,6.

Отборочный тур, 7 класс, 3 вариант

▹ **1.** Представьте числовое выражение $13\cdot 2023^2+13\cdot 2024^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. В ответе укажите большее из этих натуральных чисел.

Ответ: 10124.

▹ **2.** Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми

$$5x-\frac{y}{2}=10, 5x-\frac{y}{2}=5$$

и осями координат.

Ответ: 15.

▹ **3.** Известно, что $\dfrac{a}{c+b}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{b+a}=60$, $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}=9$. Найдите $a+b+c$.

Ответ: 7.

▹ **4.** Несколько девочек разных возрастов, насобирав грибы, поделили их так. Самой младшей дали 20 грибов и 4 % остатка, следующей по возрасту — 21 гриб и 4 % нового остатка и т.д. В итоге оказалось, что всем девочкам досталось грибов поровну. Сколько было собрано грибов?

Ответ: 120.

▹ **5.** Найдите три различных простых числа, произведение которых втрое больше их суммы. В ответе укажите сумму этих простых чисел.

Ответ: 10.

▹ **6.** Найдите сумму всех целых *n*, при которых $\dfrac{3n+1}{n-3}$ — натуральное число.

Ответ: 15.

▹ **7.** Аня и Таня вместе весят 40 кг, Таня и Маня — 50 кг, Маня и Ваня — 90 кг, Ваня и Даня — 100 кг, Даня и Аня — 60 кг. Сколько весит Аня?

Ответ: 20.

▹ **8.** В ящике лежат разноцветные шарики: 5 белых, 12 красных и 20 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытянуть из ящика, не заглядывая внутрь, чтобы среди них оказались обязательно 10 шариков одного цвета?

Ответ: 24.

▹ **9.** В четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC равны, $\angle DAC = 40°$, $\angle DCA = 70°$ и $\angle ACB = 36°$. Чему равен $\angle ABC$?

Ответ: 72.

▹ **10.** В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна длина измеренной диагонали?

Ответ: 2,8.

Отборочный тур, 7 класс, 4 вариант

▹ **1.** Представьте числовое выражение $10 \cdot 2024^2 + 10 \cdot 2023^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел. В ответе укажите большее из этих натуральных чисел.

Ответ: 8095.

▹ **2.** Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми

$$4x - \frac{y}{3} = 8, 4x - \frac{y}{3} = 12$$

и осями координат.

Ответ: 30.

▹ **3.** Известно, что $\frac{a}{c+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} = 53$, $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 7$. Найдите $a + b + c$.

Ответ: 8.

▹ **4.** Несколько девочек разных возрастов, насобирав грибы, поделили их так. Самой младшей дали 20 грибов и 4 % остатка, следующей по возрасту

— 21 гриб и 4 % нового остатка и т.д. В итоге оказалось, что всем девочкам досталось грибов поровну. Сколько было девочек?

Ответ: 5.

▹ **5.** Найдите три простых числа, произведение которых в пять раз больше их суммы. В ответе укажите сумму этих простых чисел.

Ответ: 14.

▹ **6.** Найдите сумму всех натуральных *n*, при которых $\frac{2n+1}{n-2}$ — целое число.

Ответ: 11.

▹ **7.** Полный бидон с молоком весит 20 кг, а бидон, наполненный молоком наполовину, весит 14 кг. Сколько будет весить бидон, если его наполнить молоком на треть?

Ответ: 12.

▹ **8.** В ящике лежит 200 шариков: 60 красных, 60 синих, 60 зелёных, остальные – белые и чёрные. Какое наименьшее количество шариков нужно вынуть, чтобы достать 30 шариков какого-либо одного цвета?

Ответ: 108.

▹ **9.** В четырехугольнике *ABCD* стороны *AD* и *BC* равны, $\angle DAC = 24°$, $\angle DCA = 78°$ и $\angle ACB = 42°$. Чему равен $\angle ABC$?

Ответ: 69.

▹ **10.** В результате измерения четырех сторон и одной из диагоналей некоторого четырехугольника получились числа: 1,4; 1,6; 2,4; 4,8; 6,9. Чему равна длина измеренной диагонали?

Ответ: 2,4.

8 класс

Отборочный тур, 8 класс, 1 вариант

▹ **1.** У продавца имеются два ящика с мандаринами. В одном ящике мандарины из Абхазии по цене 60 руб. за 1 кг, а в другом мандарины из Турции – по 90 руб. за 1 кг. Стоимости ящиков с мандаринами одинаковы. Мандарины равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную бессортицу, чтобы получить те же деньги, что и при продаже мандаринов до перемешивания?

Ответ: 72.

▹ **2.** В офисе шесть вентиляторов, каждый из которых может быть включен или выключен. Найти число различных способов проветрить помещение (способы считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одного вентилятора).

Ответ: 63.

▹ **3.** Найти наименьшее четырехзначное число, которое при делении на 53 дает тот же остаток, что и частное.

Ответ: 1026.

▹ **4.** В банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию "Помидор" любят помидоры. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят помидоры. Сколько процентов голосов набрала партия "Помидор" на выборах, если ровно 46% жителей любят помидоры?

Ответ: 40.

▹ **5.** В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удален от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$. В ответе укажите сумму длин сторон данного треугольника.

Ответ: 24.

▹ **6.** Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n+5$ соответственно.

Ответ: 30.

▹ **7.** Известно, что $a+b=40$, $a^2+b^2=18760$. Чему равно a^3+b^3?

Ответ: 18760.

▹ **8.** Найдите сумму всех целых положительных a, при которых прямая $y=ax$ пересекает в двух различных точках ломаную, заданную условием

$$y=\begin{cases}-3x-6, & x<-3,\\ 3, & -3\le x\le 3,\\ 3x-6, & x>3.\end{cases}$$

Ответ: 2.

▹ **9.** Взяли одинаковые массы ягод и сиропа. Известно, что в ягодах содержится воды 15%, а в сиропе 30%. Ягоды залили сиропом. Сколько процентов воды содержится в смеси ягод и сиропа?

Ответ: 22,5.

▹ **10.** Существуют натуральные числа такие, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 2023. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 840.

Отборочный тур, 8 класс, 2 вариант

▹ **1.** У продавца имеются две корзины с яблоками. В одной зеленые яблоки по цене 60 руб. за 1 кг, а в другой красные – по цене 40 руб. за 1 кг. Стоимости корзин с яблоками одинаковы. Яблоки равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную бессортицу, чтобы получить те же деньги, что и при продаже яблок до перемешивания?

Ответ: 48.

▹ **2.** В комнате четыре лампы, каждая из которых может гореть или не гореть. Найти число различных способов освещения комнаты (два способа считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампы).

Ответ: 15.

▹ **3.** Найти наибольшее трехзначное число, которое при делении на 51 дает тот же остаток, что и частное.

Ответ: 988.

▹ **4.** В одной банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию “Помидор” любят помидоры. Среди голосовавших за другие партии 80% не любят помидоры. Сколько процентов голосов набрала партия “Помидор” на выборах, если ровно 44% жителей любят помидоры?

Ответ: 30.

▹ **5.** В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки 4 и 3 см. В ответе запишите сумму длин сторон треугольника.

Ответ: 56.

▹ **6.** Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n+7$ соответственно.

Ответ: 36.

▹ **7.** Известно, что $a+b=20$, $a^3+b^3=2120$. Чему равно a^5+b^5?

Ответ: 240400.

▹ **8.** Найдите сумму всех целых положительных a, при которых прямая $y=ax+1$ пересекает в двух различных точках ломаную, заданную условием $y=2|x-3|+3|x-2|$.

Ответ: 10.

▹ **9.** Взяли ягоду и сироп в отношении 2:3 по массе. Известно, что в ягодах содержится воды 12%, а в сиропе 28%. Ягоды залили сиропом. Сколько процентов воды содержится в смеси ягод и сиропа?

Ответ: 21,6.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа такие, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1001. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 132.

Отборочный тур, 8 класс, 3 вариант

▹ **1.** У продавца имеются два мешка леденцов. В одном леденцы по цене 30 руб. за 1 кг, в другом – по цене 75 руб. за 1 кг. Стоимости мешков одинаковы. Леденцы равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную смесь, чтобы получить те же деньги, что и при продаже двух мешков до перемешивания?

Ответ: 60.

▹ **2.** В офисе 10 вентиляторов, каждый из которых может быть включен или выключен. Найти число различных способов проветрить помещение (способы считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одного вентилятора).

Ответ: 1023.

▹ **3.** Найти наибольшее трехзначное число, которое при делении на 43 дает тот же остаток, что и частное.

Ответ: 968.

▹ **4.** В одном провинциальном городе 10 октября прошли выборы в местный парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию “Огурцы” уважают ее лидера. Среди голосовавших за другие партии 80% не любят и не уважают его. Сколько процентов голосов набрала партия “Огурцы” на выборах, если ровно 36% жителей уважают лидера партии “Огурцы”?

Ответ: 20.

▹ **5.** Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\alpha = 30°$. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении 2 : 1 и составляющая угол $\beta = 60^\circ$ с меньшей частью основания? В ответе укажите $m+n$.

Ответ: 6.

▹ **6.** Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 7840 и 7056 делятся без остатка на n и $n+5$ соответственно.

Ответ: 30.

▹ **7.** Известно, что действительные a, b таковы, что $a^2+b^2=3$, $a^8+b^8=47$. Найдите $A=a^3+b^3$. Если таких значений несколько, то в ответе укажите сумму квадратов найденных рациональных значений.

Ответ: 32.

▹ **8.** Найдите сумму всех целых отрицательных a, при которых прямая $y=ax$ пересекает в двух различных точках ломаную, заданную условием

$$y=\begin{cases} -x-3, & x<-6, \\ 3, & -6\le x\le 6, \\ x-3, & x>6. \end{cases}$$

Ответ: -2.

▹ **9.** Из пункта A в пункт B вышла баржа с 400 тоннами песка 16% влажности. В пути содержание влаги увеличилось на 4%. Сколько тонн груза доставлено в пункт B?

Ответ: 420.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1023. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 143.

Отборочный тур, 8 класс, 4 вариант

▹ **1.** У продавца имеются два мешка с гречневой крупой, в одном гречневая крупа первого сорта по цене 72 руб. за 1 кг, а в другом второго сорта – по цене 48 руб. за 1 кг. Стоимости мешков одинаковы. Крупу равномерно перемешали. По какой цене необходимо продавать полученную смесь, чтобы получить те же деньги, что и при продаже двух мешков до перемешивания? В ответе укажите стоимость 10 кг смеси.

Ответ: 576.

▹ **2.** В комнате пять ламп, каждая из которых может гореть или не гореть. Найти число различных способов освещения комнаты (два способа считаются различными, если они отличаются состоянием хотя бы одной лампы).

Ответ: 31.

▹ **3.** Найти наибольшее трехзначное число, которое при делении на 41 дает тот же остаток, что и частное.

Ответ: 966.

▹ **4.** В одном провинциальном городе 10 октября прошли выборы в местный парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию “Дыня” уважают ее лидера. Среди голосовавших за другие партии 75% не любят и не уважают его. Сколько процентов голосов набрала партия “Дыня” на выборах, если ровно 34% жителей уважают лидера партии “Дыня”?

Ответ: 12.

▹ **5.** Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\alpha = 60°$. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении 2 : 1 и составляющая угол $\beta = 30°$ с меньшей частью основания? В ответе укажите $m + n$.

Ответ: 17.

▹ **6.** Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 18000 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

Ответ: 16.

▹ **7.** Известно, что действительные a, b таковы, что $a^2+b^2=3$, $a^6+b^6=18$. Найдите $B=a^5+b^5$. Если таких значений несколько, то в ответе укажите сумму квадратов найденных значений.

Ответ: 492.

▹ **8.** Найдите сумму всех целых отрицательных a, при которых прямая $y=ax$ пересекает в двух различных точках ломаную, заданную условием $y=2|x+3|+3|x+2|$.

Ответ: -10.

▹ **9.** Из пункта A в пункт B вышла баржа с 500 тоннами песка 15% влажности. В пути содержание влаги увеличилось на 5%. Сколько тонн груза доставлено в пункт B?

Ответ: 532,5.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1200. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 156.

9 класс

Отборочный тур, 9 класс, 1 вариант

▹ **1.** Найдите сумму S всех отрицательных членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, …, если $a_n = 20n - 78$. В ответе запишите $2023 + S$.

Ответ: 1909.

▹ **2.** Если представить десятичную дробь 0,4(25) в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $n - m$ равно …?

Ответ: 569.

▹ **3.** Прямоугольный лист бумаги длиной 20, шириной 13 согнули по диагонали и склеили. Найдите площадь S полученной фигуры. В ответе запишите $[S]$ – целую часть S (наибольшее целое число, не превосходящее S).

Ответ: 167.

▹ **4.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 23 и которое к тому же оканчивается на 23 и делится на 23.

Ответ: 82823.

▹ **5.** Найдите все векторы $\overline{l}\,(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x + y = 2, \\ |3x - y| = 1 \end{cases}$. В ответе запишите квадрат модуля суммы всех найденных векторов.

Ответ: 10.

▹ **6.** Вычислите $\sqrt{3959 - 88\sqrt{2023}} + \sqrt{4048 - 90\sqrt{2023}}$.

Ответ: 1.

▹ **7.** Пусть M — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4|y|, \\ |x| + |y| \ge 2, \\ y^2 - x^2 + 16 + 8y \ge 0. \end{cases}$$

Сколько точек с целочисленными координатами x и y принадлежат множеству M?

Ответ: 22.

▹ **8.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{12}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{12}. \end{cases}$$

В ответе укажите значение выражения $x+2y+3z$.

Ответ: 27.

▹ **9.** В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания делит гипотенузу в отношении 2:3. Найти стороны треугольника, если центр вписанной окружности удалён от вершины прямого угла на расстояние $\sqrt{8}$. В ответе укажите сумму длин сторон данного треугольника.

Ответ: 24.

▹ **10.** При каком целом значении k один из корней уравнения

$$4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$$

втрое меньше другого? В ответе запишите наибольшее из возможных значений k^2+k.

Ответ: 2.

Отборочный тур, 9 класс, 2 вариант

▹ **1.** Найдите сумму S всех отрицательных членов арифметической прогрессии c_1, c_2, c_3, …, если $c_n=20n+126$. В ответе запишите $2023+S$.

Ответ: 1687.

▹ **2.** Если представить сумму десятичных дробей 0,8(7) + 0,7(8) в виде несократимой обыкновенной дроби $\dfrac{m}{n}$, то значение выражения $m-n$ равно …?

Ответ: 2.

▹ **3.** Прямоугольный лист бумаги длиной 18, шириной 12 см согнули по диагонали и склеили. Найдите площадь S полученной фигуры. В ответе запишите $[S]$ – целую часть S (наибольшее целое число, не превосходящее S).

Ответ: 167.

▹ **4.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 23 и которое к тому же оканчивается на 23 и делится на 23.

Ответ: 82823.

▹ **5.** Найдите все векторы $\overline{l}\,(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ |x-3| + |y+1| = 2024. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат модуля суммы всех найденных векторов.

Ответ: 40.

▹ **6.** Вычислите $\sqrt{3873-86\sqrt{2024}}+\sqrt{4140-92\sqrt{2024}}$.

Ответ: 3.

▹ **7.** Пусть M — множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4|y|, \\ |x| + |y| \ge 2, \\ y^2 - x^2 + 16 + 8y \ge 0. \end{cases}$$

Сколько точек с целочисленными координатами x и y принадлежат множеству M?

Ответ: 17.

▹ **8.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 9z, \\ yz = 100x, \\ xz = 4y. \end{cases}$$

В ответе укажите наибольшую сумму $x^2 + y^2 + z^2$, если x, y, z – решения системы уравнений.

Ответ: 1336.

▹ **9.** В треугольник вписана окружность радиусом 3 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки 4 и 3 см. В ответе запишите сумму длин сторон треугольника.

Ответ: 56.

▹ **10.** При каком значении a один из корней уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$ в 2 раза больше другого?

Ответ: 4.

Отборочный тур, 9 класс, 3 вариант

▹ **1.** Найдите все положительные члены арифметической прогрессии $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots,$ если $b_n=58-10n$.

Ответ: 140.

▹ **2.** Если представить десятичную дробь 0,3(15) в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $n-m$ равно …?

Ответ: 113.

▹ **3.** В прямоугольнике со сторонами $a=18$ и $b=12$ проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти площадь четырехугольника, образованного биссектрисами.

Ответ: 18.

▹ **4.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 29 и которое к тому же оканчивается на 29 и делится на 29.

Ответ: 78329.

▹ **5.** Найдите все векторы $\overline{l}\,(x,y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x+y=10, \\ |2x-3y-5|=11. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат модуля суммы всех найденных векторов.

Ответ: 232.

▹ **6.** Вычислите $\sqrt{1962-62\sqrt{1001}}+\sqrt{2025-64\sqrt{1001}}$.

Ответ: 1.

▹ **7.** Пусть M – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 4|y|, \\ |x|+|y|\ge 2, \\ y^2-x^2+16+8y\ge 0. \end{cases}$$

Сколько точек с целочисленными координатами x и y принадлежат множеству M?

Ответ: 18.

▹ **8.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}=1{,}5, \\ \dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}=0{,}7, \\ \dfrac{1}{x+z}+\dfrac{1}{z+y}=1{,}2. \end{cases}$$

В ответе запишите сумму $x^2+y^2+z^2$, удовлетворяющих этой системе.

Ответ: 14.

▹ **9.** Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см. В ответе укажите диаметр этой окружности в мм.

Ответ: 125.

▹ **10.** При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2-6x+9c^2=0$ равен квадрату другого? В ответе запишите утроенную сумму всех найденных c.

Ответ: 1.

Отборочный тур, 9 класс, 4 вариант

▹ **1.** Найдите все положительные члены арифметической прогрессии d_1, d_2, d_3, …, если $d_n = 100 - 23n$.

Ответ: 170.

▹ **2.** Если представить сумму десятичных дробей 0,5(7) + 0,7(5) в виде несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, то значение выражения $m - n$ равно …?

Ответ: 1.

▹ **3.** В прямоугольнике со сторонами $a = 19$ и $b = 11$ проведены биссектрисы всех углов до взаимного пересечения. Найти периметр квадрата, образованного биссектрисами.

Ответ: 512.

▹ **4.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 17 и которое к тому же оканчивается на 17 и делится на 17.

Ответ: 15317.

▹ **5.** Найдите все векторы $\overline{l}\,(x, y)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 2|x-3| + 3|y-7| = 2000. \end{cases}$$

В ответе запишите квадрат модуля суммы всех найденных векторов.

Ответ: 232.

▹ **6.** Вычислите $\sqrt{244 - 22\sqrt{123}} + \sqrt{267 - 24\sqrt{123}}$.

Ответ: 1.

▹ **7.** Пусть M – множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4|y|, \\ |x| + |y| \geq 2, \\ y^2 - x^2 + 16 + 8y \geqslant 0. \end{cases}$$

Сколько точек с целочисленными координатами x и y принадлежат множеству M?

Ответ: 22.

▹ **8.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{z}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

В ответе запишите целую часть суммы $x+y+z$.

Ответ: 38.

▹ **9.** В треугольник вписана окружность радиусом 4 см. Вычислить длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки 5 и 4 см. В ответе запишите сумму длин сторон треугольника.

Ответ: 90.

▹ **10.** При каком значении a один из корней уравнения

$$9x^2+a^2+18=(6a+9)x$$

в два раза больше другого?

Ответ: 12.

10 класс

Отборочный тур, 10 класс, 1 вариант

▹ **1.** Найти сумму квадратов всех целых x, удовлетворяющих неравенству

$$\left|x^2 - 4|x| + 3\right| < 1.$$

Ответ: 20.

▹ **2.** В прямоугольном треугольнике даны: площадь – 84 см^2 и радиус вписанной окружности – 3 см. Найдите его стороны. В ответе запишите $|a-b|$, где a, b — найденные катеты.

Ответ: 17.

▹ **3.** Известно, что в сумме из 100 слагаемых $A = 1 + 11 + 111 + ... + 11...1$ реже всех цифр встречается цифра m, причем она повторяется в записи числа A k раз. Какое значение принимает $m+k$?

Ответ: 9.

▹ **4.** Определить число целых значений параметра a, при которых уравнение

$$a\sin x + 2\cos x = 1,(3)a$$

имеет решение.

Ответ: 5.

▹ **5.** Координаты вершин выпуклого многоугольника есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 3y^2 + 12y + 11 + 2x, \\ 2x = x^2 + y^2 + 4y + 1. \end{cases}$$

Найдите длину наибольшей диагонали многоугольника

Ответ: 4.

▹ **6.** Из круглой однородной пластины радиусом 4 м высверлили круглое отверстие радиусом 1 м, центр которого находится на расстоянии

3 м от центра тяжести исходной пластины. На сколько сантиметров сместился центр тяжести новой пластины?

Ответ: 20.

▹ **7.** Пусть $g(x)=3\sin x+4\cos x$, $f(g(x))=|3\cos x-4\sin x|$. Найдите $f(0)$.

Ответ: 5.

▹ **8.** В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляет 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимально возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Ответ: 10500.

▹ **9.** Последовательность $(a_1,a_2,a_3,...,a_n,...)$ такова, что $a_1=20$, $a_2=40$, $a_n=3a_{n-1}+4a_{n-2}$, $n=3,4,5,...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $a_{2024}+a_{2023}+a_{2022}+a_{2021}+a_{2020}+a_{2019}+a_{2018}+a_{2017}$?

Ответ: 64560.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 2023. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 840.

Отборочный тур, 10 класс, 2 вариант

▹ **1.** Найти сумму квадратов всех целых x, удовлетворяющих неравенству $\left|x^2-2|x|-1\right|\le 1$.

Ответ: 8.

▹ **2.** Вычислите катеты прямоугольного треугольника, если известны радиус r вписанной окружности ($r=6$) и гипотенуза $c=39$. В ответе запишите $|a-b|$, где a, b — катеты.

Ответ: 21.

▹ **3.** Какие цифры встречаются чаще других в записи числа B — следующей суммы 100 слагаемых $B = 3 + 33 + 333 + ... + 33...3$? Если таких цифр несколько, то в ответе запишите сумму этих цифр.

Ответ: 10.

▹ **4.** Определить число целых значений параметра b, при которых уравнение $4\sin x + b\cos x = 2,(2)b$ имеет решение.

Ответ: 5.

▹ **5.** Координаты вершин выпуклого многоугольника есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x = x^2 + 4y^2 + 16y + 13, \\ 4xy + 10x = x^2 + 4y^2 + 20y + 21. \end{cases}$$

Найдите площадь многоугольника.

Ответ: 4.

▹ **6.** Из прямоугольной однородной пластин размером 12 х 18 м вырезали квадрат со стороной 5 м, вершина которого совпадает с вершиной прямоугольника. На сколько сантиметров сместится центр тяжести новой пластины? Ответ округлить до целого значения.

Ответ: 97.

▹ **7.** Пусть $g(x) = 7\sin x + 24\cos x$, $f(g(x)) = |7\cos x - 24\sin x|$. Найдите $f(25)$.

Ответ: 0.

▹ **8.** Партия товара упакована в коробки трех типов. Вес и стоимость содержимого одной коробки составляют 6 кг и 90 тыс. руб. для первого типа, 16 кг и 280 тыс. руб. для второго типа, 7 кг и 120 тыс. руб. для третьего типа. Суммарная стоимость товара равна 3220 тыс. руб. Определить наименьший возможный общий вес партии товара.

Ответ: 186.

▹ **9.** Последовательность $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...)$ такова, что $b_1 = 20$, $b_2 = 40$, $b_n = 4b_{n-1} + 5b_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, ...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $b_{224} + b_{223} + b_{222} + b_{221} + b_{220} + b_{219} + b_{218} + b_{217}$?

Ответ: 6540.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1001. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 132.

Отборочный тур, 10 класс, 3 вариант

▹ **1.** Найти сумму квадратов всех целых x, удовлетворяющих неравенству $2|x-1| + 2x + 1 \ge x^2$.

Ответ: 15.

▹ **2.** В прямоугольном треугольнике с катетами $\sqrt{80}$ и $\sqrt{45}$ провели биссектрису меньшего острого угла. Найдите расстояние h до этой биссектрисы от вершины прямого угла.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

▹ **3.** Какие цифры встречаются чаще других в записи числа C — следующей суммы 100 слагаемых $C = 6 + 66 + 666 + ... + 66...6$? В ответе запишите сумму всех найденных цифр.

Ответ: 11.

▹ **4.** Определить число целых значений параметра c, при которых уравнение $(c-2)\sin x + (c+2)\cos x = c\sqrt{2,(8)}$ имеет решение.

Ответ: 7.

▹ **5.** Координаты вершин выпуклого многоугольника есть решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 7 + 2x, \\ 4x + |y+1| = 5. \end{cases}$$

Найдите площадь многоугольника. В ответе запишите целую часть найденной площади.

Ответ: 0.

▹ **6.** Из круглой однородной пластины радиусом 5 м высверлили круглое отверстие радиусом 1 м, центр которого находится на расстоянии 2 м 40 см от центра тяжести исходной пластины. На сколько сантиметров сместился центр тяжести новой пластины?

Ответ: 10.

▹ **7.** Пусть $g(x) = 5\sin x + 12\cos x$, $f(g(x)) = |5\cos x - 12\sin x|$.

Найдите $f(-13)$.

Ответ: 0.

▹ **8.** В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляет 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить максимально возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Ответ: 12600.

▹ **9.** Последовательность $(c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...)$ такова, что $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, ...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $c_{100} + c_{101} + c_{102} + c_{103} + c_{104} + c_{105} + c_{106} + c_{107}$?

Ответ: 2000.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1023. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 143.

Отборочный тур, 10 класс, 4 вариант

▹ **1.** Найти сумму квадратов всех целых *x*, удовлетворяющих неравенству $\left|x^2-1\right|\le 2|x|$.

Ответ: 10.

▹ **2.** В прямоугольном треугольнике с катетами $\sqrt{80}$ и $\sqrt{45}$ провели биссектрису большего острого угла. Найдите расстояние h до этой биссектрисы от вершины прямого угла.

Ответ: 3.

▹ **3.** Известно, что в сумме из 100 слагаемых $D=7+77+777+...+77...7$ реже всех встречается цифра *m*, причём она встречается в записи D k раз. Какое значение принимает $m+k$?

Ответ: 3.

▹ **4.** Определить число целых значений параметра *d*, при которых уравнение $(d^2-1)\sin x+2d\cos x=1.(1)d^2$ имеет решение.

Ответ: 7.

▹ **5.** Координаты вершин выпуклого многоугольника есть решения системы уравнений

$$\begin{cases}|x-y|+|x+y|=4,\\ |x|+|y|=3.\end{cases}$$

Найдите длины наибольшей и наименьшей диагонали. В ответе запишите сумму квадратов найденных длин.

Ответ: 30.

▹ **6.** Из прямоугольной однородной пластины размером 12 x 16 м вырезали прямоугольник размером 4 x 3 м, вершина меньшего прямоугольника совпадает с вершиной исходной пластины. Оказалось, что центр тяжести полученной пластины сместился на целое число сантиметров. Найдите это значение.

Ответ: 50.

▹ **7.** Пусть $g(x)=6\sin x+8\cos x$, $f(g(x))=\sqrt{3}\left|6\cos x-8\sin x\right|$. Найдите $f(5)$.

Ответ: 15.

▹ **8.** Партия товара упакована в коробки трех типов. Вес и стоимость содержимого одной коробки составляют 6 кг и 90 тыс. руб. для первого типа, 16 кг и 280 тыс. руб. для второго типа, 7 кг и 120 тыс. руб. для третьего типа. Суммарная стоимость товара равна 3220 тыс. руб. Определить наибольший возможный общий вес партии товара.

Ответ: 210.

▹ **9.** Последовательность $(d_1, d_2, d_3, ..., d_n, ...)$ такова, что $d_1 = 5$, $d_2 = -3$, $d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, ...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $d_{200} + d_{201} + d_{202} + d_{203} + d_{204} + d_{205}$?

Ответ: 804.

▹ **10.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1200. Пусть n — наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 156.

11 класс

Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▹ **1.** Вычислите

$$\sqrt{3959-88\sqrt{2023}}+\sqrt{4048-90\sqrt{2023}}.$$

Ответ: 1.

▹ **2.** Последовательность $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ такова, что $a_1 = 20$, $a_2 = 40$, $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, ...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $a_{2024} + a_{2023} + a_{2022} + a_{2021} + a_{2020} + a_{2019} + a_{2018} + a_{2017}$?

Ответ: 32264.

▹ **3.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 2023. Пусть n - наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 840.

▹ **4.** Из круглой однородной пластины радиусом 4 м высверлили круглое отверстие радиусом 1 м, центр которого находится на расстоянии 3 м от центра тяжести исходной пластины. На сколько сантиметров сместился центр тяжести новой пластины?

Ответ: 20.

▹ **5.** Найдите сумму цифр числа A, где $A = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11...1}_{100}$.

Ответ: 415.

▹ **6.** Найдите среднее арифметическое всевозможных значений $x + y$, если $x, y \in N$ и $x^2 + 4xy - 5y^2 = 901$.

Ответ: 165.

▹ **7.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\sqrt{x-4}-3\right| > \left|\sqrt{9-x}-2\right| + 1.$$

Ответ: 15.

▹ **8.** Известно, что неизвестная функция $f(x): R \xrightarrow{f(x)} R$ удовлетворяет соотношению $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, $f(2023)=0$. Чему равно $f(2024)$?

Ответ: 2024.

▹ **9.** В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a. Одна из граней пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Эта грань является равнобедренным треугольником с боковой стороной b ($b \neq a$). Найти площадь того сечения пирамиды, которое является квадратом. В ответе запишите целую часть найденной площади при $a=4, b=3$.

Ответ: 4.

▹ **10.** Найти сумму всех решений уравнения $\left(\left|\cos \pi x^2\right|-1\right)\sqrt{15+x-2x^2}=0$. В ответе записать целую часть найденной суммы.

Ответ: 5.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант

▹ **1.** Вычислите

$$\sqrt{3873-86\sqrt{2024}}+\sqrt{4140-92\sqrt{2024}}.$$

Ответ: 3.

▹ **2.** Последовательность $(b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...)$ такова, что $b_1=20$, $b_2=40$, $b_n=4b_{n-1}+5b_{n-2}$, $n=3,4,5,...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $b_{224}+b_{223}+b_{222}+b_{221}+b_{220}+b_{219}+b_{218}+b_{217}$?

Ответ: 6540.

▹ **3.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1001. Пусть n – наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 132.

▹ **4.** Из прямоугольной однородной пластины размером 12 х 18 м вырезали квадрат со стороной 5 м, вершина которого совпадает с вершиной прямоугольника. На сколько сантиметров сместится центр тяжести новой пластины? Ответ округлить до целого значения.

Ответ: 97.

▹ **5.** Найдите сумму цифр числа *B*, где $B = 3 + 33 + 333 + ... + \underbrace{33...3}_{100}$.

Ответ: 336.

▹ **6.** Найдите среднее арифметическое всевозможных значений $x + y$, если $x, y \in N$ и $x^2 + 2xy - 3y^2 = 893$.

Ответ: 215.

▹ **7.** Найдите сумму всех целых *x*, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\sqrt{x-16} - 6\right| > \left|\sqrt{36-x} - 4\right| + 2.$$

Ответ: 205.

▹ **8.** Известно, что неизвестная функция $f(x)$: $R \xrightarrow{\text{f(x)}} R$, удовлетворяющая соотношению $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$, $f(3) = 0$. Чему равно $f(11) + f(13)$?

Ответ: 1104.

▹ **9.** В прямоугольном параллелепипеде *ABCD* $A_1B_1C_1D_1$ (*ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1$) даны длины ребер $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Пусть *O* — центр основания *ABCD*, O_1 — центр основания $A_1B_1C_1D_1$, а *S* — точка, делящая отрезок OO_1 в отношении 1:3, т.е. $O_1S : SO = 1:3$. Найти площадь сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно диагонали AC_1 параллелепипеда и диагонали *BD* его основания *ABCD*. В ответе записать целую часть найденной площади при $a = 4$, $b = 5$ и $c = 6$.

Ответ: 28.

▹ **10.** Найти сумму всех решений уравнения

$$\left(\left|\sin(\pi\sqrt{x})\right|-1\right)\sqrt{16-x^2-2x}=0.$$

В ответе записать целую часть найденной суммы.

Ответ: 12.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

▹ **1.** Вычислите

$$\sqrt{1962-62\sqrt{1001}}+\sqrt{2025-64\sqrt{1001}}.$$

Ответ: 1.

▹ **2.** Последовательность $(c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...)$ такова, что $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_n = 2c_{n-1} + 3c_{n-2}$, $n = 3,4,5,...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $c_{100} + c_{101} + c_{102} + c_{103} + c_{104} + c_{105} + c_{106} + c_{107}$?

Ответ: 2000.

▹ **3.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1023. Пусть n – наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 143.

▹ **4.** Из круглой однородной пластины радиусом 5 м высверлили круглое отверстие радиусома 1 м, центр которого находится на расстоянии 2 м 40 см от центра тяжести исходной пластины. На сколько сантиметров сместился центр тяжести новой пластины?

Ответ: 10.

▹ **5.** Найдите сумму цифр числа C, где $C = 6 + 66 + 666 + ... + \underbrace{66...6}_{100}$.

Ответ: 366.

▹ **6.** Найдите среднее арифметическое всевозможных значений $x + y$, если $x, y \in N$ и $x^2 + 4xy - 5y^2 = 1189$.

Ответ: 215.

▹ **7.** Найдите сумму всех целых *x*, удовлетворяющих неравенству

$$3\sqrt{|x+1|-3} > \sqrt{x^2-2x-3}.$$

Ответ: 42.

▹ **8.** Известно, что некоторая функция $f(x)$: $R \xrightarrow{f(x)} R$ удовлетворяет соотношению $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, $f(1) + f(4) + f(7) = 21$. Чему равно $f(34)$?

Ответ: 544.

▹ **9.** В правильной шестиугольной пирамиде сторона основания равна *a*, а высота равна *h*. Вычислить площадь сечения, проходящего через середины двух несмежных и непараллельных сторон основания и через середину высоты пирамиды. В ответе записать целую часть найденной площади при $a = \sqrt{48}$ и $h = 17{,}5$.

Ответ: 100.

▹ **10.** Найти сумму всех решений уравнения $\left(\left|\mathrm{tg}(\pi x^2)\right| - 1\right)\sqrt{6 + x - 2x^2} = 0$. В ответе записать целую часть найденной суммы.

Ответ: 7.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▹ **1.** Вычислите

$$\sqrt{244 - 22\sqrt{123}} + \sqrt{267 - 24\sqrt{123}}.$$

Ответ: 1.

▹ **2.** Последовательность $(d_1, d_2, d_3, ..., d_n, ...)$ такова, что $d_1 = 5$, $d_2 = -3$, $d_n = d_{n-1} + 2d_{n-2}$, $n = 3, 4, 5, ...$ Сколько различных делителей имеет следующая сумма $d_{200} + d_{201} + d_{202} + d_{203} + d_{204} + d_{205}$?

Ответ: 804.

▹ **3.** Существуют такие натуральные числа, что произведение суммы цифр числа на их количество равно 1200. Пусть n – наименьшее из всех таких чисел. В ответе укажите количество делителей у числа $n+1$.

Ответ: 156.

▹ **4.** Из прямоугольной однородной пластины размером 12 x 16 м вырезали прямоугольник размером 4 x 3 м. Вершина меньшего прямоугольника совпадает с вершиной исходной пластины. Оказалось, что центр тяжести полученной пластины сместился на целое число сантиметров. Найдите это значение.

Ответ: 50.

▹ **5.** Найдите сумму цифр числа D, где $D = 7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{77\ldots7}_{100}$.

Ответ: 475.

▹ **6.** Найдите среднее арифметическое всевозможных значений $x + y$, если $x, y \in N$ и $x^2 + 2xy - 3y^2 = 989$.

Ответ: 264.

▹ **7.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству

$$3\sqrt{|2x+4|-12} \geq \sqrt{x^2 - 4x - 12}.$$

Ответ: 156.

▹ **8.** Известно, что некоторая функция $f(x): R \xrightarrow{f(x)} R$ удовлетворяет соотношению $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy(x+y)$, $f(1) + f(2) = 9$. Чему равно $f(4) - f(1)$?

Ответ: 45.

▹ **9.** Площадь сечения, проведенного через диагональ основания правильной четырехугольной пирамиды параллельно непересекающемуся с этой диагональю боковому ребру, равна S. Найти площадь сечения, проходящего через середины двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды. В ответ записать целую часть найденной площади при $S = 202{,}3$.

Ответ: 252.

▹ **10.** Найти сумму всех решений уравнения $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x^2}{2} - \sqrt{3}\right)\sqrt{10 + x - 2x^2} = 0$. В ответе записать целую часть найденной суммы.

Ответ: 4.

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

Каждое из заданий заключительного тура могло быть максимально оценено в 10 баллов. От участников требовалось предоставить полное решение.

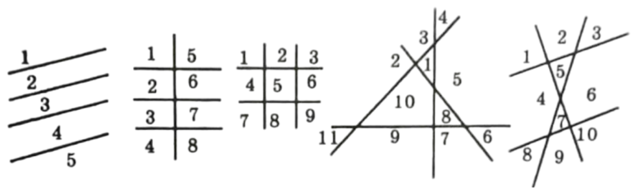
5 класс

▹ **Задача 1.** Записать цифры от 0 до 9 в строчку так, чтобы любое число, составленное из двух идущих подряд цифр, делилось на 7 или 13.

Решение. Условию задачи удовлетворяет, например, строчка 0, 7, 8, 4, 9, 1, 3, 5, 2, 6.

▹ **Задача 2.** На сколько частей могут делить плоскость четыре прямые?

Решение. На 5, на 8, на 9, на 10, на 11 частей.



▹ **Задача 3.** За книгу заплатили тысячу рублей, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить? Сколько стоит книга?

Решение. Чтобы справиться с путаницей в условии, обозначим через X сумму, которую осталось заплатить. Переформулируем задачу так: за книгу заплатили 1000 руб. и осталось заплатить еще X руб., где X – это та сумма, которую осталось бы заплатить, если бы за книгу заплатили X руб. Теперь понятно, что $X = 1000$, и книга стоит 2000 рублей.

Ответ: 2000 руб.

▹ **Задача 4.** На книжной полке у Знайки стоит история Цветочного города в 10 томах — тома идут по порядку слева направо. Толщина первого тома 2,1 см, второго - 2,2 см, третьего - 2,3 см и т.д., десятого - 3 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы десятого тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщина обложки 0.2 см.

Решение. Не думайте, что в ответе опечатка. Если у вас ответ 25,5 см, то он неправильный. Чтобы понять это, представьте, что вы берете первый том с полки левой рукой. С какой стороны находится его первая страница - со стороны большого пальца или мизинца? Правильный ответ:

$$2{,}2 + 2{,}3 + \ldots + 2{,}8 + 2{,}9 + \text{толщина корок.}$$

Для быстрого подсчета этой суммы можно сложить числа, равноотстоящие от концов. Получится четыре пары чисел с суммой 5,1 в каждой, т.е. $5{,}1 \cdot 4 = 20{,}4$.

Ответ: 20,4 см.

▹ **Задача 5.** Для участников командного первенства по математике ТИИМ-2024 было приготовлено конфет столько же, сколько вместе булочек и стаканов чая. Каждый участник съел по конфете и выпил по стакану чая, после чего осталось стаканов чая и конфет вместе столько же, сколько булочек. Остался ли еще чай?

Решение. Обозначим количество приготовленных конфет через K, количество булочек — B, стаканов чая — T. Известно, что $K = B + T$, или

$$T = K - B. \qquad (*)$$

В олимпиаде участвовало n школьников. После обеда осталось конфет $K - n$, стаканов чая — $T - n$. Известно, что теперь $(T - n) + (K - n) = B$, или

$$1 = 2n - (K - B). \qquad (**)$$

Выражая из (*) $K - B$ и подставляя в (**), получаем, что $T = n$, то есть на каждого школьника приходился только один стакан.

Ответ: Нет.

▹ **Задача 6.** У Незнайки был один лист бумаги. Он разрезал его на 4 части, некоторые из частей еще разрезал на 4 части и т.д. Когда он подсчитал число всех частей, то их оказалось 2024. Могло ли это быть?

Решение. Деление каждой части еще на 4 части увеличивает число частей бумаги на 3. Поэтому после любого числа делений количество частей бумаги при делении на три должно давать в остатке 1. Но 2024 = 3 · 674 + 2, поэтому Незнайка ошибся в подсчете.

▹ **Задача 7.** Если некоторое число увеличить на 15%, то получим 207. На сколько процентов надо уменьшить это число, чтобы получить 126?

Решение. Пусть x – данное число, а u – количество процентов, на которое его нужно уменьшить. Тогда $x+\frac{15}{100}x=207$, $x=180, x-\frac{u}{100}=126$, $180-\frac{180}{100}u=126$, $u=30$.

Ответ: 30%.

▹ **Задача 8.** Семь томов энциклопедического словаря стоят в следующем порядке: 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Расставьте их в порядке возрастания номеров, применив несколько раз следующую операцию: перестановку трех рядом стоящих томов в начало, в конец или между другими томами, не меняя порядка этих трех томов.

Решение. Перестановку можно провести, например, в таком порядке: 1562437 – 1624537 – 1245637 – 1234567.

▹ **Задача 9.** В некотором месяце три пятницы пришлись на четные числа. Какой день недели был 15 числа этого месяца?

Решение. Три пятницы, выпадающие на четные числа месяца, могут быть только 2, 16 и 30 числа. 15 числа был четверг.

▹ **Задача 10.** Ученики четырех классов решили посадить около школы сад. Ученики четвертого класса посадили половину всех деревьев, а ученики третьего класса – $\frac{1}{3}$ того, что посадили другие классы вместе. Ученики второго класса посадили $\frac{1}{4}$ того, что посадили остальные. Ученики первого класса посадили пять деревьев. Сколько деревьев было посажено всего?

Решение. Число деревьев обозначим через x.

Тогда $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+5=x$ и $x=100$.

$$IV-\frac{x}{2};$$

$$III-y=\frac{1}{3}(x-y)\rightarrow y=\frac{1}{4}x;$$

$$II-z=\frac{1}{4}(x-z)\rightarrow z=\frac{x}{5}.$$

6 класс

▹ **Задача 1.** Цену на яблоки подняли на 20%. Однако продавцу, для того чтобы изменить ценник, оказалось достаточным поменять местами цифры стоимости килограмма яблок. Сколько стоили яблоки до их подорожания, если эта цена была меньше 100 рублей?

Решение. Яблоки стоили 45 рублей за килограмм.

$$a \leq a, b \leq a,$$

$$(10a+b)1,2 = 10b + a \Leftrightarrow 5a = 4b, a = 4, b = 5,$$

$$10a + b = 45.$$

▹ **Задача 2.** Найдите все значения n, при которых сумма $1+1\times 2+1\times 2\times 3+\ldots+1\times 2\times\ldots(n-1)$ является точным квадратом.

Решение.

$$1! = 1, n = 1; 1! + 2! = 3, n = 2;$$

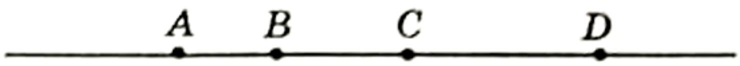
$$1! + 2! + 3! = 9, n = 3; 1! + 2! + ! + 4! = 33, n = 4;$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 33 + 120 = 153.$$

В дальнейшем последней цифрой всегда будет 3, поскольку прибавлять будем числа, оканчивающиеся нулем. Поэтому квадратов больше не будет. Таким образом, $n = 1; 3$.

▹ **Задача 3.** На прямой произвольно расположены четыре точки *A, B, C, D*. Найти все такие точки, что сумма расстояний от них до заданных точек является наименьшей.

Решение. Пусть длина отрезка *AB* равна *x*, отрезка *BC* — *y*, отрезка *CD* — *z*.



Тогда, если точка лежит левее *A*, сумма расстояний от нее до данных точек больше, чем от *A*. То же самое, если она лежит правее *D*. Если точка лежит на отрезке *BC*, то сумма расстояний от нее до *B* и *C* всегда равна *y*, а до A и D всегда равна $x+y+z$. Сумма всех расстояний тогда равна $x+2y+z$.

Если точка лежит на отрезке AB, но не совпадает с B, то сумма расстояний от нее до A и B всегда равна x, а до B, C и D всегда больше, чем $2y+z$. Вся сумма расстояний тогда больше, чем $x+2y+z$. Аналогично для точек отрезка CD, не совпадающих с C. Таким образом, условию удовлетворяют все точки отрезка BC и только они.

▹ **Задача 4.** В 6 классе учится 30 учеников. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные – меньше. Доказать, что в классе есть по крайней мере три ученика, сделавших одно и то же число ошибок.

Решение. Заготовили 13 ящиков с номерами 0, 1, 2, ..., 12. Каждую работу положили в ящик с номером, равным числу ошибок в этой работе. Так как $13 \cdot 2 = 26 < 30$, то найдется ящик, в котором не менее трех работ.

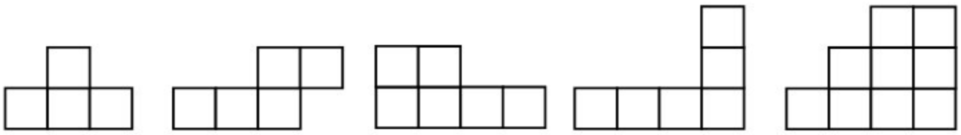
▹ **Задача 5.** Поставить вместо звездочек такие цифры, чтобы число 32*35717* делилось на 72.

Решение. Чтобы число делилось на 72, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8 и на 9. Чтобы оно делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось число, составленное из трех последних его цифр в том же порядке. Для числа 17* это 176, то есть последняя цифра 6. Для делимости на 9 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на 9. Сумма цифр числа 32*357176 без * равна 34. $0 \le * \le 9$. * может быть только 2, то есть искомое число 322357176.

▹ **Задача 6.** Найдите два числа, если их сумма равна 432, а наибольший общий делитель равен 36.

Решение. Поскольку наибольший общий делитель чисел равен 36, их можно записать как $36x$ и $36y$, где x и y взаимно просты. Тогда $x+y=\frac{432}{36}=12$. Таким образом, возможные пары $(x;y)$ – это (1;11) или (5;7). Искомые числа соответственно: 36 и 396 или 180 и 252.

▹ **Задача 7.** Используя четыре из пяти нарисованных ниже фигур, можно составить квадрат. Какая фигура является при этом лишней?



Решение. Выпишем, из какого количества клеток состоит каждая фигура: 4, 5, 6, 6, 9. Всего 30 клеток. Количество клеток в составленном квадрате должно являться точным квадратом натурального числа, меньшим 30. Подходящее значение 5^2 = 25 клеток. Для этого нужно выкинуть фигуру из пяти клеток, а из оставшихся четырех составить квадрат 5 × 5. Заметим, что получить квадрат 4 × 4 из 16 клеток невозможно, в этом случае надо было бы выкинуть фигуру из 14 клеток, а такой нет.

▹ **Задача 8.** Решите уравнение: $n + S(n) = 2024$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n.

Решение.

$$S(n) \le 9 \cdot 4 = 36. \quad n + S(n) = 2024;$$

$$n \ge 1988 \to n = 1900 + 10k + l, 2 \ge k \ge 9, 0 \ge l \ge 9;$$

$$1900 + 10k + l + 10 + k + l = 2024, 11k + 2l = 114, 2 \ge 2l \ge 18;$$

$$96 \ge 11k \ge 114, 8\frac{8}{11} \ge k \ge 10\frac{4}{11} \to k = 9, 2l = 15,$$

решений нет.

$$n \ge 2000, n \le 2024;$$

$$2 \le S(n) \le 2 + 1 + 9 = 12;$$

$$n + S(n) = 2024;$$

$$2012 \le n \le 2022.$$

$$n = 2000 + 10a + 1;$$

$$2002 + 11a + 2 = 2024;$$

$$a = 2, b = 0.$$

Ответ: $n = 2020$.

▹ **Задача 9.** Ученики четырех классов решили посадить около школы сад. Ученики четвертого класса посадили половину всех деревьев, а ученики третьего класса — $\frac{1}{3}$ того, что посадили другие классы вместе. Ученики второго класса посадили $\frac{1}{4}$ того, что посадили остальные. Ученики первого класса посадили пять деревьев. Сколько деревьев было посажено всего?

Решение. Число деревьев обозначим через *x*. Тогда $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+5=x$ и $x=100$.

$$IV-\frac{x}{2};$$

$$III-y=\frac{1}{3}(x-y)\to y=\frac{1}{4}x;$$

$$II-z=\frac{1}{4}(x-z)\to z=\frac{x}{5}.$$

▹ **Задача 10.** На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может его выпить за один день, а стадо из 37 слонов за пять дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

Решение. Пусть *V*(л) — объем озера, V_1(л) — объем воды, который вытекает каждый день из ключей. Допустим, что один слон впивает *x* литров воды в сутки. Тогда $37\times5=185$.

$$\begin{cases}183x=V+V_1,\\185x=V+5V_1,\end{cases}$$

откуда $V_1=\frac{1}{2}$. Таким образом, из ключей вытекает в сутки воды больше, чем может выпить один слон.

$$\begin{cases}2nV_1=V+nV_1,\\nV_1=V,\end{cases}$$

$$\begin{cases} 366x = 2V + x, \\ 365x = 2v = v + v, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2V_1, \\ 365V_1 = V. \end{cases}$$

Ответ: 1 год (невисокосный) = 365 дней.

7 класс

▹ **Задача 1.** Найти число целых неотрицательных решений уравнения $x+y+z=2024$.

Решение. $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ответ: 2051325

▹ **Задача 2.** Найти все целые решения уравнения $x^3+y^3=20232024$.

Решение. Так как x^3 и y^3 могут давать при делении на 9 только остатки 0, 1 и 8; то x^3+y^3 может давать только остатки 0, 1, 2, 7 и 8. Но 20232024 при делении на 9 дает остаток 6. Поэтому уравнение $x^3+y^3=20232024$ не имеет решений в целых числах.

Ответ: $20232024=20232027-3=2248003\times 9-3=2248002\times 9+6$.

▹ **Задача 3.** Число 321 – составное, но если заменить цифру 2 на 3, то оно станет простым числом 331. Найдите наименьшее трехзначное число, которое останется составным, если в нем произвольно изменить одну из цифр.

Решение. Наименьшее трехзначеное: $\overline{1a0}=N$. При любых $a=\overline{0,9}$ – число составное. Однако произвольное изменение любой цифры в таком числе может привести к тому, что число станет простым. Проиллюстрируем это, приведя примеры такой замены:

$a=0 \quad N=101$

$a=1 \quad N=113$

$a=2 \quad N=127$

$a=3 \quad N=131$

$a=4 \quad N=149$

$a=5 \quad N=151$

$a=6 \quad N=163$

$$a = 0 \quad N = 101$$

$$a = 7 \quad N = 173$$

$$a = 8 \quad N = 181$$

$$a = 9 \quad N = 191$$

Рассмотрим теперь число N = 200.

200 – составное;

201:3;

202,204,206,208:2;

205:5;

203=7· 26;

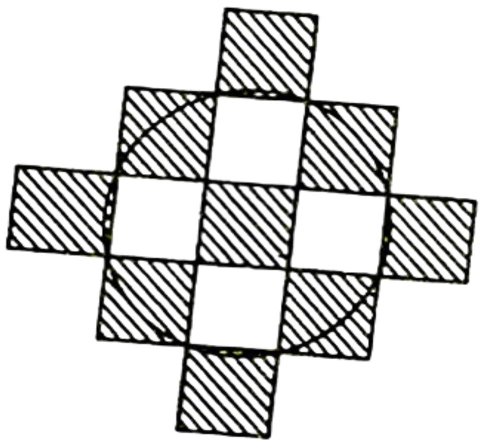
207:9;

209:11.

Ответ: 200.

▹ **Задача 4.** На шахматной доске постройте наибольшую окружность, проходящую только через черные поля.

Решение. Искомая окружность изображена на рисунке.



Её радиус равен $\sqrt{2,5}$. То, что окружность наибольшая, следует из того, что искомая окружность может пересекаться с границами клеток только в углах, но не может пройти подряд через три угла, лежащих на одной прямой.

▹ **Задача 5.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{etg}, \\ \{a,b\} \cup \{c,d\} = \{e,t,g\}. \end{cases}$$

Здесь $\overline{ab}$ — двузначное число, *a, b* — его цифры. {*a, b, c, d*} — множество однозначных чисел, содержащее *a, b, c, d, ...* — свои элементы, ∪ — объединение множеств.

Решение. Смысл второго равенства системы состоит в том, что любая цифра из левой части первого равенства встречается в его правой части, и наоборот. Ясно, что $e=1$. Поэтому 1 встречается в левой части первого равенства. Без ограничений общности можно считать, что $a=1$ или $b=1$.

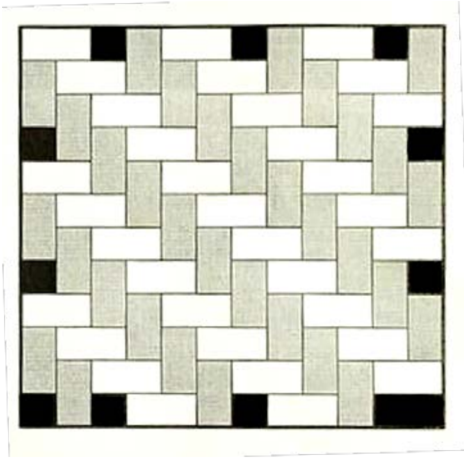
1. Пусть $a=1$. Тогда $c=8$ или $c=9$. Пусть $c=8$. Тогда $t=0$, а значит, $b=0$ либо $d=0$. А это приведет, к тому, что $\overline{ab}+\overline{cd}<100$. Таким образом, $c=9$. Тогда $g=9, b+d=9, t=0$. Получается два решения: 10 + 99 = 109 и 19 + 90 = 109.

2. Пусть b = 1. Число $d \neq 9$ (иначе *a* = 0 или *c* = 0). Число $d \neq 0$ (иначе $a=c=1$). Число $d \neq 1$ (иначе $g=2, a=2, c=t, a=10$). Поэтому $g=1+d$, $a+c=10+t$. Значит, $t=d$. Если $a=d+1$, то $c=9, d=8$. Получаем еще одно решение задачи: 91 + 98 = 189. При $c=d+1$ будет $a=9$ и ответ будет таким же.

Ответ: 10 + 99 = 109; 19 + 90 = 109; 91 + 98 = 189.

▹ **Задача 6.** На доску из 2024×2024 клеток положили без наложений некоторое количество доминошек, каждая из которых закрывает ровно две клетки. Оказалось, что ни у каких двух доминошек нет общей целой стороны, т.е. никакие две не образуют ни квадрат 2×2, ни прямоугольник 4х1. Может ли при этом быть покрыто более 99% всех клеток доски?

Решение. Да, может. Построим «паркет», в котором чередуются ряды вертикальных 2 × 1 и горизонтальных 1 × 2 доминошек. На рисунке эти ряды показаны серым и белым цветом для доски 12 × 12 (непокрытые клетки доски закрашены чёрным).



Похожий пример можно построить и для доски размером 2024 × 2024. Непокрытыми могут остаться лишь некоторые клетки первой строки и столбца, а также последней строки и столбца. Поэтому доля непокрытых клеток от их общего числа будет не более, чем $\frac{4\cdot 2023}{2024\cdot 2024} < \frac{4}{2024} = \frac{1}{512} < 1\%$. Значит, будет покрыто более 99% всех клеток доски.

▹ **Задача 7.** Мальчик наклеивает все свои марки в альбом. Если он наклеит по 20 марок на лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то, по крайней мере, один лист останется пустым. Если ему подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение. Пусть в альбоме x листов, а y — количество марок у мальчика. Тогда из условия следует, что $20x < y \le 23(x-1)$ и $y + 21x = 500$. Из второго уравнения $y = 500 - 21x$ подставим в неравенство:

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x, \\ 500 - 21x \le 23(x-1), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x > \frac{500}{41}, \\ x \le \frac{523}{44}. \end{cases}$$

Учитывая, что x — целое, то получаем $x = 12$.

Ответ: 12.

▹ **Задача 8.** Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2496, а наибольший общий делитель равен 24?

Решение. Пусть пара (a,b) удовлетворяет условию задачи; тогда $a=24k, b=24l$, где k и l — взаимно простые натуральные числа. Поскольку произведение двух натуральных чисел равно произведению их наибольшего общего делителя на наименьшее общее кратное, то $kl=104$.

Так как $104 = 8 \cdot 13$, то имеются следующие пары: $k=1, l=104, k=8, l=13, k=13, l=8, k=104, l=1$ и, следовательно, существует четыре пары чисел, удовлетворяющие условию задачи: (24;2496), (192;312), (312;192), (2496;24).

Ответ: (24; 2496), (192; 312), (312; 192), (2496; 24).

▹ **Задача 9.** Семь томов энциклопедического словаря стоят в следующем порядке: 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Расставьте их в порядке возрастания номеров, применив несколько раз следующую операцию: перестановку трех рядом стоящих томов в начало, в конец или между другими томами, не меняя порядка этих трех томов.

Решение. Перестановку можно провести, например, в таком порядке: 1562437 – 1624537 – 1245637 – 1234567.

▹ **Задача 10.** В некотором месяце три пятницы пришлись на нечетные числа. Какой день недели был 16 числа этого месяца?

Решение. Три пятницы, выпадающие на четные числа месяца, могут быть только 2, 16 и 30 числа. Четверг или суббота.

8 класс, Азия

▹ **Задача 1.** В новой серии Смешариков герои Бараш, Лосяш и Копатыч участвовали в интеллектуальной игре ”Сообрази”. Каждому была предложена коробка, в которой 120 спичек. Каждому нужно сложить из всех спичек (ломать их нельзя) прямоугольный треугольник. Все решили эту задачу, но оказалось, что у Лосяша получился самый большой по площади треугольник, а у Копатыча — самый маленький. Какой треугольник построил Бараш, если он оказался отличным от треугольников, построенных его друзьями?

Решение.

$$3^2+4^2=5^2,\ 3+4+5=12;$$

$$5^2+12^2=13^2,\ 5+12+13=30;$$

$$8^2+15^2=17^2,\ 8+15+17=40;$$

НОК(12,30,40)=120;

$$120=(3+4+5)\cdot 10=30+40+50,\ S=600;$$

$$120=(5+12+13)\cdot 4=20+48+52,\ S=480;$$

$$120=(8+15+17)\cdot 3=24+45+51,\ S=540.$$

Ответ: Бараш построил треугольник со сторонами 24, 45, 51.

▹ **Задача 2.** Пусть $S(n)$ – сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа, что

а) $n-S(n)=2024$,

б) $n-S(n)=2025$?

Решение.

n и $S(n)$ имеют один и тот же остаток при делении на 9.

$$n=\overline{a_1a_2\ldots a_k}=a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\ldots+a_{k-1}\cdot 10+a_k=a_1(9+1)^{(k-1)}+$$
$$+a_2(9+1)^{(k-2)}+\ldots+a_{k-1}(9+1)+a_k=9N+(a_1+a_2+\ldots+a_k)=9N+S(n).$$

Следовательно,

$$n-S(n)\,\vdots\,9.$$

а) $2024 = 924 \cdot 9 + 8, 2024$ не$\vdots 9 \Rightarrow$ не существует таких n, чтобы выполнить уравнение a;

б) $n = 2034$, $S(n) = 9$, $2034 - 9 = 2025$.

▹ **Задача 3.** Дан прямоугольный бильярд размерами 2024 × 2025. Из точки, находящейся на борту длиной 2025, на расстоянии 100 от угла, выпущен шар под углом $45°$ к борту. Доказать, что после некоторого числа отражений от бортов шар попадёт в угол бильярда. Найти длину пути, пройденного при этом шаром.

Решение.

Рассмотрим прямую $y = x + 100$ или прямую $y = -x + 100$. Начало движения — точка (0;100). Движение в области $x \geqslant 0$. Условие прохождения через узел сети в первом случае будет $2025n = 100 + 2024m$, $m > 0$. При $m = 0$ остаток от деления числа $100 + 2024m$ на 2025 равен 100. При увеличении m на 1 остаток будет уменьшаться на 1. Первый раз остаток будет равен 0 при $m = 100$. Длина траектории в этом случае $202400\sqrt{2}$. Во втором случае условие имеет вид $2025n = 100 - 2024m$, решением в этом случае будет $m = 1925, n = -1924$. Длина траектории в этом случае будет равна $2024 \cdot 1925\sqrt{2}$.

Ответ: $2024 \cdot 1925\sqrt{2}$.

▹ **Задача 4.** Дан угол величиной $54°$. Пользуясь циркулем и линейкой, разделить его на три равные части. Можно ли это сделать одним циркулем?

Решение. Строим окружность с центром O в вершине угла; точки пересечения окружности со сторонами угла A и B (дуга $AB = 54°$). От точки A откладываем дугу AC (содержащую AB) величиной $60°$; $\angle BOC = 6°$. От B отложим три дуги BC.

▹ **Задача 5.** Часы пробили полночь. Сколько градусов составляет угол между часовой и минутной стрелками через 20240 секунд?

Решение.

20240 секунд = 5 часов 37 минут 20 секунд = 5 часов + 113/3;

$$360/12 = 30°/\text{час} = 0,5°/\textit{мин} = 5/600°/\textit{сек} = 1/120°/\textit{сек};$$

$$\alpha = 20240 \cdot 1/120° = 168\frac{2}{3}^{\circ};$$

$$360/60 = 6°/\text{час} = 1/10°/\text{час};$$

$$\beta = 20240 \cdot 1/10° = 2024° = 5 \cdot 360° + 224°;$$

$$224 - 168\frac{2}{3} = 55,(3).$$

Ответ: $55,(3)$.

▹ **Задача 6.** При подготовке к экзамену три школьника решали 150 задач. Каждый решил 80 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение.

Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_i количество задач, решённых только *j*-м учеником, через a_{ij} – количество задач, решённых только *i*-м и *j*-м учениками, через a_{123} – количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач – $a_1 + a_2 + a_3$, лёгких – a_{123}. Нас интересует величина $s = a_1 + a_2 + a_3 - a_{123}$. Согласно условию, имеем систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 150, \\ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 80, \\ a_2 + a_{23} + a_{23} + a_{123} = 80, \\ a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 80. \end{cases}$$

Сложив почленно три последних равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1 - a_2 - a_3 + a_{123} = 240 - 300 = -60$, откуда $s = 60$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 60.

Ответ: 60.

▹ **Задача 7.** Все нечетные числа выписываются подряд: 13579111315… Какая цифра стоит на 2024 месте?

Решение.

Однозначных нечетных чисел в десятке 5, двухзначных в каждом десятке 5, всего $9 \cdot 5 = 45$. Трехзначных в каждой сотне 50, всего $9 \cdot 50 = 450$. Всего цифр в нечетных числах, не превышающих 1000, $5 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 450 = 1445$. Для четырехзначных чисел остается $2024 – 1445 = 579 = 4 \cdot 144 + 3$. 145-е четырехзначное нечетное число равно 1289. На третьей позиции цифра 8.

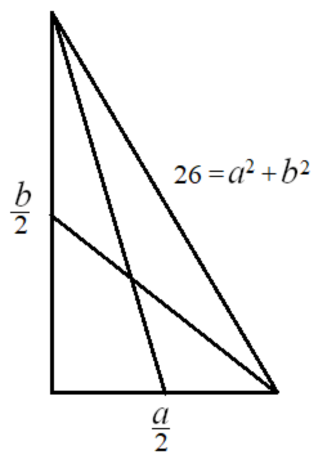
Ответ: 8.

▹ **Задача 8.** В прямоугольном треугольнике длины медиан, проведенных к катетам, равны 19 и 22. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

Решение. Обозначим $a = BC, b = AC, c = AB$. Пусть $AN = 19, BM = 22$. Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам *MBC* и *ANC*, получаем

$$a^2 + \frac{b^2}{4} = AN^2 = 19^2 = 361,$$

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = BM^2 = 22^2 = 484.$$



Складывая эти равенства, получим $\frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}b^2 = 845 = 5 \cdot 169$. Отсюда

$$a^2 + b^2 = 4 \cdot 169.$$

Поэтому искомая гипотенуза

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 \cdot 169} = 2 \cdot 13 = 26.$$

Ответ: 26.

▹ **Задача 9.** В 28-значное число 3*4*1*0*8*2*40923*0*320*2*56 случайным образом вместо звездочек записываются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Какова вероятность, что полученное число будет делиться на 396?

Решение.

Для того чтобы число делилось на 396, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, 9 и 11. поскольку число оканчивается на 56, оно делится на 4. Сумма цифр числа равна 99, поэтому оно делится на 9. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах, равна 44, на четных – 55, их разность делится на 11. Т.е. всегда делится на 11. Достоверное событие.

Ответ: 1.

▹ **Задача 10.** Найдите семь целых, попарно различных, отличных от нуля чисел, сумма кубов которых равнялась бы

8 класс, Европа

▹ **Задача 1.** В новой серии Смешариков герои Бараш, Лосяш и Копатыч участвовали в интеллектуальной игре “Сообрази”. Каждому была предложена коробка, в которой 280 спичек. Каждому нужно сложить из всех спичек (ломать их нельзя) прямоугольный треугольник. Все решили эту задачу, но оказалось, что у Лосяша получился самый большой по площади треугольник, а у Копатыча – самый маленький. Какой треугольник построил Бараш, если он оказался отличным от треугольников, построенных его друзьями?

Решение.

$$8^2+15^2=17^2,\ 8+15+17=40;$$

$$7^2+24^2=25^2,\ 7+24+25=56;$$

$$20^2+21^2=29^2,\ 20+21+29=70;$$

$$\text{НОК}(40,56,70)=280;$$

$$280=(8+15+17)\cdot 7=56+105+119, S=2940;$$

$$280=(7+24+25)\cdot 5=35+120+125, S=2100;$$

$$280=(20+21+29)\cdot 4=80+84+126, S=3360.$$

Ответ: Бараш построил треугольник со сторонами 56, 105, 119.

▹ **Задача 2.** Пусть $S(n)$ – сумма цифр в десятичной записи натурального числа n. Существуют ли такие натуральные числа, что

а) $n-S(n)=6030$,

б) $n-S(n)=6033$?

Решение.

n и $S(n)$ имеют один и тот же остаток при делении на 9:

$$\begin{aligned}n&=\overline{a_1a_2\ldots a_k}=a_1\cdot 10^{k-1}+a_2\cdot 10^{k-2}+\ldots+a_{k-1}\cdot 10+a_k=\\&=a_1(9+1)^{k-1}+a_2(9+1)^{k-2}+\ldots+a_{k-1}(9+1)+a_k=\\&=9N+(a_1+a_2+\ldots+a_k)=9N+S(n);\end{aligned}$$

$$n-S(n)\,\vdots\,9.$$

а) $n = 6048, S(n) = 18; 6048 - 18 = 6030;$

б) 6033 не$\vdots 9 \Rightarrow$ не существует таких *n*, чтобы выполнить уравнение *б*.

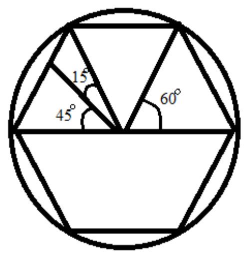
▹ **Задача 3.** Дан прямоугольный бильярд размерами 2024 на 2025. Из точки, находящейся на борту длиной 2025, на расстоянии 100 от угла, выпущен шар под углом $45°$ к борту. Доказать, что после некоторого числа отражений от бортов шар попадет в угол бильярда. Найти длину пути, пройденного при этом шаром.

Решение.

Рассмотрим прямую $y = x + 100$ или прямую $y = -x + 100$. Начало движения – точка $(0;100)$. Движение в области $x \geqslant 0$. Условие прохождения через узел сети в первом случае будет $2025n = 100 + 2024m,\ m > 0$. При $m = 0$ остаток от деления числа $100 + 2024m$ на 2025 равен 100. При увеличении m на 1 остаток будет уменьшаться на 1. Первый раз остаток будет равен 0 при $m = 100$. Длина траектории в этом случае будет $202400\sqrt{2}$. Во втором случае условие имеет вид $2025n = 100 - 2024m$, решением в этом случае будет $m = 1925, n = -1924$. Длина траектории в этом случае будет равна $2024 \cdot 1925\sqrt{2}$.

▹ **Задача 4.** Пользуясь циркулем и линейкой, разделить угол величиной $45°$ на три равные части.

Решение.



1. Строим угол $60°$. В окружность радиусом 8 вписываем правильный шестиугольник;

2. Строим угол $45°$;

3. $45° = 15° + 15° + 15°$.

▹ **Задача 5.** Часы пробили полночь. Какой угол между часовой и минутной стрелками будет через 2024 минуты?

Решение.

2024 минуты = 33 часа 44 минуты = 24 часа + 9 часов + 44 минуты = = 24 часа + 9 часов + 44/60 часа = 24 часа + 146/15 часа.

$360/12 = 30°$.

$360°$ — угол, на который поворачивается минутная стрелка за 1 час.

$6°$ — угол, на который поворачивается минутная стрелка за 1 минуту.

$A = (146/15) \cdot 30 = 292°$ — угол, на который повернулась часовая стрелка за 146/15 часа.

$B = 6 \cdot 44 = 264°$;

$A - B = 28$.

Ответ: 28.

▹ **Задача 6.** При подготовке к экзамену три школьника решали 2024 задачи. Каждый решил 1200 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение.

Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_j количество задач, решённых только *j*-м учеником, через a_{ij} – количество задач, решённых только *i*-м и *j*-м учениками, через a_{123} – количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач – $a_1 + a_2 + a_3$, лёгких – a_{123}. Нас интересует величина $s = a_1 + a_2 + a_3 - a_{123}$. Согласно условию, имеем систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 2024, \\ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 1200, \\ a_2 + a_{23} + a_{23} + a_{123} = 1200, \\ a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 1200. \end{cases}$$

Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1 - a_2 - a_3 + a_{123} = 3600 - 4048 = -448$, откуда $s = 448$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 448.

Ответ: 448.

▹ **Задача 7.** Все четные числа, начиная с 2, выписываются подряд: 2468101214… Какая цифра стоит на 2024 месте?

Решение.

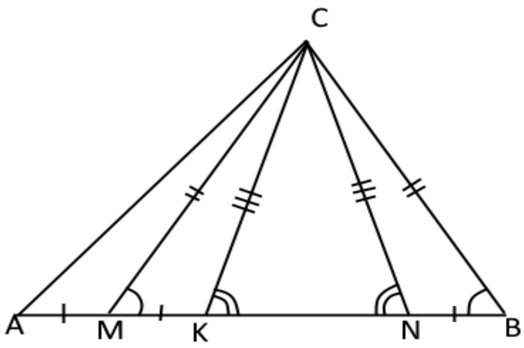
Однозначных четных чисел в десятке 4, двухзначных в каждом десятке 5, всего 9 · 5 = 45. Трехзначных в каждой сотне 50, всего 9 · 50 = 450. Всего цифр в четных числах, не превышающих 1000, 5+2 · 45+3 · 450 = 1444. Для четырехзначных чисел остается 2024 – 1444 = 580 = 4 · 145. 145-е четырехзначное четное число равно 1288. Последняя цифра 8.

Ответ: 8.

▹ **Задача 8.** На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечены точки *M* и *K*. Оказалось, что $AM = MK,\ CM = CB,\ \angle AKC = 0{,}5\angle CAK + 90°$. Найдите длину стороны *AC*, если длина отрезка *MB* равна 8 см.

Решение.

По условию треугольник *MCB* равнобедренный, так как $CM = CB$. Поэтому $\angle CMK = \angle CBK$. Отметим на стороне *AB* точку *N* так, чтобы $BN = MK (= AM)$. Тогда $AN = MB$. Далее, $\vartriangle KMC = \vartriangle NBC$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда, в частности, $CK = CN$, и $\angle ANC = \angle NKC = 180° - (0{,}5\angle CAK + 90°) = 90° - 0{,}5\angle CAK$.



Тогда в треугольнике *ACN* находим

$$\angle ACN = 180° - \angle ANC - \angle CAK =$$
$$= 180° - (90° - 0{,}5\angle CAK) - \angle CAK =$$
$$= 90° - 0{,}5\angle CAK = \angle ANC.$$

Следовательно, треугольник *ACN* равнобедренный, и тогда $AC = AN = MB = 8$.

▹ **Задача 9.** В 28-значное число 3*4*1*0*8*2*40923*0*320*2*56 случайным образом вместо звездочек записываются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Какова вероятность, что полученное число будет делиться на 792?

Решение.

Для того чтобы число делилось на 792, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8, 9 и 11. Поскольку число оканчивается на 56, то делится на 8 тогда и только тогда, когда третья цифра с конца чётная (их пять из десяти). Сумма цифр числа равна 54, поэтому оно делится на 9. Сумма цифр стоящих на нечетных местах равна 44, на четных 55, их разность делится на 11.

Ответ: 0,5.

▹ **Задача 10.** Найдите семь натуральных, попарно различных чисел, сумма кубов которых равнялась бы

9 класс, Азия

▹ **Задача 1.** При подготовке к экзамену три школьника решали 2024 задачи. Каждый решил 1200 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение.

Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_j количество задач, решённых только *j*-м учеником, через a_{ij} — количество задач, решённых только *i*-м и *j*-м учениками, через a_{123} — количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач — $a_1 + a_2 + a_3$, лёгких — a_{123}. Нас интересует величина $s = a_1 + a_2 + a_3 - a_{123}$. Согласно условию, имеем систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 2024, \\ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 1200, \\ a_2 + a_{23} + a_{23} + a_{123} = 1200, \\ a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 1200. \end{cases}$$

Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1 - a_2 - a_3 + a_{123} = 3600 - 4048 = -448$, откуда $s = 448$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 448.

▹ **Задача 2.** Дан отрезок $\sqrt[4]{5}$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной $\sqrt{5}$.

Решение. С помощью циркуля и линейки можно из отрезков a и b построить отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{ab}$, а также разделить отрезок на заданное число частей. Прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt[4]{5}$ и $2\sqrt[4]{5}$ имеет гипотенузу $5^{3/4}$. Теперь строим отрезок $d = \sqrt{\sqrt[4]{5} \cdot 5^{3/4}} = \sqrt{5}$.

▹ **Задача 3.** Пусть $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ – десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырёхзначные числа, для которых вычисляется соотношение

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = \overline{a_1 a_2} \cdot \overline{a_3 a_4} + 2024.$$

Решение.

$$\overline{a_1 a_2} = x \in [10;99],\ \overline{a_3 a_4} = y \in [10;99];$$

$$100x + y = x \cdot y + 2024;$$

$$(x-1)y - 100(x-1) + 1924 = 0;$$

$$(x-1)(100-y) = 1924 = 4 \cdot 481 = 4 \cdot 13 \cdot 37;$$

$$9 \leqslant x-1 \leqslant 98;$$

$$1 \leqslant 100-y \leqslant 90;$$

$$a \cdot b = 4 \cdot 3 \cdot 37;$$

$$\begin{cases} a = 13 \\ b = 148 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 37 \\ b = 52 \end{cases} \begin{cases} x = 38 \\ y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 26 \\ b = 74 \end{cases} \begin{cases} x = 27 \\ y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 52 \\ b = 37 \end{cases} \begin{cases} x = 53 \\ y = 63 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 74 \\ b = 26 \end{cases} \begin{cases} x = 75 \\ y = 74 \end{cases}$$

$$3848 - 38 \cdot 48 = 2024;$$

$$2726 - 27 \cdot 26 = 2024;$$

$$5363 - 53 \cdot 63 = 2024;$$

$$7574 - 75 \cdot 74 = 2024.$$

Ответ: (3848, 5363, 2726, 7574)

▹ **Задача 4.** Площадь треугольника ABC равна 5. В продолжении стороны CA расположена точка M таким образом, что $AM = \frac{1}{3} AC$. В продолжении стороны AB расположена точка N таким образом, что $BN = \frac{1}{3}AB$. В продолжении стороны BC расположена точка K таким образом, что $CK = \frac{1}{3}BC$. Найдите площадь треугольника MKN.

Решение.

Поскольку $AM = \frac{1}{3}AC$, $AN = \frac{4}{3}AB$, $\sin\angle NAM = \sin\angle BAC$, площади треугольников NAM и ABC относятся как $\frac{4}{9}$, то есть $S_{ADC} = \frac{4}{9}\cdot 5 = \frac{20}{9}$. Такую же площадь имеет каждый из треугольников KBN и MCK. Значит, $S_{MKN} = 5 + 3\cdot\frac{20}{9} = \frac{35}{3}$.

Ответ: $\frac{35}{3}$.

▹ **Задача 5.** Можно ли представить в виде суммы квадратов трех натуральных чисел число N, если

а) $N = 9\cdot 2^{2024}$,

б) $N = 9\cdot 2^{2025}$?

Решение. $9 = 2^2 + 2^2 + 1$;

$2\cdot 9 = 4^2 + 1^2 + 1^2$.

а) $(2^{1012}\cdot 2)^2 + (2^{1012}\cdot 2)^2 + (2^{1012}\cdot 1)^2 = 2^{2024}(\underbrace{2^2 + 2^2 + 1}_{9})$.

б) $2^{2\cdot 1013-1}\cdot 9 = 2^{2(1013-1)}((2^2)^2 + 1^2 + 1^2) = 2^{2\cdot 1013-2}(2\cdot 9) =$

$= (2^{1012}\cdot 4)^2 + (2^{1012}\cdot 1)^2 + (2^{1012})^2$.

▹ **Задача 6.** Номера каких годов XXI века могут быть представлены в виде $2^n - 2^k$, где n и k – натуральные числа?

Решение.

$$2^{12} - 2^{11} = 2^{11} = 2048;$$

$$2^{11} - 2^5 = 2016;$$

$$2^{11}-2^4=2032;$$

$$2^{11}-2^3=2040;$$

$$2^{11}-2^2=2044;$$

$$2^{11}-2=2046.$$

▹ **Задача 7.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками ”!” и ”?”, но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение *a?b* обозначает одно из следующих: $a-b, b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные *a, b* и скобки есть и используются, как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков ”!”, ”?” записать выражение, которое гарантированно равно $20a-24b$.

Решение.

Заметим, что выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию “+” с двумя аргументами. Выражение 0?((0!(*x*!0))?0) всегда равно –*x*.

Теперь легко выписать искомое выражение

$$((\ldots\underbrace{(a+a)+\ldots+}_{19+\text{знаков}}a)+(-((\ldots\underbrace{(b+b)+\ldots+}_{23+\text{знаков}}b)).$$

▹ **Задача 8.** Последовательность начинается числами 3 и 2. Каждый следующий член последовательности определяется как последняя цифра произведения двух предыдущих. Какое число стоит на 2024 месте?

Решение. Выпишем несколько первых членов последовательности

$$3,\underbrace{2,6,2,2,4,8}_{\text{период}},2,6,\ldots$$

Поскольку в последовательности встретились две цифры 2 и 6, которые были записаны прежде, то дальше цифры будут периодически повторяться.

Длина периода составляет шесть цифр. Делим $(2024-1)$ на 6, получается в остатке 1. Отсчитываем первую цифру в периоде — это 2.

Ответ: 2.

▹ **Задача 9.** Решить уравнение $\left[\frac{7+8x}{5}\right]=\frac{10x-1}{3}$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Решение.

$$x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty), \frac{x}{y}=t;$$

$$2+\frac{3}{2}t=\{1+t^2\};$$

$$\{x+n\}=\{x\};$$

$$\{t^2\}=2+\frac{3}{2}t, 0\leqslant 2+\frac{3}{2}t<1, -\frac{4}{3}\leqslant t<-\frac{2}{3};$$

$$\frac{4}{9}<t^2\leqslant 1\frac{7}{9};$$

$$\frac{4}{9}<t^2<1;$$

$$\{t^2\}=t^2, t\in\left(-1;-\frac{2}{3}\right);$$

$$1\leqslant t^2\leqslant\frac{16}{9};$$

$$\{t^2\}=t^2, t\in\left[-\frac{4}{3};-1\right];$$

1. $t^2-\frac{3}{2}t-2=0;$

$$t_1=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}+2}=\frac{3+\sqrt{41}}{4}\notin\left(-1;-\frac{2}{3}\right);$$

$$t_2=\frac{3-\sqrt{41}}{4}\in\left(-1;-\frac{2}{3}\right).$$

2. $t^2-\frac{3}{2}t-3=0;$

$$t_1=\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{9}{16}+3}=\frac{3+\sqrt{57}}{4}\notin\left[-\frac{4}{3};-1\right];$$

$$t_2=\frac{3-\sqrt{57}}{4}\in\left[-\frac{4}{3};-1\right].$$

Ответ: $\left\{\frac{3-\sqrt{57}}{4};\frac{3-\sqrt{41}}{4}\right\}$.

▹ **Задача 10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел *m*, *n*, *k* таких, что $m^3+n^3+k^3=96059601$.

Решение.

$$S(96059601)=9\cdot 10673289(=N_1)=9^2\cdot 1185921(=N_2)=$$

$$=9^3\cdot 131769(=N_3)=9^4\cdot 14641(=N_4)=$$

$$=S(N)=36,\ S(N_1)=36,\ N_1\vdots 9,\ S(N_2)=27,\ N_2\vdots 9, S(N_3)=27,\ N_3\vdots 9,$$

$$N_4\vdots 11=11\cdot 1331=11^2\cdot 121=11^4.$$

$$S_1=1+6+1=8, S_2=4+4=8, S_1-S_2=0;$$

$$N=9^4\cdot 11^4=99^4;$$

$$m=\alpha\cdot 99, n=\beta\cdot 99, k=\gamma\cdot 99;$$

$$2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 2^3+3^3+4^3=99;$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=99;$$

$$\alpha=2, \beta=3, \gamma=4;$$

$$(198,\ 297,\ 396).$$

Ответ: (198, 297, 396).

9 класс, Европа

▹ **Задача 1.** При подготовке к экзамену три школьника решали 150 задач. Каждый решил 80 из них, каждую задачу кто-нибудь решил. Задача называется трудной, если её решил только один школьник, и лёгкой, если её решили все три школьника. Каких задач больше — лёгких или трудных? На сколько?

Решение.

Математической моделью задачи являются круги Эйлера. Обозначим через a_i количество задач, решённых только j-м учеником, через a_{ij} — количество задач, решённых только i-м и j-м учениками, через a_{123} — количество задач, решённых всеми учениками. Тогда количество трудных задач — $a_1 + a_2 + a_3$, лёгких — a_{123}. Нас интересует величина $s = a_1 + a_2 + a_3 - a_{123}$. Согласно условию, имеем систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 150, \\ a_1 + a_{12} + a_{13} + a_{123} = 80, \\ a_2 + a_{23} + a_{23} + a_{123} = 80, \\ a_3 + a_{13} + a_{23} + a_{123} = 80. \end{cases}$$

Сложив почленно три последние равенства системы и отняв удвоенное первое, найдём $-a_1 - a_2 - a_3 + a_{123} = 240 - 300 = -60$, откуда $s = 60$. Полученный результат означает, что трудных задач больше, и больше на 60.

Ответ: 60.

▹ **Задача 2.** Дан отрезок $\sqrt{5}$. С помощью линейки и циркуля постройте отрезок $\sqrt[4]{5}$.

Решение. С помощью циркуля и линейки можно из отрезков a и b построить отрезки $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{ab}$, а также разделить отрезок на заданное число частей. Прямоугольный треугольник с катетами $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ имеет гипотенузу 5. Делим отрезок 5 на 5 равных частей, получается единичный отрезок. Теперь строим отрезок $\sqrt[4]{5}=\sqrt{1\cdot\sqrt{5}}$ как среднее геометрическое двух отрезков 1 и $\sqrt{5}$.

▹ **Задача 3.** Пусть $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ – десятичная запись k-значного числа. Найдите все шестизначные числа, для которых выполняется соотношение

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}=\overline{a_1a_2a_3}\cdot\overline{a_4a_5a_6}+2024.$$

Решение.

$$\overline{a_1a_2a_3}=x\in[100;999],\ \overline{a_4a_5a_6}=y\in[100;999];$$

$$1000x+y=x\cdot y+2024;$$

$$(x-1)y-1000(x-1)+1024=0;$$

$$(x-1)(1000-y)=1024=2^{10};$$

$$\begin{cases}x-1=128\\1000-y=8\end{cases}\ \begin{cases}x=129\\y=992\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-1=256\\1000-y=4\end{cases}\ \begin{cases}x=257\\y=996\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-1=512\\1000-y=2\end{cases}\ \begin{cases}x=513\\y=998\end{cases}$$

$$129992-129\cdot992=2024;$$

$$257996-257\cdot996=2024;$$

$$513998-513\cdot998=2024.$$

Ответ: (129992, 257996, 513998).

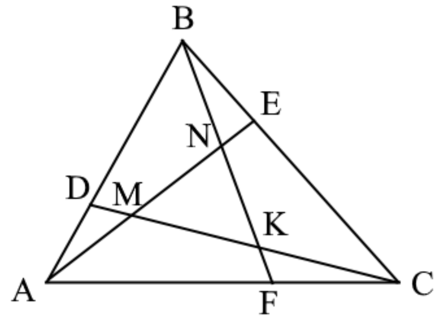
▹ **Задача 4.** Площадь треугольника *ABC* равна *S*. Точки *D*, *F*, *E* расположены на сторонах *AB*, *AC*, *BC* так, что $AD=\frac{1}{3}AB$, $BE=\frac{1}{3}BC$, $CF=\frac{1}{3}AC$. На пересечении прямых *AE*, *CD*, *BF* образовался треугольник. Найдите его площадь.

Решение.

$$\overline{AM}=\overline{AC}+\overline{CM}=\overline{AC}+x\cdot\overline{CD}=\overline{AC}+x\cdot\left(\overline{CA}+\frac{1}{3}\overline{AB}\right)=(1-x)\overline{AC}+\frac{x}{3}\overline{AB};$$

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{AB}+\frac{1}{3}\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=\frac{2}{3}\overline{AB}+\frac{1}{3}\overline{AC}.$$

Векторы $\overline{AM}$ и $\overline{AE}$ коллинеарные, поэтому $\frac{1-x}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{x}{3}}{\frac{2}{3}}$, откуда $x=\frac{6}{7}$ и $\overline{CM}=\frac{6}{7}\overline{CD}$.



$$\frac{S_{AMC}}{S_{ADC}}=\frac{CM}{CD}=\frac{6}{7};\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{3}.$$

Поэтому $S_{AMC}=\frac{2}{7}S_{ABC}$. Аналогично

$$S_{ANB}=S_{BKC}=\frac{2}{7}S_{ABC}.$$

Значит, $S_{MNK}=S_{ABC}-(S_{AMC}+S_{ANB}+S_{BKC})=\frac{1}{7}S_{ABC}$.

Ответ: $\frac{1}{7}S$.

▹ **Задача 5.** Можно ли натуральное число N представить в виде суммы квадратов трех натуральных чисел

а) $N=7\cdot 2^{2024}$,

б) $N=7\cdot 2^{2025}$?

Решение. Возможно только при всех нечетных натуральных m $N=7\cdot 2^{m}$.

Пусть $7\cdot 2^{m}=a^2+b^2+c^2$.

Так как число в левой части этого равенства четное, то четным должно быть и число в правой части. Это возможно только в двух случаях:

1) среди чисел a, b, c два нечетных и одно четное;

2) все три числа четные.

Покажем, что в случае 1) равенство возможно только при $m=1$. Пусть, без нарушения общности, числа a и b нечетны, а число c четно, т.е. $a=2k-1$, $b=2l-1$ и $c=2n$. Тогда равенство

$$N=7\cdot 2^m=4(k^2+l^2-k-l+n^2)+2.$$

Это равенство, если $m>1$, невозможно, поскольку, левая часть делится на 4, а правая нет.

Рассмотрим случай 2). Пусть 2^q – наибольшая степень двойки, на которую делится каждое из чисел a, b и c, т.е. $a=2^q a_1, b=2^q b_1, c=2^q c_1$, где среди чисел a_1,b_1,c_1 хотя бы одно нечетно.

Тогда равенство принимает вид $7\cdot 2^{m-2q}=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ Если $m-2q\geqslant 2$, то, поскольку среди чисел a_1,b_1,c_1 хотя бы одно нечетное, а тогда нечетных среди них ровно два, такое же рассуждение, как и выше, показывает, что равенство невозможно.

Поэтому равенство может выполняться только либо при $m-2q=0$, либо $m-2q=1$. Если $m-2q=0$, то равенство принимает вид $7=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ и простой перебор показывает, что это невозможно.

Если $m-2q=1$, то равенство принимает вид $14=a_1^2+b_1^2+c_1^2$ и его решения найдены выше: например, $a_1=3, b_1=2, c_1=1$. Таким образом, представление $7\cdot 2^m=a^2+b^2+c^2$ имеет место только при нечетных m.

▹ **Задача 6.** Номера каких годов XX века могут быть представлены в виде 2^n-2^k, где n и k – натуральные числа?

Решение. Следует подобрать такие натуральные числа n и k, чтобы выполнялось неравенство

$$1900<2^n-2^k\leqslant 2000.$$

Так как $2^{10}<1900$, то $n\geqslant 11$; при $n\geqslant 12$ $2^n\geqslant 4096$, а тогда при любых n и k ($n>k$) $2^n-2^k>2000$, так что $n=11$. Подобрать возможные значения k уже не представляет труда, и мы получаем два номера года, удовлетворяющих условию задачи:

$$1920=2^{11}-2^7 \text{ и } 1984=2^{11}-2^6.$$

▹ **Задача 7.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками ”!” и ”?”, но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются, как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков ”!”, ”?” записать выражение, которое гарантированно равно $25a-20b$.

Решение.

Заметим что, выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию ”+” с двумя аргументами. Выражение $0?((0!(x!0))?0)$ всегда равно $-x$.

Теперь легко выписать искомое выражение

$$((\dots\underbrace{(a+a)+\dots+}_{знаков+24}a)+(-((\dots\underbrace{(b+b)+\dots+}_{знаков+19}b)).$$

▹ **Задача 8.** Последовательность начинается числами 2 и 3. Каждый следующий член последовательности определяется, как последняя цифра произведения двух предыдущих. Какое число стоит на 2024 месте?

Решение. Выпишем несколько первых членов последовательности

$$2,3,\underbrace{6,8,8,4,2,8}_{\text{период}},6,8,\dots$$

Поскольку в последовательности встретились две цифры 6 и 8, которые были записаны прежде, то дальше цифры будут периодически повторяться.

Длина периода составляет шесть цифр. Делим 2024 – 2 на 6, получается в остатке 0. Отсчитываем шестую цифру в периоде – это 8.

Ответ: 8.

▹ **Задача 9.** Решить уравнение $\left\{\dfrac{15x-4}{6}\right\}=\dfrac{5x-3}{5}$, где $\{a\}=a-[a]$ — дробная часть числа a.

Решение. Преобразуем уравнение так, чтобы оно содержало антье:

$$\frac{15x-4}{6}-\left[\frac{15x-4}{6}\right]=\frac{5x-3}{5};$$

$$\left[\frac{15x-4}{6}\right]=\frac{45x-2}{30}.$$

Теперь произведём замену $y=\dfrac{45x-2}{30}$ и выразим x через y :

$$x=\frac{30y+2}{45}.$$

Подставим x в последнее уравнение:

$$\left[\frac{30y-10}{18}\right]=y;$$

$$\left[\frac{15y-5}{9}\right]=y;$$

$$0\leqslant\frac{15-5}{9}-y<1;$$

$$0\leqslant 6y-5<9;$$

$$0<\frac{5}{6}\leqslant y<\frac{14}{6}<3.$$

Так как y — целое число, то y может быть равно только 1 или 2. Следовательно, x будет равно $\dfrac{32}{45}$ или $\dfrac{62}{45}$ соответственно.

Ответ: $\left\{\dfrac{32}{45};\dfrac{62}{45}\right\}$.

▹ **Задача 10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел *m*, *n*, *k* таких, что $m^3+n^3+k^3=1679616$.

Решение.

$$S(1679616)=1+6+7+9+6+1+6=36;$$

$$N \vdots 9\ ,\ N \vdots 4\ \Rightarrow N \vdots 36.$$

$$N=36\cdot 46656=36^2\cdot 1296=36^4.$$

$$m^3+n^3+k^3=36^4;$$

$$m=a\cdot 36,\ n=b\cdot 36,\ k=c\cdot 36;$$

$$a^3+b^3+c^3=36;$$

$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3.$$

Ответ: (36, 72, 108).

10 класс, Азия

▹ **Задача 1.** Решите уравнение $x^2-\sqrt{2024-x}=2024$. В ответе запишите сумму целых частей найденных решений.

Решение.

Обозначим число 2024 буквой a. Получим уравнение с параметром: $x^2-\sqrt{a-x}=a$. Перенесём корень в правую часть, параметр a в левую часть и возведём уравнение в квадрат. Полученное уравнение рассмотрим как квадратное относительно a: $a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0$.

Его дискриминант $D=(2x^2+1)^2-4(x^4+x)=(2x-1)^2$, поэтому $a=\dfrac{(2x^2+1)\pm(2x-1)}{2}$.

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения: $a=x^2+x$ или $a=x^2-x+1$.

Выясним, какие корни этих квадратных (уже относительно x) уравнений нужно включить в ответ, а какие — посторонние. Из начальной записи следует, что $x^2-a=\sqrt{a-x}$, поэтому $x^2-a\geqslant 0$. Для первого уравнения имеем $x^2-a=-x$, следовательно, $x\leqslant 0$. Для второго уравнения: $x^2-a=x-1$, в этом случае оставляем только корень $x\geqslant 1$. Положим назад $a=2024$. Для первого уравнения $x^2+x-2024=0$ отрицательный корень равен $x_1=-\dfrac{1+\sqrt{8097}}{2}$, $-46<x_1<-45$. Для второго уравнения в ответ войдёт корень, больший 1: $x_2=\dfrac{1+\sqrt{8093}}{2}$, $45<x_2<46$. $x_1+x_2=-46+45=-1$.

Ответ: -1.

▹ **Задача 2.** Пусть $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ – десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырёхзначные числа, для которых выполняется соотношение

$$\overline{a_1a_2a_3a_4}=\overline{a_1a_2}\cdot\overline{a_3a_4}+2024.$$

Решение.

$$\overline{a_1a_2} = x \in [10;99], \overline{a_3a_4} = y \in [10;99];$$

$$100x + y = x \cdot y + 2024;$$

$$(x-1)y - 100(x-1) + 1924 = 0;$$

$$(x-1)(100-y) = 1924 = 4 \cdot 481 = 4 \cdot 13 \cdot 37;$$

$$9 \leqslant x-1 \leqslant 98;$$

$$1 \leqslant 100-y \leqslant 90;$$

$$a \cdot b = 4 \cdot 3 \cdot 37;$$

$$\begin{cases} a = 13 \\ b = 148 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 37 \\ b = 52 \end{cases} \begin{cases} x = 38 \\ y = 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 26 \\ b = 74 \end{cases} \begin{cases} x = 27 \\ y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 52 \\ b = 37 \end{cases} \begin{cases} x = 53 \\ y = 63 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 74 \\ b = 26 \end{cases} \begin{cases} x = 75 \\ y = 74 \end{cases}$$

$$3848 - 38 \cdot 48 = 2024;$$

$$2726 - 27 \cdot 26 = 2024;$$

$$5363 - 53 \cdot 63 = 2024;$$

$$7574 - 75 \cdot 74 = 2024.$$

Ответ: (3848, 5363, 2726, 7574).

▹ **Задача 3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2024 отрицательных. Сколько из исходных чисел равно 0?

Решение.

Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных (x, y — целые числа, $x + y \leq 100$). Так как отрицательное произведение возникает только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных. Имеем $xy = 2024$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $\sqrt{2024} \in (44; 45)$, т. е. не менее 44. Кроме того, это число является делителем числа 2024. $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Делителей — $4 \cdot 4 = 16$. Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44; 100]$, будут только числа 44 и 46. Из уравнения $xy = 2024$ находим, что второе число при этом будет равняться 46 или 44 соответственно. Пара (88; 23) не удовлетворяет условию $x + y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 44 отрицательных числа и 46 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 90, а поэтому среди исходных чисел ровно 10 нулевых.

Ответ: 10.

▹ **Задача 4.** Последовательность $a_n = n^2 + 1$ отображает множество натуральных чисел N на некоторое множество $M \subset N$. ”Правильный робот Вася” из Сколково из подмножества M_1 множества M, содержащего только десятизначные числа, случайным образом выбирает один элемент. Какова вероятность того, что в записи этого элемента встречаются две одинаковые цифры?

Решение.

Квадрат натурального числа при делении на 3 может давать остатки только 0 и 1. Если в десятичном числе $n^2 + 1$ все цифры различны, то сумма цифр равна $1 + 2 + ... + 9 = 45$, значит, оно делится на 3. Следовательно, n^2 при делении на 3 дает остаток 2, чего не может быть. Тогда всегда встретятся, по крайней мере, две одинаковые цифры.

Ответ: 1.

▹ **Задача 5.** Сколько существует троек различных целых чисел, удовлетворяющих условию: квадрат любого из них на 225 меньше произведения двух других чисел?

Решение.

Пусть $a>b>c$ искомые целые числа $\begin{cases} a^2=bc+225, & (1)\\ b^2=ac+225, & (2)\\ c^2=ab+225. & (3)\end{cases}$

$$(1)-(2)\to(a-b)(a+b+c)=0\to a+b+c=0;$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0;$$

$$3ab+3bc+3ca=-3\cdot 225;$$

$$\begin{cases} ab+bc+ca=-225;\\ a+b+c=0;\end{cases}$$

$$ab-(a+b)^2=-225;\ a^2+ab+b^2=225;$$

$$(a+\frac{b}{2})^2=225-\frac{3}{4}b^2\to|b|\le\sqrt{\frac{4\cdot 225}{3}}\ ;\ \left[\frac{4\cdot 225}{3}\right]=300;$$

$$b=-17,-16,...,0,...,16,17;$$

$$a=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{225-\frac{3}{4}b^2}\ ,$$

$b=0$, $a=\pm 45$, $c=\mp 45$, два решения.

В силу симметрии шесть решений:

$$(0;15;-15),(0;-15;15),(15;0;-15),(-15;0;15),(-15;15;0),(15;-15;0).$$

Покажем, что уравнение $225-\frac{3}{4}b^2=h^2$ решений, кроме $b=0$, не имеет.

$$900=3b^2+4h^2\ .$$

Т.к. $900\,\vdots\,4$ и $4h^2\,\vdots\,4$, то $b\,\vdots\,2$, т.е. $b=2b_1$. Тогда

$$225=3b_1^2+h^2 \text{ или } 3\left(75-b_1^2\right)=h^2.$$

$$\left(75-b_1^2\right)\vdots\,3\to h^2\,\vdots\,3,\ h=3h_1,\ \left(75-b_1^2\right)=3h_1^2\to b_1=3b_2\ .,$$

$$25-h_1^2=3b_3^2:$$

$$h_1=1\to b_2^2=8;$$

$$h_1=2\to b_2^2=7;$$

$$h_1 = 3 \to b_2^2 = \frac{16}{3};$$

$$h_1 = 4 \to b_2^2 = 3;$$

$$h_1 = 5 \to b_2^2 = 0;$$

решений нет.

▹ **Задача 6.** Вычислите $\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)}$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Решение.

Решим задачу в общем случае: $A = \frac{(2^3-1)(3^3-1)...(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)}$.

$$k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1)\ ,\ k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1).$$

Введем следующие обозначения: $a_k = k^2+k+1$, $b_k = k^2-k+1$.

Нетрудно показать, что $a_k = b_{k+1}$.

В этом случае

$$S = \frac{(2-1)(2^2+2+1)\cdot(3-1)(3^2+3+1)...(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)\cdot(3+1)(3^2-3+1)...(n+1)(n^2-n+1)} =$$

$$= \frac{1\cdot a_2\cdot 2\cdot a_3\cdot ...(n-1)\cdot a_n}{3\cdot b_2\cdot 4\cdot b_3\cdot ...(n+1)\cdot b_n} = \frac{2\cdot a_n}{b_2\cdot n(n+1)} =$$

$$= \frac{2}{3}(1+\frac{1}{n^2+n}) = \frac{2}{3}(1+\frac{1}{100^2+100}) = \frac{3367}{5050}.$$

Ответ: $\frac{3367}{5050}$.

▹ **Задача 7.** Какие последние четыре цифры содержатся в записи числа 5^{2024} ?

Решение.

Рассмотрим несколько степеней пятерки

$$5, 25, 125, \underbrace{625, 3125, ..5625, ..8125}_{периода\,4}, \underbrace{..0625, ..3125, ..5625, ..8125}_{периода\,4}$$

$$2024 - 3 = 2021 = 4\cdot 505 + 1.$$

Ответ: 0625.

▹ **Задача 8.** Запись положительного числа, кратного трем, состоит только из цифр 4 и 5. Сумма всех его цифр делится на 7. Найдите наименьшее такое число.

Решение.

Пусть число записано из k четверок и n пятерок. Тогда по условию задачи $4k+5n$ делится на 21, а это возможно только тогда, когда $n=s$ и $k=4s$. При $s=1$ получаем решение.

Ответ: 44 445.

▹ **Задача 9.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками "!" и "?", но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение *a?b* обозначает одно из следующих: $a-b, b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные *a, b* и скобки есть и используются, как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков "!", "?" записать выражение, которое гарантированно равно $20a-24b$.

Решение.

Заметим, что выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично теперь мы можем использовать операцию "+" с двумя аргументами. Выражение $0?((0!(x!0))?0)$ всегда равно $-x$.

Теперь легко выписать искомое выражение

$$((\ldots\underbrace{(a+a)+\ldots+a}_{знаков+19})+(-((\ldots\underbrace{(b+b)+\ldots+b}_{знаков+23})).$$

▹ **Задача 10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел *m, n, k* таких, что $m^3+n^3+k^3=1679616$.

Решение.

$$S(1679616)=1+6+7+9+6+1+6=36;$$

$$N \vdots 9\ ,\ N \vdots 4\ \Rightarrow N \vdots 36;$$

$$N=36\cdot 46656=36^2\cdot 1296=36^4;$$

$$m^3+n^3+k^3=36^4;$$

$$m=a\cdot 36,\ n=b\cdot 36,\ k=c\cdot 36;$$

$$a^3+b^3+c^3=36;$$

$$a=1\ ,\ b=2\ ,\ c=3.$$

Ответ: (36, 72, 108).

10 класс, Европа

▹ **Задача 1.** Решите уравнение $x^2 - \sqrt{224 - x} = 224$. В ответе запишите сумму целых частей найденных решений.

Решение.

Обозначим число 224 буквой a. Получим уравнение с параметром: $x^2 - \sqrt{a - x} = a$. Перенесём корень в правую часть, параметр a в левую часть и возведём уравнение в квадрат. Полученное уравнение рассмотрим как квадратное относительно a: $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 + x = 0$.

Его дискриминант $D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 + x) = (2x - 1)^2$, поэтому $a = \dfrac{(2x^2 + 1) \pm (2x - 1)}{2}$.

Таким образом, данное уравнение распадается на два уравнения: $a = x^2 + x$ или $a = x^2 - x + 1$.

Выясним, какие корни этих квадратных (уже относительно x) уравнений нужно включить в ответ, а какие — посторонние. Из начальной записи $x^2 - a = \sqrt{a - x}$, так что $x^2 - a \geqslant 0$. Для первого уравнения имеем $x^2 - a = -x$, следовательно, $x \leqslant 0$. Для второго уравнения: $x^2 - a = x - 1$, в этом случае оставляем только корень $x \geqslant 1$. Положим назад $a = 224$. Для первого уравнения $x^2 + x - 224 = 0$ отрицательный корень равен $x_1 = -\dfrac{1 + \sqrt{896 + 1}}{2}$, $-15{,}5 < x_1 < -15$. Для второго уравнения в ответ войдёт корень, больший 1: $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{892 + 1}}{2}$, $15 < x_2 < 15{,}5$.

$$x_1 + x_2 = -16 + 15 = -1.$$

Ответ: –1.

▹ **Задача 2.** Пусть $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ – десятичная запись k-значного числа. Найдите все шестизначные числа, для которых выполняется соотношение

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot \overline{a_4 a_5 a_6} + 2024.$$

Решение.

$$\overline{a_1a_2a_3} = x \in [100;999], \overline{a_4a_5a_6} = y \in [100;999];$$

$$1000x + y = x \cdot y + 2024;$$

$$(x-1)y - 1000(x-1) + 1024 = 0;$$

$$(x-1)(1000-y) = 1024 = 2^{10};$$

$$\begin{cases} x-1=128 \\ 1000-y=8 \end{cases} \begin{cases} x=129 \\ y=992 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=256 \\ 1000-y=4 \end{cases} \begin{cases} x=257 \\ y=996 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=512 \\ 1000-y=2 \end{cases} \begin{cases} x=513 \\ y=998 \end{cases}$$

$$129992 - 129 \cdot 992 = 2024;$$

$$257996 - 257 \cdot 996 = 2024;$$

$$513998 - 513 \cdot 998 = 2024.$$

Ответ: $(129992, 257996, 513998)$.

▹ **Задача 3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2000 отрицательных. Сколько из исходных чисел равно 0?

Решение.

Пусть среди написанных чисел *x* положительных и *y* отрицательных (*x*,*y* — целые числа, $x + y \leqslant 100$). Так как отрицательное произведение возникает только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно *xy* отрицательных. Имеем $xy = 2000$. Тогда наибольшее из чисел *x* и *y* не превосходит $\sqrt{2000}$, т.е. не менее 44. Кроме того, это число является делителем числа $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, поэтому в его разложении на простые множители присутствуют только числа 2 и 5, причём 2 в степени не больше, чем 4. Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44;100]$, будут только числа 50 и 100. Из уравнения $xy = 2000$ находим, что второе число при этом будет равняться 20 или 1 соответственно. Пара (100;1) не удовлетворяет условию $x+y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 50 отрицательных чисел, и 20 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 70, а поэтому среди исходных чисел ровно 30 нулевых.

Ответ: 30.

▹ **Задача 4.** В 28-значное число 3*4*1*0*8*2*40923*0*320*2*56 случайным образом вместо звездочек записываются цифры 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Какова вероятность, что полученное число будет делиться на 396?

Решение.

Для того чтобы число делилось на 396, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4, 9 и 11. Поскольку число оканчивается на 56, то оно делится на 4. Сумма цифр числа равна 99, поэтому оно делится на 9. Сумма цифр, стоящих на нечетных местах, равна 44, на четных 55, их разность делится на 11. Т.е. всегда делится на 11. Достоверное событие.

Ответ: 1.

▹ **Задача 5.** Сколько существует троек различных целых чисел, удовлетворяющих условию: квадрат любого из них на 2025 меньше произведения двух других чисел?

Решение.

Пусть $a > b > c$ искомые целые числа

$$\begin{cases} a^2 = bc + 2025, & (1) \\ b^2 = ac + 2025, & (2) \\ c^2 = ab + 2025. & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \to (a-b)(a+b+c)=0 \to a+b+c=0;$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0;$$

$$3ab+3bc+3ca=-3\cdot 2025;$$

$$\begin{cases} ab+bc+ca=-2025; \\ a+b+c=0; \end{cases}$$

$$ab-(a+b)^2=-2025,\ a^2+ab+b^2=2025;$$

$$(a+\frac{b}{2})^2 = 2025-\frac{3}{4}b^2 \to |b| \le \sqrt{\frac{4\cdot 2025}{3}} = \sqrt{2700};\ 51 < \sqrt{2700} < 52;$$

$$b = -51, -50,\ \ldots\ , 50, 51;$$

$$a = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{2025-\frac{3}{4}b^2},$$

$$b = 0\ ,\ a = \pm 45\ ,\ c = \mp 45,\ \text{два решения.}$$

В силу симметрии шесть решений:

$$(0;45;-45),(0;-45;45),(45;0;-45),(-45;0;45),(45;-45;0),(-45;45;0).$$

Покажем, что уравнение $2025-\frac{3}{4}b^2 = h^2$ решений, кроме $b=0$, не имеет. Пусть $b = 2b_1$ $2025 = 3b_1^2 + h^2$, $2025 \vdots 3 \to h^2 \vdots 3$, $h = 3h_1$.

$$675 = 3b_1^2 + 3h_1^2,\ 675 \vdots 3 \to b_1^2 \vdots 3,\ b_1 = 3b_2.$$

$$225 = 3b_2^2 + 3h_1^2,\ 225 \vdots 3 \to h_1^2 \vdots 3,\ h_1 = 3h_2.$$

$$75 = 3b_2^2 + 3h_2^2,\ 75 \vdots 3 \to b_2^2 \vdots 3,\ b_2 = 3b_2.$$

$$25 = 3b_3^2 + 3h_2^2,\ \text{решений нет.}$$

▹ **Задача 6.** Вычислите $\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(50^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(50^3+1)}$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Решение.

Решим задачу в общем случае: $S = \frac{(2^3-1)(3^3-1)...(50^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(50^3+1)}$.

$$k^3-1 = (k-1)(k^2+k+1),\ k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1).$$

Введем следующие обозначения: $a_k = k^2+k+1$, $b_k = k^2-k+1$.

Нетрудно показать, что $a_k = b_{k+1}$.

В этом случае

$$S=\frac{(2-1)(2^2+2+1)\cdot(3-1)(3^2+3+1)...(n-1)(n^2+n+1)}{(2+1)(2^2-2+1)\cdot(3+1)(3^2-3+1)...(n+1)(n^2-n+1)}=$$

$$=\frac{1\cdot a_2\cdot 2\cdot a_3\cdot...(n-1)\cdot a_n}{3\cdot b_2\cdot 4\cdot b_3\cdot...(n+1)\cdot b_n}=\frac{2\cdot a_n}{b_2\cdot n(n+1)}=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{n^2+n})=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{50^2+50})=.$$

$$=\frac{2551}{3825}.$$

Ответ: $\frac{2551}{3825}$.

▹ **Задача 7.** Какие последние три цифры содержит запись числа 7^{2024}?

Решение.

Последние четыре цифры:

$$\begin{array}{cccc} 7^1=7 & 7^2=49 & 7^3=343 & 7^4=2401 \\ 7^5=6807 & 7^6=7649 & 7^7=3543 & 7^8=4801 \\ 7^9=3607 & 7^{10}=5249 & 7^{11}=6743 & 7^{12}=7201 \\ 7^{13}=0407 & 7^{14}=2849 & 7^{15}=9943 & 7^{16}=9601 \\ 7^{17}=7207 & 7^{18}=0449 & 7^{19}=3143 & 7^{20}=2001 \\ 7^{21}=4007 & 7^{22}=8049 & 7^{23}=6343 & 7^{24}=4401 \\ 7^{25}=0807 & 7^{26}=6649 & 7^{27}=9543 & 7^{28}=6801 \end{array}$$

$$2024=20*101+4;$$

$$7^{2024}=(7^{20})^{101}\cdot 7^4\equiv 2001\cdot 2401\equiv 401.$$

Ответ: 401.

▹ **Задача 8.** Запись положительного числа, кратного девяти, состоит только из цифр 3 и 7. Сумма всех его цифр делится на 11. Найдите наименьшее такое число.

Решение.

k троек, n семерок. Тогда $3k+7n=99t\quad k+n\to\min\Rightarrow t=1;$

$$3k+7n=99\Rightarrow n=3n_1\Rightarrow k+7n_1=33.$$

$$\begin{array}{ccccc} n_1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ k & 26 & 19 & 12 & 5 \\ n & 3 & 6 & 9 & 12 \\ k+n & 29 & 25 & 21 & 17 \end{array}.$$

Ответ: $\underbrace{33...3}_{5}\underbrace{77...7}_{12}$.

▹ **Задача 9.** В некотором государстве сложение и вычитание обозначается знаками "!" и "?", но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но при вычитании вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b, b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются, как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков "!", "?" записать выражение, которое гарантированно равно $25a-20b$.

Решение.

Заметим, что выражение $(a?a)!(a?a)$ всегда равно нулю. В дальнейшем мы можем использовать 0, подразумевая, что вместо него должно быть записано именно это выражение. Выражение $(x?0)?(0?y)$ всегда равно $x+y$. Аналогично, теперь мы можем использовать операцию "+" с двумя аргументами. Выражение $0?((0!(x!0))?0)$ всегда равно $-x$.

Теперь легко выписать искомое выражение

$$((\ldots\underbrace{(a+a)+\ldots+a}_{знаков+24})+(-((\ldots\underbrace{(b+b)+\ldots+b}_{знаков+19})).$$

▹ **Задача 10.** Найдите хотя бы одну тройку попарно различных натуральных чисел m, n, k таких, что $m^3+n^3+k^3=96059601$.

Решение.

$$S(96059601)=9\cdot 10673289(=N_1)=9^2\cdot 1185921(=N_2)=$$

$$=9^3\cdot 131769(=N_3)=9^4\cdot 14641(=N_4)=$$

$$S(N)=36,\ S(N_1)=36,\ N_1\vdots 9,\ S(N_2)=27,\ N_2\vdots 9, S(N_3)=27,\ N_3\vdots 9,$$

$$N_4\vdots 11=11\cdot 1331=11^2\cdot 121=11^4.$$

$$S_1=1+6+1=8, S_2=4+4=8, S_1-S_2=0;$$

$$N=9^4\cdot 11^4=99^4;$$

$$m=\alpha\cdot 99, n=\beta\cdot 99, k=\gamma\cdot 99;$$

$$2^3=8, 3^3=27, 4^3=64, 2^3+3^3+4^3=99;$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=99;$$

$$\alpha=2, \beta=3, \gamma=4;$$

$$(198,\ 297,\ 396).$$

Ответ: (198, 297, 396).

11 класс, Азия

▹ **Задача 1.** Найдите две последние цифры числа a_{2024}, где $a_k = 9^{a_{k-1}}, a_1 = 9$.

Решение. Выпишем последние две цифры первых десяти степеней числа 9.

$$9^1 = \ldots 09, 9^2 = \ldots 81, 9^3 = \ldots 29, 9^4 = \ldots 61, 9^5 = \ldots 49,$$

$$9^6 = \ldots 41, 9^7 = \ldots 69, 9^8 = \ldots 21, 9^9 = \ldots 89, 9^{10} = \ldots 01.$$

Число $9^9 = a_2$ оканчивается цифрой 9, т. е. $9^9 = 10k + 9$.

Следовательно, $a_3 = 9^{9^9} = 9^{10k+9} = (9^{10})^k \cdot 9^9 = (\ldots 01)^k \cdot (\ldots 89) = \ldots 89.$

Ответ: 89.

▹ **Задача 2.** Решите уравнение: $4x + 3y - 2x\left\{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2}\right\} = 0$, где $\{x\}$ — дробная часть числа *x*.

Решение.

$$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), \frac{x}{y} = t;$$

$$2 + \frac{3}{2}t = \{1 + t^2\};$$

$$\{x + n\} = \{x\};$$

$$\{t^2\} = 2 + \frac{3}{2}t, 0 \leqslant 2 + \frac{3}{2}t < 1, -\frac{4}{3} \leqslant t < -\frac{2}{3};$$

$$\frac{4}{9} < t^2 \leqslant 1\frac{7}{9}.$$

1) $\dfrac{4}{9} < t^2 < 1;$

$$\{t^2\} = t^2, t \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right);$$

2) $1 \leqslant t^2 \leqslant \dfrac{16}{9};$

$$\{t^2\} = t^2, t \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right];$$

1) $t^2 - \frac{3}{2}t - 2 = 0;$

$$t_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 2} = \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \notin \left(-1; -\frac{2}{3}\right);$$

$$t_2 = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \in \left(-1; -\frac{2}{3}\right);$$

2) $t^2 - \frac{3}{2}t - 3 = 0;$

$$t_1 = \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} + 3} = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \notin \left[-\frac{4}{3}; -1\right];$$

$$t_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right].$$

Ответ: $\left\{\frac{3 - \sqrt{57}}{4}; \frac{3 - \sqrt{41}}{4}\right\}.$

▹ **Задача 3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2000 отрицательных. Сколько из исходных чисел равно 0?

Решение. Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных (x,y — целые числа, $x + y \leqslant 100$).

Так как отрицательные произведения возникают только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных.

Имеем $xy = 2000$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $\sqrt{2000}$, т.е. не менее 44. Кроме того, это число является делителем числа 2000 = $2^4 \cdot 5^3$, поэтому в его разложении на простые множители присутствуют только числа 2 и 5, причём 2 в степени не больше, чем 4.

Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44;100]$, будут только числа 50 и 100.

Из уравнения $xy = 2000$ находим, что второе число при этом будет равняться 20 или 1. Пара (100;1) не удовлетворяет условию $x + y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 50 отрицательных чисел, и 20 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 70, а поэтому среди исходных чисел ровно 30 нулевых.

▹ **Задача 4.** Даны три утверждения:

1) неравенство $x^2 + x + a \geqslant 0$ справедливо при всех действительных x;

2) функция $y = \log_{2a} x$ является монотонно убывающей;

3) система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a^2 - 3a + 2, \\ y + a\cos x = 2. \end{cases}$

имеет единственное решение.

Найдите все значения параметра a, при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

Решение.

Условие 1) выполняется при $a \geqslant \frac{1}{4}$;

условие 2) выполняется при $0 < a < \frac{1}{2}$;

условие 3) верно при $a = 1$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$.

▹ **Задача 5.** Десять простых чисел составляют арифметическую прогрессию. Найти эти числа, если $a_1 < 200$ и $a_{10} < 3000$.

Решение. Очевидно, что разность прогрессии d – число чётное, так как простые числа — числа нечётные (кроме 2).

Далее, d кратно 3, так как в противном случае один из трёх последовательных членов прогрессии будет делиться на 3.

Аналогично убеждаемся, что d должно быть кратно 5 и 7 и, следовательно, кратно $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$.

Итак, $d = 210k$. Но по условию:

$$a_{10} = a_1 + 9d < 3000 a_1 + 1890k < 3000, k < \frac{3000 - a_1}{1890} < 2.$$

Значит, $k = 1$ и $d = 210$. Остаётся определить a_1. Имеем: $210 = 11\cdot 19 + 1$ и $a_n = a_1 + 210(n-1) = a_1 + 11\cdot 19(n-1) + n - 1$. Отсюда легко вывести, что a_1 или равно 11, или имеет вид 22k + 1. Действительно, пусть $a_1 = 22k \pm r$, где $1 < r < 11$. Тогда среди чисел: 1, 2, 3,…,9 всегда найдётся число m, которое в сумме с r даст число 11 и, следовательно, число a_m будет кратно 11. Итак, испытанию подлежат числа: 11, 23, 67, 89, 199 (1) (так как 45, 111, 133, 155 и 177 — числа составные).

Но при $a_1 = 11$ имеем $a_9 = 11\cdot 89$;

$$a_1 = 23 — a_6 = 29\cdot 37;$$

$$a_1 = 67 — a_{10} = 19\cdot 103;$$

$$a_1 = 89 — a_7 = 19\cdot 71.$$

Остаётся число 199, которое даёт прогрессию из 20 чисел: 199; 409; 619; 821; 1039; 1249; 1459; 1669; 1879; 2089. Легко убедиться, что все эти числа являются простыми.

▹ **Задача 6.** Дан отрезок, длина которого равна

$$(\sqrt[3]{2}+1)\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}.$$

С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[1024]{2024}$.

Решение. Преобразуем данное выражение

$$\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\left(3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+3\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{3}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)} = 1.$$

$$l_0 = 1 \Rightarrow 2024 = l_1, l_n = \sqrt{l_0\cdot l_{n-1}}, 1024 = 2^{10}.$$

Метод математической индукции:

$$l_2 = \sqrt{l_0 \cdot l_1} = 2024^{\frac{1}{2}};$$

$$l_3 = \sqrt{1 \cdot 2024^{\frac{1}{2}}} = 2024^{\frac{1}{2^2}};$$

$$l_4 = \sqrt{l_0 \cdot l_3} = 2024^{\frac{1}{2^3}};$$

$$l_5 = \sqrt{l_0 \cdot l_4} = 2024^{\frac{1}{2^4}};$$

$$\ldots$$

$$l_{11} = \sqrt{l_0 \cdot l_{10}} = 2024^{\frac{1}{2^{10}}} = 2024^{\frac{1}{1024}} = \sqrt[1024]{2024}.$$

▹ **Задача 7.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке убывания слева направо;

б) в порядке неубывания слева направо.

Считать, что числа не могут начинаться с цифры 0.

Решение. а) Пусть событие *A* — получение трёхзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо. Общее количество трёхзначных чисел *N* равно количеству чисел от 100 до 999. Поэтому $N = 999 - 100 + 1 = 900$. Любые три различные цифры, извлеченные из данных 10 цифр: 0,1,…,8,9 — можно единственным образом упорядочить по убыванию, поэтому число благоприпятствующих событию *A* исходов:

$$M_1 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Следовательно:

$$P(A) = \frac{M_1}{N} = \frac{120}{900} = \frac{4}{30}.$$

б) Пусть событие *C* — получение трёхзначного числа, цифры которого расположены в порядке неубывания слева направо (например, 122, 113, 222 и т.д.). Число исходов, благоприпятствующих событию *C*, обозначим через M_3.

Найдём M_3 двумя способами. Первый способ нахождения M_3: число M_3 будем вычислять по формуле:

$$M_3 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4,$$

где L_1 — количество трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке возрастания (например, 134, 256 и т.д.); L_2 — количество трёхзначных чисел, у которых все цифры в записи числа одинаковы (например, 111, 222….,999); L_3 — количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке неубывания, причём первые две цифры одинаковы (например, 114, 556, и т. д.); L_4 – количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены в порядке неубывания, причём последние две цифры одинаковы (например, 133, 266 и т.д.).

Очевидно, L_1 равно числу вариантов извлечения любых трёх различных цифр из следующих девяти: 1, 2, …,8,9 (в записи таких чисел нельзя использовать 0). Поэтому L_1 = 84.

L_2 = 9, так как имеется только девять трёхзначных чисел с одинаковыми цифрами (111; 222;…; 999).

Найдём L_3 перебором. Рассмотрим все трёхзначные числа, у которых цифры расположены в порядке неубывания, причём первые две цифры — 1. Очевидно, их количество равно 8:

112,113,114,…119 — всего восемь чисел.

Аналогично рассуждая, можно записать:

223, 224,225,…,229 — всего семь чисел.

334,335,336,…,339 — всего шесть чисел.

…

889 — одно число.

Поэтому L_3 = 8+7+6+…+1 = 36.

Найдём L_4 – количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в порядке неубывания, причём последние цифры одинаковы.

Очевидно, что количество таких чисел, заканчивающихся двумя цифрами 2, равно 1:

122 — одно число.

Аналогично рассуждая, можно записать:

133, 233 — два числа.

144, 244, 344 — три числа.

…

199, 299, 399,…,899 — восемь чисел.

Тогда L_4 = 1+2+3+…+8 = 36.

Получаем

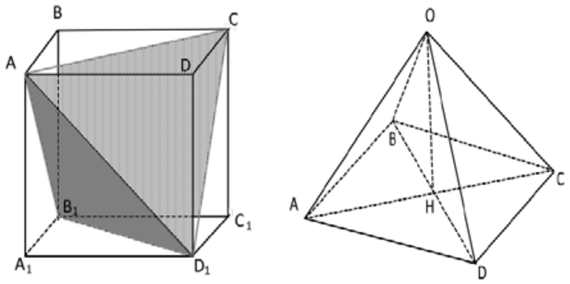
$$\mathrm{M}_3 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 84+9+36+36 = 165.$$

$$P(C) = \frac{165}{900} = \frac{11}{60} = 0{,}1833.$$

Ответ: а) $\frac{4}{30}$; б) $\frac{11}{60}$.

▹ **Задача 8.** Имеются одна треугольная и одна четырёхугольная пирамиды, все рёбра которых равны 1. Покажите, как разрезать их на несколько частей и склеить из этих частей куб (без пустот и щелей, все части должны использоваться).

Решение. Решим сначала обратную задачу: разрежем куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a на части, из которых можно составить две пирамиды. Достаточно заметить, что тетраэрд ACB_1D_1 — правильный с ребром $\sqrt{2}a$, а оставшаяся часть куба представляет собой четыре одинаковые треугольные пирамиды, которые можно склеить в одну четырёхугольную, все рёбра которой равны $\sqrt{2}a$. В нашем случае нужно выбрать $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому нужно в исходной правильной четырёхугольной пирамиде *OABCD* с вершиной *O* провести высоту *OH* и разрезать пирамиду плоскостями *OHA* и *OHB* на четыре одинаковые части. Приклеив к каждой грани исходного правильного тетраэдра по одной из полученных частей, мы получим куб с ребром $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



▹ **Задача 9.** Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равна разности между квадратом третьего и числа $\frac{4}{5}$. Найдите произведение этих чисел.

Решение. Пусть *a, b, c* — заданные числа. По условию имеем систему равенств:

$$a^3+b^3=c^2-\frac{4}{5}, b^3+c^3=a^2-\frac{4}{5}, a^3+c^3=b^2-\frac{4}{5}. \qquad (1)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3-c^3=c^2-a^2$. Сокращая на $(a-c)$, по условию $a\neq c$, получаем $a^2+ac+c^2=-(a+c)$. Аналогично можно заключить, что $b^2+ab+a^2=-(a+b)$ и $b^2+bc+c^2=-(b+c)$, т.е.

$$a^2+ac+c^2=-(a+c), b^2+ab+a^2=-(a+b), b^2+bc+c^2=-(b+c). \qquad (2)$$

Поэтому

$$(a^2+ac+c^2)-(b^2+bc+c^2)=(b+c)-(a+c),$$

откуда

$$(a^2-b^2)+c(a-b)=-(a-b).$$

Сокращая на $(a-b)$, по условию $a \neq b$, получаем

$$a+b+c=-1. \tag{3}$$

Складываем все три равенства (2), получим

$$2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac)=-2(a+b+c), 2(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=2.$$

Откуда (см. (3)):

$$ab+bc+ac=0. \tag{4}$$

Далее возведём в куб обе части равенства (3):

$$-1=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)+6abc. \tag{5}$$

Заметим, что

$$(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=$$
$$=0-3abc=-3abc.$$

Далее, складывая все три равенства (1), получим

$$2(a^3+b^3+c^3)=a^2+b^2+c^2-\frac{12}{5}=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-\frac{12}{5}=$$
$$=(-1)^2-2\cdot 0-\frac{12}{5}=1-\frac{12}{5}=-\frac{7}{5},$$

откуда $a^3+b^3+c^3=-\dfrac{7}{10}.$

Тогда равенство (5) принимает вид:

$$-1=-\frac{7}{10}+3(-3abc)+6abc=-\frac{7}{10}-3abc.$$

Тогда $3abc=1-\dfrac{7}{10}=\dfrac{3}{10}.$

Следовательно, $abc=\dfrac{1}{10}.$

Замечание. Можно доказать с помощью производной, что тройка различных действительных чисел, удовлетворяющих условию задачи, в самом деле существует и определена однозначно как три корня уравнения $x^3+x^2-\dfrac{1}{10}=0$.

Ответ: $\dfrac{1}{10}$.

▹ **Задача 10.** Найдите, по крайней мере, один набор семи различных целых чисел, отличных от нуля, таких, что сумма их кубов равняется следующему 14-значному числу $N = 16781934923776$.

Решение. Проанализируем число *N*:

$$3776 = 16 \cdot 236 \Rightarrow N \vdots 16;$$

$$S_1 = 1 + 7 + 1 + 3 + 9 + 3 + 7 = 31;$$

$$S_2 = 6 + 8 + 9 + 4 + 2 + 7 + 6 + 42;$$

$$S_1 - S_2 = 11 \Rightarrow N \vdots 11 \Rightarrow N \vdots 176;$$

$$16781934923776 \vdots\ 176 = 95351902976;$$

$$N = 176 \cdot 95351902976 = 176 \cdot N_1;$$

$$N_1 \vdots 16, (2976 = 16 \cdot 186);$$

$$N_1 \vdots 11, S_1 = 9 + 3 + 1 + 0 + 9 + 6 = 28;$$

$$S_2 = 5 + 5 + 9 + 2 + 7 = 28;$$

$$95351902976:176 = 54177217;$$

$$N_2 = 54177217;$$

$$N = 176^2 \cdot N_2 = 176^3 \cdot 3078251 = 176^3 \cdot 11 \cdot 279841;$$

$$279841 \text{ не} \vdots 11;$$

$$2+9+4=15;$$

$$7+8+1=16;$$

$$279841 \text{ не} \vdots 13;17;19;$$

$$279841 = 23 \cdot 12167 = 23^2 \cdot 529 = 23^4;$$

$$N = (11 \cdot 16)^3 \cdot 11 \cdot 23^4 = 16^3 \cdot 11^4 \cdot 23^4 = 8^4 \cdot 11^4 \cdot 23^4 = 2024^4;$$

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 2024^4;$$

$$n_k = d_k \cdot 2024;$$

$$d = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10] \Rightarrow d^3 = [1,8,27,64,125,216,343,512,729,1000];$$

$$d_1 = 10, d_2 = 9, d_3 = 8 \Rightarrow d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 = 2241;$$

$$d_4 = 5, d_5 = 4, d_6 = 3, d_7 = 1 \Rightarrow d_4^3 + d_5^3 + d_6^3 + d_7^3 = 217;$$

$$d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 + (-d_4)^3 + (-d_5)^3 + (-d_6)^3 + (-d_7)^3 = 2024.$$

11 класс, Европа

▹ **Задача 1.** Найдите две последние цифры числа a_{2024}, где $a_k = 7^{a_{k-1}}, a_1 = 7$.

Решение. Выпишем последние две цифры первых восьми степеней числа 7.

$$7^1 = \ldots 07, 7^2 = \ldots 49, 7^3 = \ldots 43, 7^4 = \ldots 01, 7^5 = \ldots 07, 7^6 = \ldots 49, 7^7 = \ldots 43, 7^8 = \ldots 01.$$

$$7^7 = 4k + 3 \Rightarrow 7^{7^7} = (7^4)^k \cdot 7^3 = (\ldots 01) \cdot (\ldots 43) = \ldots 43.$$

Ответ: 43.

▹ **Задача 2.** Решите уравнение: $4x + 3y - 2x\left[\dfrac{x^2 + y^2}{x^2}\right] = 0$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде

$$\frac{4x + 3y}{2x} = \left[\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right].$$

Из этого равенства следует, что число $k = \dfrac{3y}{2x}$ является целым. Преобразуем данное уравнение с учётом указанного факта:

$$2 + \frac{3y}{2x} = \left[1 + \frac{y^2}{x^2}\right], 2 + \frac{3y}{2x} = \left[\frac{y^2}{x^2}\right] + 1, 1 + k = \left[\frac{4}{9}k^2\right].$$

На основании определения целой части из последнего равенства следует, что

$$1 + k \leqslant \frac{4}{9}k^2 < 2 + k$$

или

$$\begin{cases} 4k^2 - 9k - 9 \geqslant 0, \\ 4k^2 - 9k - 18 < 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является следующее множество значений $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [3; +\infty)$, решением второго – промежуток $\left(\frac{9-3\sqrt{41}}{8}, \frac{9+3\sqrt{41}}{8}\right)$.

Откуда в силу того, что k — целое, делаем вывод, что $k = 3$ и -1. Таким образом, $y = 2x$, $y = -\frac{2}{3}x$ и, в качестве решения можно взять следующие пары $(n; 2n)$ и $(3n; -2n)$, где $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$.

▹ **Задача 3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2024 отрицательных. Сколько из исходных чисел равно 0?

Решение. Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных (x, y – целые числа, $x + y \leqslant 100$). Так как отрицательные произведения возникают только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных. Имеем $xy = 2024$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $44 < \sqrt{2024} < 45$, т.е. не менее 44.

Кроме того, это число является делителем числа 2024 = $2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

Делителей — $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Легко видеть, что такими числами, лежащими в интервале $[44; 100]$, будут только числа 44 и 46. Из уравнения $xy = 2024$ находим, что второе число при этом будет равняться 46 или 44. Пара (88;23) не удовлетворяет условию $x + y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 44 отрицательных числа, и 46 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 90, а поэтому среди исходных чисел ровно 10 нулевых.

▹ **Задача 4.** Найдите натуральные числа m и n, если из четырёх утверждений

1) $m - n$ делится на 3;

2) $m + 2n$ – простое число;

3) $m = 4n - 1$;

4) $m + 7$ делится на n

три истинны, а одно ложно.

Решение. Мы рассмотрим два случая.

1. Пусть утверждение 1 истинно ($m - n \vdots 3$). Тогда утверждение 3 ложно, т. к. из $m = 4n - 1$ получается $m - n = 3n - 1$ не $\vdots 3$. Следовательно, утверждения 2 и 4 должны быть истинны, т. к. среди всех утверждений только одно ложное. Из утверждения 2 получаем, что $m + 2n = (m - n) + 3n \vdots 3$, в то же время это число простое. Есть только одно простое число, делящееся на 3. Это само число 3. Значит, $m + 2n = 3$ и $m = n = 1$, ведь m,n — натуральные. Убеждаемся, что пара (1,1) подходит под условие.

2. Пусть утверждение 1 ложное. Тогда все остальные истинны. Из утверждений 3 и 4 получаем: $m + 7 = (4n - 1) + 7 = 4n + 6 \vdots n$, откуда $6 \vdots n$. Натуральные делители шестёрки — это 1, 2, 3, 6. Из утверждения 3 находим соответствующие значения *m*: 3, 7, 11, 23. Последняя пара (23,6) не удовлетворяет второму условию — число $m + 2n = 35$ не является простым. Остальные пары, как легко проверяется, подходят.

▹ **Задача 5.** Показать, что если 11 простых чисел составляют арифметическую прогрессию, то, по крайней мере, одно из них больше 20000.

Решение. Пусть d — разность арифметической прогрессии, $a_1, a_2, ...a_p$ — члены прогрессии, $p = 11$. По теореме Тебольта, которая формулируется следующим образом.

Если n членов арифметической прогрессии являются нечетными простыми числами, то разность прогрессии делится на каждое простое число, меньшее n.

$$d \text{ делится на } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$$

$$a_p = d \cdot 10 + a_1,$$

$a_p = 23100 + a_1$, следовательно, $a_p \geqslant 23101$, а значит, по, крайней мере, a_p и a_{p-1} будут больше 20000.

▹ **Задача 6.** Дан отрезок, длина которого равна 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[32]{31}$.

Решение. $\left(\sqrt{15}a\right)^2 = \sqrt{(4a)^2 - a^2} \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{15}a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{31}a.$

Пусть $l = \sqrt[32]{31}.$

$$l_1 = \sqrt{(4l)^2 + (\sqrt{15}l)^2} = \sqrt{31}l;\ l_1 = 31^{\frac{1}{2}+\frac{1}{32}} = 31^{\frac{17}{32}};$$

$$l_2 = \sqrt{(4l_1)^2 + (\sqrt{15}l_1)^2} = \sqrt{31}l_1;\ l_2 = 31^{\frac{33}{32}};$$

$$l_3 = \sqrt{l_1 \cdot l_2} = 31^{\frac{25}{32}};$$

$$l_4 = \sqrt{l_3 \cdot l_2} = 31^{\frac{29}{32}};$$

$$l_5 = \sqrt{l_4 \cdot l_2} = \left(31^{\frac{29}{32}+\frac{33}{32}}\right)^{\frac{1}{2}} = 31^{\frac{31}{32}};$$

$$l_6 = \sqrt{l_5 \cdot l_2} = \left(31^{\frac{31}{32}+\frac{33}{32}}\right)^{\frac{1}{2}} = 31.$$

l_6 делим на 31 равную часть по теореме Фалеса.

▹ **Задача 7.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке возрастания слева направо;

б) в порядке невозрастания слева направо.

Считать, что числа не могут начинаться с цифры 0.

Решение. а) Пусть событие B — получение трёхзначного числа, цифры которого располагаются в порядке возрастания слева направо (например, 123; 238; 489 и т.д.). Очевидно, что в записи таких чисел не должно быть цифры 0. Общее количество трёхзначных чисел $N = 900$, из которых событию *B* благоприятствуют

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{6} = 84 \text{ исхода.}$$

Поэтому $P(B) = \frac{M_2}{N} = \frac{84}{900} = \frac{7}{75} = 0,0933$.

б) Пусть событие *D* — получение числа, цифры которого расположены в порядке невозрастания слева направо (например, 111, 200, 210, 331, 921 и т.д.). Очевидно, $N = 900$.

Число исходов, благоприятствующих событию *D*, обозначим через M_4.

Число M_4 будем вычислять по формуле:

$$\mathrm{M}_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4,$$

где L_1 — количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены по убыванию, например, 210; 321; 975 и т.д. L_2 — количество трёхзначных чисел, цифры в записи которых одинаковы, например, 111; 222; 777; и т.д. L_3 — количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в невозрастающем порядке и последние две одинаковы, например, 211; 977; 544 и т.д. L_4 – количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в порядке невозрастания и первые две цифры одинаковы, например, 110; 221; 995 и т.д.

Существует C_{10}^3 трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены по убыванию.

Поэтому $L_1 = C_{10}^3 = 120$.

Очевидно, что L_2 = 9, так как 111, 222, 333, …, 999 — всего девять чисел.

Ищем L_3 методом перебора. Очевидно, что существует только девять чисел, у которых последние две цифры – 0: 100, 200, 300, …, 900.

Аналогично рассуждая, можно записать: 211, 311, 411,…, 911 — восемь чисел. 322, 422, 522,…, 922 — семь чисел. 988 — одно число.

Таким образом, L_3 = 9+8+7+…+1 = 45.

Аналогично ищется L_4 — количество трёхзначных чисел, все цифры у которых расположены в порядке невозрастания и первые две цифры в записи одинаковы. Эти числа перечислены ниже:

110;

220. 221;

330, 331, 332;

440, 441, 442, 443;

…

990, 991, 992, 993 ,…, 998.

Тогда L_4 = 1 + 2 + 3 +…+9 = 45.

$$\mathrm{M}_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 120 + 9 + 45 + 45 = 219.$$

Поэтому $P(D) = \dfrac{219}{900} = \dfrac{73}{300} = 0,2433.$

Ответ: а) $\dfrac{7}{75}$; б) $\dfrac{73}{300}$.

▹ **Задача 8.** Развёртка правильной четырёхугольной пирамиды представляет собой плоскую фигуру, координаты (x, y) точек которой удовлетворяют соотношению

$$\max\{|x|,|y|\} + \min\{|x-y|,|x+y|\} \leqslant a.$$

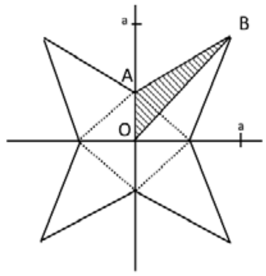
Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решение.

Пусть P – искомая плоская фигура. Если $M(x_0, y_0) \in P$, то $\pm x_0, \pm y_0 \in P$ и $\pm x_0, \pm y_0 \in P$, стало быть, P имеет четыре оси симметрии: $y = x$, $y = -x$, $y = 0$, $x = 0$. Пусть $y \geqslant x \geqslant 0$, тогда $\max\{|x|,|y|\} = y$, $\min\{|x-y|,|x+y|\} = y - x$, т.е.

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant \alpha, \\ y \geqslant x \geqslant 0. \end{cases}$$

Отображая полученную фигуру относительно осей симметрии, получим фигуру P — развертку четырёхугольной пирамиды с квадратным основанием, равным $\alpha = \sqrt{2}$. Высота пирамиды $H = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \alpha$.



Следовательно, объём пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн.} H = \frac{a^3}{6}$, площадь полной поверхности $S_{п.п.} = 4\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = 2a^2$.

Известно, что $V = \frac{1}{3} r S_{п.п.}$, следовательно $r = \frac{3V}{S_{п.п.}} = \frac{a}{4}$.

Ответ: $\frac{a}{4}$.

▹ **Задача 9.** Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равна разности между квадратом третьего и числа $\frac{3}{4}$. Найдите произведение этих чисел.

Решение. Пусть *a, b, c* — заданные числа. По условию имеем систему равенств:

$$a^3 + b^3 = c^2 - \frac{3}{4}, b^3 + c^3 = a^2 - \frac{3}{4}, a^3 + c^3 = b^2 - \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3 - c^3 = c^2 - a^2$. Сокращая на $(a - c)$, по условию $a \neq c$, получаем $a^2 + ac + c^2 = -(a + c)$. Аналогично можно заключить, что $b^2 + ab + a^2 = -(a + b)$ и $b^2 + bc + c^2 = -(b + c)$, т. е.

$$a^2 + ac + c^2 = -(a + c), b^2 + ab + a^2 = -(a + b), b^2 + bc + c^2 = -(b + c). \qquad (2)$$

Поэтому

$$(a^2 + ac + c^2) - (b^2 + bc + c^2) = (b + c) - (a + c),$$

откуда $(a^2 - b^2) + c(a - b) = -(a - b)$.

Сокращая на $(a - b)$, по условию $a \neq b$, получаем

$$a + b + c = -1. \qquad (3)$$

Складываем все три равенства (2), получим

$$2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ac)=-2(a+b+c), 2(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=2.$$

Откуда (см. (3)):

$$ab+bc+ac=0. \qquad (4)$$

Далее возведём в куб обе части равенства (3):

$$-1=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)+6abc\ . \qquad (5)$$

Заметим, что

$$(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc=$$
$$=0-3abc=-3abc.$$

Далее, складывая все три равенства (1), получим

$$2(a^3+b^3+c^3)=a^2+b^2+c^2-\frac{9}{4}=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)-\frac{9}{4}=$$
$$=(-1)^2-2\cdot 0-\frac{9}{4}=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4},$$

откуда $a^3+b^3+c^3=-\frac{5}{8}.$

Тогда равенство (5) принимает вид:

$$-1=-\frac{5}{8}+3(-3abc)+6abc=-\frac{5}{8}-3abc\,.$$

Тогда $3abc=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}.$ Следовательно, $abc=\frac{1}{8}.$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

▹ **Задача 10.** Найдите, по крайней мере, один набор восьми различных натуральных чисел, отличных от нуля, таких, что сумма их кубов равняется следующему 14-значному числу $N=16781934923776$.

Решение. Проанализируем число $N: 3776=16\cdot 236 \Rightarrow N\vdots 16.$

$$S_1=1+7+1+3+9+3+7=31;$$

$$S_1-S_2=11\Rightarrow N\vdots 11\Rightarrow N\vdots 176;$$

$$16781934923776\vdots 176=95351902976;$$

$$N = 176 \cdot 95351902976 = 176 \cdot N_1;$$

$$N_1 \vdots 16 (2976 = 16 \cdot 186);$$

$$N_1 \vdots 11, S_1 = 9 + 3 + 1 + 0 + 9 + 6 = 28;$$

$$S_2 = 5 + 5 + 9 + 2 + 7 = 28;$$

95351902976:176= 54177217;

$$N_2 = 54177217;$$

$$N = 176^2 \cdot N_2 = 176^3 \cdot 3078251 = 176^3 \cdot 11 \cdot 279841;$$

279841 не$\vdots$11;

2+9+4=15;

7+8+1=16;

279841 не$\vdots$13;17;19;

$$279841 = 23 \cdot 12167 = 23^2 \cdot 529 = 23^4;$$

$$N = 2024^4.$$

Обозначим набор чисел через m_k^3, где $1 \leqslant k \leqslant 8$.

$$m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 + m_4^3 + m_5^3 + m_6^3 + m_7^3 = 2024^4;$$

$$m_k = n_k \cdot 2024;$$

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 2024, 2024 = 2025 - 1 = 45^2 - 1^2.$$

Известно, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left[\dfrac{k \cdot (k+1)}{2}\right]^2$;

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} = 45, k \cdot (k+1) = 90, k = 9;$$

$$2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 = 2024.$$

Перейдём от n_k к m_k:

$$4048^3 + 6072^3 + 8096^3 + 10120^3 + 12144^3 + 14168^3 + 16192^3 + 18216^3 = 2024^4.$$

Критерии определения призеров отборочного тура олимпиады по математике

Каждое верно решенное задание отборочного тура оценивалось в 1 балл. Прошли в заключительный тур олимпиады участники, набравшие:

4-5 класс 4 и более баллов;

6 класс 4 и более баллов;

7 класс 4 и более баллов;

8 класс 3 и более баллов;

9 класс 3 и более баллов;

10 класс 3 и более баллов;

11 класс 3 и более баллов.

Статистика отборочного тура олимпиады по математике

В олимпиаде по математике приняли участие 6885 школьников из 11 стран ближнего зарубежья (102 участника) и 73 регионов РФ. Заключительный тур прошел на 48 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане. Результаты отборочного тура представлены в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	1371	440	219
6	1166	418	121
7	1128	298	42
8	1038	352	4
9	805	346	24
10	764	155	4
11	613	187	17
Итого	6885	2196	431

Призеры отборочного тура получили сертификаты призера и прошли в заключительный тур.

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады

Максимальная оценка за каждую из задач заключительного тура — 10 баллов. Призовые места определялись в соответствии со следующими критериями.

Класс	Баллы, 1 место	Баллы, 2 место	Баллы, 3 место
5 и младше	50	42	35
6	50	42	35
7	50	40	30
8	50	40	30
9	50	40	30
10	50	40	30
11	50	40	30

Статистика заключительного тура

В финале олимпиады приняли участие 1706 школьников, из них 24 – иностранцы, остальные проживают в 54 различных регионах России.

Количество участников, призеров и победителей заключительного тура представлено в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 и младше	413	54	38
6	394	65	42
7	225	46	7
8	261	46	11
9	217	44	11
10	83	15	5
11	113	20	3

Олимпиада по информатике

Задания отборочного тура олимпиады с решениями

Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике проводился с применением системы автоматического тестирования решений учащихся на наборах тестовых данных. Каждая из шести задач максимально оценивалась в 100 баллов, в соответствии с количеством успешно пройденных тестов. Задания были рассчитаны на учащихся 8-11 классов, все учащиеся решали один вариант. На решение отводилось 5 часов, как для отборочного, так и для заключительного тура.

▹ **Задача 1 (5-9 класс).** Спартанцы, в атаку!

Царь Леонид решил повести своё войско в наступательный поход.

Он построил воинов в один ряд, оглядел их и решил проверить их боеспособность.

Для проверки боеспособности он придумал следующую схему.

Он подошёл к некоторым бойцам и шепнул им на ухо команду "в бой!".

За одну секунду боец, который знает команду, может передать её правому и левому соседу в ряду.

Леонид хочет узнать, за сколько секунд все бойцы войска узнают команду.

Воины представлены бинарной строкой (1 – если воин изначально знал команду, 0 – если не знал).

Входные данные

На ввод подаётся строка из нулей и единиц. Длина строки не превосходит 10^5.

Выходные данные

В ответе выведите единственное число – минимальное количество секунд, через которое все спартанцы уже будут знать команду.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
10001	2
1000101	2
0000000000000000000000000000001000000	58

Решение задачи на языке Python

```
a = input()
s = a.split('1')
q0 = len(s[0])
q1 = 0
q = q0
for i in range(len(s)-2):
    x = len(s[i+1])/2
    if x==int(x):
        q3 = int(x)
    else:
        q3 = int(x)+1
    if q1<q3:
        q1=q3
q2 = len(s[-1])
if q0 < q1:
    q = q1
if q1 < q2:
    q = q2
print(q)
main(k)
```

▹ **Задача 1 (10-11 класс).** Спартанцы, в атаку!(2D)

Царь Леонид решил повести своё войско в наступательный поход.

Он построил войско в N рядов по M воинов в каждом, оглядел их и решил проверить их боеспособность.

Для проверки боеспособности он придумал следующую схему.

Он подошёл к некоторым бойцам, и шепнул им на ухо команду "в бой!".

За одну секунду боец, который знает команду, может передать её правому, левому, переднему и заднему соседям в ряду.

Леонид хочет узнать, за сколько секунд все бойцы войска узнают команду.

Воины представлены бинарной строкой (1 — если воин изначально знал команду, 0 — если не знал).

Входные данные

В первой строке написаны два целых положительных числа N и $M\,(1 \leqslant N,\, M \leqslant 500)$ — размеры войска.

Следующие N строк по M символов описывают войско.

Выходные данные

В ответе выведите единственное число – минимальное количество секунд, через которое все спартанцы уже будут знать команду.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
3 4	3
5 4	2
10 10	6

Решение задачи на языке Python

```
from collections import deque
def F(N, M, armya):
    napr = [(0, 1),
                (0, -1),
                (1, 0),
                (-1, 0)]
    queue = deque()
    bylo = [[False for _ in range(M)] for _ in range(N)]
    for i in range(N):
        for j in range(M):
            if armya[i][j] == '1':
                queue.append((i, j, 0))
                bylo[i][j] = True
    while queue:
        x, y, time = queue.popleft()
        for dx, dy in napr:
            nx, ny = x + dx, y + dy
            if ((0 <= nx < N )and (0 <= ny < M) and (not
(bylo[nx][ny]))):
                bylo[nx][ny] = True
```

```
                queue.append((nx, ny, time + 1))
    return time
N, M = map(int,input().split())
armya = []
for n in range(N):
    stroka = input()
    armya.append(stroka)
print(F(N, M, armya))
```

▹ **Задача 2 (5-11 классы).** Не короткое замыкание

Вам дана парта размера $N \times M$ — клетчатое поле. В каждой клетке либо находится электрический элемент (он обозначается как #), либо ничего не находится (*).

Два элемента соединены, если они находятся в клетках, граничащих по стороне.

Гарантируется, что цепь связная и незамкнутая.

Вову заинтересовал вопрос: если замкнуть какие-то два элемента (например, соединить их проволокой), то сколько в замыкании максимум будет участвовать элементов?

Примечание: элемент находится в замыкании, если он находится в цикле, который образовался, когда Вова замкнул два элемента.

Входные данные

В первой строке записаны два целых числа: N и M $(2 \leqslant N, M \leqslant 100)$ — высота и ширина парты соответственно. После этого идут N строк длины M — описание парты.

Выходные данные

Выведите максимальную длину цикла, который получится, если замкнуть какие-то два элемента.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
3 3 ### ..# .##	6
4 5 ..#.. .##.. ..##.	4
5 4 .#.. ##.. .### ##.# .#..	6

Решение на С++

С заданием полностью справились только два участника. Приводим решение призера отборочного тура, Адиля Канатбекова, 9 класс, г. Бишкек.

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define ll long long
#define pb push_back
#define db double
#define pll pair<ll, ll>
#define fs first
#define sc second
ll n,m;
vector<ll> dx{1, 0, -1, 0};
vector<ll> dy{0, 1, 0, -1};
vector<vector<char>> g;
vector<vector<ll>> dist1, dist2;
pll dfs(pll a, vector<vector<ll>> &dist){
    pll mx={0, 0};
    ll x=a.fs;
    ll y=a.sc;
    for(ll i=0; i<4; i++){
        if(x+dx[i]>0 && x+dx[i]<=m && y+dy[i]>0 && y+dy[i]<=n &&
g[x+dx[i]][y+dy[i]]=='#'
        && dist[x+dx[i]][y+dy[i]]==-1){
            dist[x+dx[i]][y+dy[i]]=1;
            dist[x+dx[i]][y+dy[i]]=dist[a.fs][a.sc]+1;
            if(dist[mx.fs][mx.sc]<dist[x+dx[i]][y+dy[i]]) mx={x+dx[i],
y+dy[i]};
            pll mx1=dfs({x+dx[i], y+dy[i]}, dist);
            if(dist[mx1.fs][mx1.sc]>dist[mx.fs][mx.sc]) mx=mx1;
        }
    }
    return mx;
}
int main(){
    ios_base::sync_with_stdio(0); cin.tie(0); cout.tie(0);
    cin>>n>>m;
    pll id;
    g.resize(m+1, vector<char>(n+1));
```

```
    dist1.resize(m+1, vector<ll>(n+1, -1));
    dist2.resize(m+1, vector<ll>(n+1, -1));
    for(ll i=1; i<=n; i++){
        for(ll j=1; j<=m; j++){
            cin>>g[j][i];
            if(g[j][i]=='#') id={j, i};
        }
    }
    dist1[id.fs][id.sc]=1;
    pll mx=dfs(id, dist1);
    dist2[mx.fs][mx.sc]=1;
    pll ans=dfs(mx, dist2);
    cout<<dist2[ans.fs][ans.sc]<<"\n";
}
```

▹ **Задача 3 (5-9 класс).** Публикан

«Публикан», или иначе говоря, «сборщик налогов» обладал одной из самых популярных профессий в Древнем Риме. В то время деньги собирались с граждан вручную, а периодические территориальные войны лишь добавляли неразберихи в общую финансовую суматоху.

В суматохе публикан Марк не может сосредоточиться и сложить два римских числа, чтобы посчитать суммарный налог, который ему нужно взыскать у супружеской пары. Пожалуйста, помогите ему это сделать.

Входные данные

В двух строках содержится по одному числу, записанному в римской системе счисления (каждое число не превосходит 3999).

Выходные данные

В ответе запишите число, являющееся суммой двух данных римских чисел (так же в римской системе счисления).

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
I I	II
IV IX	XIII
D XXIV	DXXIV

Решение задачи на языке Python

```
all_roman = [(1000, 'M'), (900, 'CM'), (500, 'D'), (400, 'CD'), (100,
'C'),
(90, 'XC'), (50, 'L'), (40, 'XL'), (10, 'X'), (9, 'IX'), (5, 'V'), (4,
'IV'),
 (1, 'I')]

def t(num):
    roman = ''
    while num > 0:
        for i, r in all_roman:
            while num >= i:
                roman += r
                num -= i
    return roman
def v(rom):
    dec = 0
    for i, r in all_roman:
        while rom.startswith(r):
            dec += i
            rom = rom[len(r):]
    return dec

s1=input()
s2=input()

a1=v(s1)
a2=v(s2)

a=a1+a2

s=t(a)

print(s)
```

▹ **Задача 3 (10-11 класс).** Апельсин и спаниель

Малыш давно просил у родителей собаку. И не простую собаку, а спаниеля.

К сожалению, папа Малыша не захотел покупать ему собаку.

Чтобы Малыш не сильно расстраивался, Карлсон подарил ему апельсин, ведь если переставить буквы в слове "апельсин", то можно получить слово "спаниель".

Малыш заинтересовался анаграммами (словами, которые получаются друг из друга перестановкой букв), поэтому в тетрадку он записал имена всех предметов в своей комнате. Помогите Малышу понять, какое наибольшее количество анаграмм одного слова встречается в его тетрадке.

Входные данные

Первая строка содержит одно натуральное число N — количество слов в тетрадке малыша.

В следующих N строках написано по одному слову — названия предметов. Гарантируется, что нет двух совпадающих строк.

Выходные данные

В ответе выведите одно число – максимальное количество слов из списка, которые являются анаграммой одного слова.

Пояснение

Например, при входных данных:

5

apelsin

spaniel

abc

bca

cab

Ответ должен быть 3 (abc, bca и cab образуют три анаграммы одного слова).

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
3 apelsin spaniel stul	3
7 acbaaba aaabcab abacaab acbbaaa baaaabc baacaab abbacaa	7

Решение задачи на языке C++

```
#include<iostream>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <algorithm>
#include <string>
#include <iomanip>
#include <queue>
#include <map>
using namespace std;
int main()
{
    ios::sync_with_stdio(0);
    cin.tie(0);
    cout.tie(0);
    int n;
    cin>>n;
    map<vector <int>, int> m;
    int ma=0;
    for (int i=0; i<n; i++){
        vector <int> a(26);
        string s;
        cin>>s;
        int l=s.size();
        for (int j=0; j<l; j++){
            a[s[j]-'a']++;
        }
        m[a]++;
        if (m[a]>ma) ma=m[a];
    }
    cout<<ma;
    return 0;
}
```

▹ **Задача 4 (5-11 класс).** Чебурашка и апельсины

Чебурашка очень любит апельсины. В магазине, где он живёт, продавец иногда даёт Чебурашке его любимое лакомство.

Однажды, когда Чебурашке стало скучно, он решил взять все свои апельсины и положить их на чашечные весы так, чтобы весы встали в положение равновесия.

Помогите Чебурашке – сообщите ему, может ли он положить свои апельсины на весы нужным образом.

Входные данные

Первая строка содержит целое положительное число $N (2 \leqslant N \leqslant 20)$ — количество апельсинов.

Вторая строка содержит N натуральных чисел — веса апельсинов, которые не превосходят 10^6.

Выходные данные

Выведите единственную строку:

NO – если нельзя положить апельсины на весы;

YES – если можно расположить апельсины на весах требуемым образом.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
4 2 3 4	YES
10 173071 784074 994974 581388 391519 76845 939307 420796 59099	YES
10 258056 461849 499400 977649 613476 430517 825321 23036 56093	NO

Решение задачи на языке Python

```
def can_balance_oranges(N, weights):
    total_weight = sum(weights)

    for i in range(1 << N):
        current_weight = 0

        for j in range(N):
            if i & (1 << j):
                current_weight += weights[j]

        if current_weight == total_weight / 2:
            return "YES"

    return "NO"
```

```
N = int(input())
weights = list(map(int, input().split()))

print(can_balance_oranges(N, weights))
```

▹ **Задача 5 (5-9 класс).** Важное сообщение

В Солнечный город по радиосвязи поступило сообщение с Луны. В связи с тем, что при передаче сообщения на такое большое расстояние могут быть помехи, коротышки с Луны воспользовались шифром с защитой от повреждения данных. Каждый бит сообщения повторяется три раза перед отправкой. Например, строка "101" преобразуется к виду "111000111".

Весь процесс кодирования выглядит следующим образом:

1. Символ заменяется своим ASCII кодом;

2. ASCII код конвертируется в двоичную систему счисления (8 бит на символ);

3. Каждый полученный бит утраивается.

Известно, что в каждой "тройке" битов не может быть больше одной ошибки и что не может прийти два бита вместо трех. Т.е. возможна ситуация, когда вместо 000 пришло 001, и невозможна, когда пришло 00.

Помогите Знайке написать программу для расшифровки сообщения

Входные данные

Строка из нулей и единиц длиной не более 1000 символов – зашифрованное послание.

Выходные данные

Расшифрованное сообщение.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
000111111000000000000111	a
000111111000000000111000	b
000111111000000000000111000111111 000000000111000000111111000000000 111111	abc

Решение задачи на языке Python

```
def decode(binary):
    reduced = (get_digit(triplet) for triplet in chunks(binary, 3))
    return "".join(get_char(byte) for byte in chunks("".join(reduced),
8))


def chunks(seq, size):
    return (seq[i:i+size] for i in range(0, len(seq), size))

def get_digit(triplet):
    return max(triplet, key=triplet.count)


def get_char(byte):
    return chr(int(byte, 2))

print(decode(input()))
```

▹ **Задача 5 (10-11 класс).** Послание коротышкам с Земли

После того как Незнайка улетел, коротышки с Луны искали способ доставить без потерь сообщение. Было решено применить код Хэмминга (7,4).

Код Хэмминга — самоконтролирующийся и самокорректирующийся код. Построен применительно к двоичной системе счисления.

Позволяет исправлять одиночную ошибку (ошибка в одном бите слова) и находить двойную. Назван в честь американского математика Хэмминга Ричарда Уэсли, предложившего код.

Для кодирования сообщения его разбивают на блоки по четыре символа ($d_1d_2d_3d_4$), и в каждый из этих блоков добавляют проверочные биты ($p_1p_2p_3$), на позиции 1, 2 и 4, и блок преобразуется к виду $p_1p_2d_1p_3d_2d_3d_4$.

На рисунке показано, как был построен код. Бит p_1 соответствует четности зеленого кружка, если $d_1+d_2+d_4$ четно, p_1 равен нулю, в противном случае p_1 равен единице. Следовательно, если повреждения не происходит, сумма битов в зеленом кружке будет четной. Эта логика продолжается на красном и синем кругах.

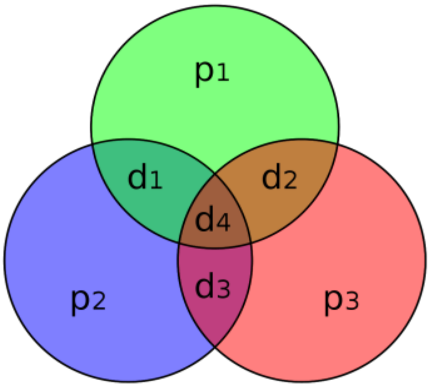


Рисунок 5.1 — Построение кода Хэмминга

Помогите лунатикам зашифровать сообщение следующим образом.

1. Каждый символ сообщения зашифрован с помощью ASCII кода.
2. ASCII код преобразован в двоичный код.
3. Полученная строка разбита на блоки по 4 бита.
4. Каждый блок закодирован кодом Хэмминга.

Входные данные

Исходное сообщение.

Выходные данные

Строка из нулей и единиц, длиной не более 1000 символов — зашифрованное послание.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
LIKE	1001100011110010011000011 0011001100011001110011000 100101
here we go	1100110111000011001100100 1010001111010101011001100 1001010101010000000000011 1100011111100110010010101 0101000000001100110000111 111001101111111
why	0001111000111111001101110 00000011110011001

Решение задачи на языке Python

```
K = 4
def encode(s):
    res = ''
    while len(s) >= K:
        nibble = s[0:K]
        res += (hamming(nibble))
        s = s[K:]
    return res

def hamming(bits):
     t1 = parity(bits, [0,1,3])
    t2 = parity(bits, [0,2,3])
    t3 = parity(bits, [1,2,3])
    return t1 + t2 + bits[0] + t3 + bits[1:]

def parity(s, indicies):
    sub = ""
    for i in indicies:
        sub += s[i]
    return str(str.count(sub, "1") % 2)

s = "".join(digit for char in input() for digit in f"{ord(char):08b}")
encode(s)
if(len(s)):
    print(encode(s))
```

▹ **Задача 6 (5-9 класс).** Проклятый многоугольник

Капитан Джек Воробей и его команда путешествуют на Черной Жемчужине по Карибскому морю. Чтобы найти корабль-призрак, им нужно попасть в проклятый многоугольник.

Известна текущая координата корабля и координаты вершин многоугольника. Помогите Джеку определить, на месте ли они.

Входные данные

Координата Черной Жемчужины *x*,*y*.

Координаты точек проклятого многоугольника.

Выходные данные

YES – если корабль в многоугольнике;

NO – если нет.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
1 1 -4 -4 4 4	YES
3.9 0 -4 -4 4 4	YES
6 1 -4 -4 4 4	NO

Решение задачи на языке Python

С этой задачей полностью справились только три участника отборочного тура. Приводим решение призера отборочного тура Матвея Непеина, 9 класс, г. Ноябрьск.

```
def is_inside_polygon(x, y, polygon):
    n = len(polygon)
    intersections = 0
    epsilon = 1e-9
    for i in range(n):
        x1, y1 = polygon[i]
        x2, y2 = polygon[(i + 1) % n]
        if (y1 > y) != (y2 > y) and x < (x2 - x1) * (y - y1) / (y2 -
y1) + x1 \
        + epsilon:
            intersections += 1

    return intersections % 2 == 1
ship_x, ship_y = map(float, input().split())
polygon = []
while True:
    try:
```

```
        x, y = map(float, input().split())
        polygon.append((x, y))
    except EOFError:
        break
if is_inside_polygon(ship_x, ship_y, polygon):
    print("YES")
else:
    print("NO")
```

▹ **Задача 6 (10-11 класс).** Корабль-призрак

Капитан Джек Воробей и его команда путешествуют на Черной Жемчужине по Карибскому морю в поисках корабля-призрака. Чтобы найти корабль-призрак, им нужно попасть в проклятый многоугольник.

Известна текущая координата корабля и координаты вершин многоугольника. Помогите Джеку определить, насколько далеко им осталось плыть. Если они уже внутри многоугольника, вывести 0.

Входные данные

Координата Черной Жемчужины *x*,*y*.

Координаты точек проклятого многоугольника

Выходные данные

Одно число, расстояние до многоугольника или ноль, с округлением до двух знаков после запятой

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
4 1 -4 -4 5 5	0
6 1 -4 -4 5 5	1.44
100000 -900000 -4 -4 5	905534.1

Решение задачи на языке Python

С этой задачей полностью не справился ни один из участников.

```
from typing import List, Tuple
import math

def point_in_polygon(polygon, point) :
    """
    Подробнее: https://en.wikipedia.org/wiki/Point_in_polygon
    """
    xp, yp = point
    lines_intersection = 0
    common_vertex = 0
    for (x1, y1), (x2, y2) in zip(polygon, polygon[1:] + polygon[:1]):
        if (y2 <= yp <= y1 or y1 <= yp <= y2) and not (x1 < xp and x2
< xp):
            if x1 == x2:
                if xp < x1:
                    lines_intersection += 1
            else:
                a = (y2 - y1) / (x2 - x1)
                b = y1 - a * x1
                if (yp - b) / a > xp:
                    lines_intersection += 1
                if yp == y1 or yp == y2:
                    common_vertex += 1
    return bool((lines_intersection - common_vertex // 2) & 1)


def dot(v,w):
    x,y = v
    X,Y = w
    return x*X + y*Y

def length(v):
    x,y = v
    return math.sqrt(x*x + y*y)

def vector(b,e):
    x,y = b
    X,Y = e
    return (X-x, Y-y)

def unit(v):
    x,y = v
    mag = length(v)
    return (x/mag, y/mag)

def distance(p0,p1):
```

```
    return length(vector(p0,p1))

def scale(v,sc):
    x,y = v
    return (x * sc, y * sc)

def add(v,w):
    x,y = v
    X,Y = w
    return (x+X, y+Y)

def pnt2line(pnt, start, end):
    line_vec = vector(start, end)
    pnt_vec = vector(start, pnt)
    line_len = length(line_vec)
    line_unitvec = unit(line_vec)
    pnt_vec_scaled = scale(pnt_vec, 1.0/line_len)
    t = dot(line_unitvec, pnt_vec_scaled)
    if t < 0.0:
        t = 0.0
    elif t > 1.0:
        t = 1.0
    nearest = scale(line_vec, t)
    dist = distance(nearest, pnt_vec)
    nearest = add(nearest, start)
    return dist

def minimal_distance(polygon,point):
    min_dist = 1000000

    for (x1, y1), (x2, y2) in zip(polygon, polygon[1:] + polygon[:1]):
        dist = pnt2line(point,(x1,y1),(x2,y2))
        if dist<min_dist:
            min_dist = dist
    return min_dist

point = tuple(map(float,input().split(' ')))
polygon  = []

while True :
    try:
        p = tuple(map(float,input().split(' ')))
        polygon.append(p)
    except:
        break


if(point_in_polygon(polygon,point)):
    print(0)
else:
    print(round(minimal_distance(polygon,point),2))
```

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

▹ **Задача 1 (5-11 класс).** Доблесть и честь

На этот раз царю Леониду предстоит защить Спарту от врагов. В распоряжении у него имеется N бойцов. i-й боец обладает верностью A_i единиц. Этим бойцам предстоит отразить M вражеских отрядов. Сила i-го отряда равна B_i единиц. Полк бойцов отражает атаку i-го вражеского отряда, если каждый боец полка имеет верность строго больше B_i и количество бойцов в полке не меньше количества бойцов во вражеском отряде (количество бойцов во вражеском отряде равно его силе). Каждый спартанец полка при столкновении с вражеским отрядом погибает смертью храбрых. Леонид хочет знать, может ли он сформировать несколько полков из спартанцев так, чтобы отбить атаки всех вражеских отрядов. **Замечание. О**дин полк отбивает атаку только одного вражеского отряда.

Формат входных данных

В первой строке записано число T $(1 \leqslant T \leqslant 100)$ – количество тестов. После этого следует описание каждого тестового случая. В первой строке описания содержится целое число N $(1 \leqslant N \leqslant 10^5)$ – количество спартанцев. Во второй строке содержится массив A из N целых чисел $(1 \leqslant A_i \leqslant 10^9)$ – верность каждого спартанца.

В третьей строке содержится целое число M $(1 \leqslant M \leqslant 10^5)$ – количество вражеских отрядов. В четвертой строке содержится массив B из M целых чисел $(1 \leqslant B_i \leqslant 10^9)$ – сила каждого отряда. Гарантируется, что сумма N и M по всем входным данным не превышает 10^5.

Формат выходных данных

В ответ выведите T строк — ответ для каждого тестового случая: может ли Леонид собрать несколько полков. Если может, то выводите "Yes" (без кавычек), иначе "No".

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Пример тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
35 6 9 2 1 3 8 5 10 4 1 7 9 6 9 4	Yes Yes No

Решение задачи на языке Python

Сначала отсортируем спартанцев по возрастанию верности, а вражеские отряды по возрастанию силы. Очевидно, что более слабых спартанцев мы должны отправить на отражение более слабых вражеских отрядов. Это замечание позволяет нам решить задачу: жадно будем набирать спартанцев по возрастанию верности во вражеские отряды по возрастанию силы (если спартанец слишком слабый для текущего вражеского отряда, то пропускаем его; если мы набрали достаточно спартанцев для отражения атаки отряда, то переходим к следующему отряду). Если мы смогли каждому вражескому отряду противопоставить полк нужного размера, то выводим ответ «Yes», иначе «No».

```
t = int(input())
for tests in range(t):
    n = int(input())
    l = [int(i) for i in input().split()]
    m = int(input())
    k = [int(i) for i in input().split()]
    i = 0
    j = 0
    l = sorted(l)
    k = sorted(k)
    c = 0
    while i <= n - 1 and j <= m - 1:
        if l[i] > k[j]:
            c += 1
        i += 1
        if c == k[j]:
            c = 0
            j += 1
    if j >= m:
        print("Yes")
    else:
        print("No")
```

▹ **Задача 2 (5-11 класс).** Прямоугольные треугольники

На координатной плоскости заданы N точек с целочисленными координатами. На некоторых тройках этих точек можно построить прямоугольные треугольники. Напишите программу, которая найдет все такие треугольники и посчитает их количество.

Входные данные

Первая строка входных данных содержит число $N(1 \leqslant N \leqslant 100)$ — количество точек. Каждая из следующих N строк содержит пару чисел $x_k; y_k (-109 \leqslant x_k; y_k \leqslant 109)$ — координаты точек, разделённые пробелом.

Гарантируется, что все точки попарно различны.

Выходные данные

Выведите одно число, искомое количество прямоугольных треугольников.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Пример тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
6 1 3 6 7 3 0	3

На рисунке ниже прямоугольными треугольниками являются треугольники *ACE*, *CDE* и *BDE*.

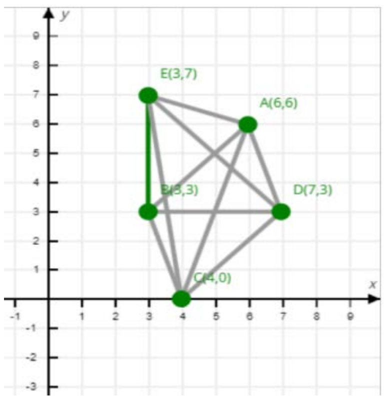


Рисунок 2.1 — Иллюстрация к задаче 2

Решение задачи на языке Python

```
a = int(input())
l = []
c = 0
for i in range(a):
    x, y = map(int,input().split())
    l.append([x, y])
for i in range(a):
    for j in range(a):
        for k in range(a):
            A = l[i].copy()
            B = l[j].copy()
            C = l[k].copy()
            if i == j or j == k or k == i:
                continue
            C1 = [B[0] - (B[1] - C[1]),B[1] + (B[0] - C[0])]
            if ((A[1] - B[1]) * (B[0] - C1[0]) == (B[1] - C1[1]) *
(A[0] - B[0])):
                c += 1
print(c // 2)
```

▹ **Задача 3 (5-9 класс).** Это магия

Фокусник предлагает зрителю загадать любое число от 1 до 100, после чего показывает ему семь карточек с числами (на одной карточке могут быть написаны несколько чисел). Зритель должен внимательно посмотреть на каждую из карточек и сказать фокуснику, есть на ней его число или нет. После этого фокусник безошибочно угадывает, какое число загадал зритель. Известно, что:

1) набор карточек неизменен;
2) фокусник всегда показывает карточки в одном и том же порядке.

Ваша задача — разгадать трюк и написать программу, которая помогает фокуснику.

Входные данные

На вход программа получает строку из семи ответов, разделенных пробелом.

Выходные данные

Выведите загаданное пользователем число.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Некоторые примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
No Yes Yes Yes No No No	56

Решение задачи

Задача имела несколько криптографический характер. По семплу можно догадаться, что на *i*-й карточке записаны числа, которые имеют единицу на *i*-й позиции в двоичной записи. Поэтому мы можем узнать 7 бит в двоичной записи числа, что достаточно для его дешифровки, когда оно удовлетворяет ограничениям из условия.

```
l = input().split()[-1::-1]
c = 0
for i in range(7):
    t = 2 ** i
    c += t * (l[i] == 'Yes')
print(c)
```

Задача 3 (10-11 класс). Перехваченные сообщения

В руки криптографа попали сообщения, зашифрованные неизвестным шифром. Для некоторых из них также был получен оригинал.

Написать программу, расшифровывающую сообщения, зашифрованные тем же шифром.

Для строки

GnH2sNKVfi7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkqmMy0EdIuC9wX,ZzYBa3vx1JGnH2sNKVfi7PtSoF ?.Tp

оригиналом является строка

JJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJJ

Для строки

IuC9wX,ZzYBa3vx1JGnH2sNKVfi7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkqmMy0EdIuC9w оригиналом является строка

dddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddddd
ddddd

Для строки

0EdIuC9wX,ZzYBa3vx1JGnH2sNKVfi7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkq
mMy0EdIuC9wX,ZzYBa3vx1

оригиналом является строка

yyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyyy
yyyyyyyyyyyyyyyyyy

Оригиналы остальных строк приведены в примерах ниже.

Входные данные

Зашифрованная строка длиной $0 < N < 200$ символов.

Выходные данные

Расшифрованная строка длиной N.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Некоторые примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
2OmMTjkj6uB!	Hello World!
!#@$()^%-+_=/*	!#@$()^%-+_=/*
EdIuC9wX,Z	0000000000
JGnH2sNKVf	1111111111
EGKJkWQ.qv	EGKJkWQ.qv
pLbp16nYr,bKovLR0qRSy b4	pLbp16nYr,bKovLR0qRSy b4
yvM5rQrs8O Og6I7c	Make Love Not War

Замечание. Как входная, так и выходная строки могут содержать только символы из следующего набора:

```
abcdefghijklmnopqrstuvwxyzABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ0123456789.,?*!#$(
)^%-+_=/
```

Решение задачи

Идея состоит в том, что ключевая строка подбирается по тестовым примерам (ее хорошо видно, когда вся исходная строка состоит из одного повторяющегося символа), об алгоритме шифрации участник также должен догадаться самостоятельно.

Примеры, приложенные к задаче на заключительном туре, позволяют однозначно определить ключевую строку и алгоритм.

С задачей справились всего три финалиста.

```
a='3vx1JGnH2sNKVfi7PtSoF ?.TprjAegOb5h6LD8WR4QcUlkqmMy0EdIuC9wX,ZzYBa'
s=input()
ans=''
for i in range(len(s)):
    if s[i] in '!#@$()^%-+_=/*':
        ans+=s[i]
    else:
        z=a.index(s[i])-i-1
        ans+=a[z%len(a)]
print(ans)
```

▹ **Задача 4 (5-11 класс).** Даня и тульские пряники

Студент Даня получил стипендию и на неё купил себе T тульских пряников.

Тульский пряник можно представить, как клетчатый прямоугольник, где у каждой клетки есть уровень вкусности, представленный целым числом.

Так как Даня не любит прямоугольники, а любит квадраты, то он хочет вырезать из каждого своего пряника кусочек квадратной формы, у которого сумма вкусностей всех попавших в него клеток максимальна, а затем съесть вырезанные кусочки.

Входные данные

В первой строке содержится целое число T ($1 \leqslant T \leqslant 50$) – количество купленных тульских пряников.

Каждый тульский пряник описывается в первой строке двумя числами N и M ($1 \leqslant N, M \leqslant 500$) – высотой и шириной тульского пряника соответственно.

Затем следует N строк по M чисел, по модулю не превышающих $5 \cdot 10^4$ (но возможно отрицательных), которые описывают вкусность каждого кусочка пряника.

Гарантируется, что у каждого пряника есть хотя бы одна клетка, у которой неотрицательная вкусность. Сумма высот тульских пряников не превосходит 500.

Выходные данные

Для каждого тульского пряника в отдельной строке выведите максимальную сумму вкусностей по всем кусочкам квадратной формы.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Примеры тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
1 3 2 1 -5 -4 7 -6 -9 -10	7
3 5 2 -1 -3 5 -1 -2 1 5 4 8 6 4 -7 -5 3 -5 8 6 2 5 -6	8

Решение задачи на языке C++

Достаточно очевидно медленное решение: давайте переберём левый верхний угол квадрата, затем его сторону, а затем с помощью циклов насчитаем сумму внутри этого квадрата. Такое решение работает за $O(n^2 \times m \times n \times m)$, что не подходит под ограничение задачи. Но это решение легко оптимизируется до полного балла: вместо того чтобы считать сумму внутри квадрата простым проходом, давайте насчитаем один раз префиксные суммы для нашего прямоугольника, и с помощью них будем за $O(1)$ узнавать сумму внутри любого квадрата. Тогда асимптотика решения получится равной $O(n^2 \times m)$, и решение получит полный балл.

Ни один из участников 9 класса и младше не справился с этой задачей.

```
#include<bits/stdc++.h>
#define ll long long
#define db double
#define pb push_back
#define pf push_front
#define ft first
#define sd second
#define ag assign

using namespace std;
const ll inf = 1e9+1, INF = 1e18+1, MOD = 1e9+7;

int main(){
	int t;
	cin>>t;
	while (t--){
		int n, m;
		cin>>n>>m;
		vector<vector<int>>s(n+1, vector<int>(m+1, 0));
		for (int i=1; i<=n; i++){
			for (int j=1; j<=m; j++){
				int x;
					cin>>x;
			s[i][j]=x+s[i][j-1]+s[i-1][j]-s[i-1][j-1];
			}
		}
		int ans = -inf;
		for (int i=1; i<=n; i++){
			for (int j=1; j<=m; j++){
				for (int l=1; l<=min(i, j); l++){
					ans=max(ans, s[i][j]-s[i-l][j]-s[i][j-
l]+s[i-l][j-l]);
			}
			}
		}
		cout<<ans<<'\n';
	}
}
```

▹ **Задача 5 (5-11 класс).** Жизнь пешки

Компьютер записывает “биографию” белой шахматной пешки в течение партии.

Начальное положение пешки — клетка E2.

На каждом ходе пешка может остаться на месте, сдвинуться вперед на одну клетку или на две клетки, если это ее первый ход.

Компьютер в начале игры и после каждого хода белых записывает позицию пешки по вертикали. Если пешка была “взята”, запись позиции прекращается. Считать, что пешку могут взять сразу после первого хода.

Известна длина шахматной партии. Найти количество всех возможных “жизненных путей” пешки по модулю 998244353.

Например, если партия длилась два хода, все возможные пути: 22, 23, 24, 222,223, 224, 233, 234, 244, 245. Всего 10 возможных путей.

Входные данные

Единственная строка входных данных содержит целое число $N (1 \leqslant N \leqslant 10^6)$ — длину партии.

Выходные данные

В ответе выведите количество различных шахматных путей по модулю 998244353.

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Пример тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
2	10
99	582018135

Решение задачи на языке Python

Решим задачу с помощью техники динамического программирования. Обозначим за $dp[i][j]$ количество путей длины *i* с последней клеткой, равной *j*. Инициализируем значение $dp[1][2]=1$. Пересчёт очевидный: для $j=4$ пересчитываемся через сумму $dp[i-1][2]+dp[i-1][3]+dp[i-1][4]$, для остальных *j* пересчитываемся через сумму $dp[i-1][j]+dp[i-1][j-1]$. Тогда искомым ответом будет сумма всех значений динамики по *j* от 2 до 8 и *i* от 2 до $n+1$. Получили решение с асимптотикой $O(n \cdot A)$, где A — это размер шахматной доски, равный 8. Такой асимптотики достаточно, чтобы набрать полный балл. Отметим, что можно было набрать частичный балл, перебрав все возможные числа длины $\leqslant n+1$ в цикле и проверяя, является ли каждое число корректной последовательностью ходов. Это медленное решение можно было использовать для стресс-тестирования решения на полный балл.

С этой задачей справились всего два участника 9 и младше классов. Приводим решение победителя заключительного тура, Дмитрия Шейкина, 8 класс, г. Ульяновск.

```
c = 3
a = int(input())
Mod = 998244353
t = 3
if False:
    print(0)
else:
    t2 = 1
    t3 = 1
    t4 = 1
    t5 = 0
    t6 = 0
    t7 = 0
    t8 = 0
    c = 3
    for i in range(2, a + 1):
        t8 += t7
        t7 += t6
        t6 += t5
        t5 += t4
        t4 += t3 + 1
        t3 += t2
        t2 = 1
        t8 %= Mod
        t7 %= Mod
        t6 %= Mod
        t5 %= Mod
        t4 %= Mod
        t3 %= Mod
        c += t8 + t7 + t6 + t5 + t4 + t3 + t2
        c %= Mod
print(c)
```

▹ **Задача 6 (5-11 класс).** Владелец банка

Бизнесмен Владимир является владельцем самого крупного банка в мире «Банк-Вованк». Чтобы подчеркнуть свой статус, он каждый день приходит в автосалон с целью прикупить новых машин в свою коллекцию.

В автосалоне есть N различных марок машин. Количество машин i-й марки равно A_i, каждая из них имеет цену B_i бурлей. Владимир будет приходить в автосалон в течение Q дней. В i-й день он хочет купить C_i самых дорогих машин, стоимость каждой из которых не превышает D_i бурлей (при этом необязательно все машины должны иметь различную марку). При этом при равенстве в цене он отдаёт приоритет машинам, у которых номер марки меньше (т.е. той марке, которая раньше записана во входных данных). Если нашлось столько машин с подходящей стоимостью, Владимир купит все эти машины. Однако, если столько машин не нашлось, он не будет покупать ничего.

Входные данные

Первая строка содержит число N ($1 \leqslant N \leqslant 10^5$) — количество марок машин в автосалоне.

Вторая строка содержит массив A из N чисел ($1 \leqslant A_i \leqslant 10^9$) — количество машин каждой марки.

Третья строка содержит массив B из N чисел ($1 \leqslant B_i \leqslant 10^9$) — стоимость одной машины каждой марки.

Четвёртая строка содержит число Q ($1 \leqslant Q \leqslant 10^5$) — в течение скольких дней Владимир будет приходить в автосалон.

Пятая строка содержит массив C из Q чисел ($1 \leqslant C_i \leqslant 10^9$) — количество машин, которое он хочет купить каждый день.

Шестая строка содержит массив D из Q чисел ($1 \leqslant D_i \leqslant 10^9$) — ограничение на стоимость машин каждый день.

Выходные данные

Для каждого дня в отдельной строке выведите «Yes», если Владимир совершил покупку, либо «No», если не совершил (выводите без кавычек). В последней строке выведите N чисел — количество оставшихся машин каждой марки (в том же порядке, что и во входных данных).

Ограничение времени выполнения программы

1 секунда

Система оценки

Решения, правильно работающие для $N \cdot Q \leqslant 10^6$, будут набирать не менее 50 баллов.

Пример тестовых данных

Входные данные	Результат работы программы
5 6 9 2 1 8 3 8 5 4 8 9 7	Yes Yes No 2 0 2 0

Решение задачи на языке С++

Давайте заведём массив, где в каждой ячейке будем хранить тройку чисел: марку машины, стоимость и количество машин данной марки, которые остались. Для начала решим задачу на 50 баллов, то есть с ограничением $N \cdot Q \leqslant 10^6$. Для этого давайте перед каждым запросом сортировать наш массив по убыванию стоимости, при равенстве по возрастанию марки. После будем проходиться по этому массиву и набирать слева направо в нашем массиве машины, которые не превышают по цене D_i бурлей, пока не наберём C_i машин. А затем, соответственно, нам нужно вывести ответ на запрос и при необходимости повычитать в массиве машины, которые купил бизнесмен. Такое решение работает за $O(q \times n \times \log n)$ и набирает 50-60 баллов в зависимости от реализации. Теперь оптимизируем наше решение. Давайте отсортируем наш массив один раз, вместо того чтобы сортировать перед каждым запросом. Заведём для нашего массива структуру – дерево отрезков, которая умеет присваивать на отрезке, вычитать в точке, а также находить сумму на отрезке за $O(\log n)$. Для эффективного поиска отрезка марок машин, которые мы купим, будем использовать наше дерево отрезков и бинарный поиск.

Сначала бинарным поиском находим первую марку машины, которая стоит не больше D_i. После этого ещё одним бинарным поиском найдём отрезок марок, суммарное количество машин которых не превышает C_i. Затем во все марки (кроме последней на отрезке) в дереве отрезков присвоим количество 0, а из последней марки вычтем необходимое количество машин, чтобы «добить» нашу сумму до C_i. Т.к. дерево отрезков строится за $O(n)$, изначальная сортировка массива работает за $O(n\log n)$, бинарный поиск выполняется за $O(\log n)$, а за каждую итерацию бинарного поиска мы делаем запрос к дереву отрезков, который работает за $O(\log n)$, то получили решение с асимптотикой $O(n\times\log n+q\times\log^2 n)$, которое набирало 80-100 баллов в зависимости от аккуратности написания. В этом решении можно убрать лишний логарифм при запросе, если вместо бинарного поиска использовать спуск по дереву отрезков. Тогда можно было получить гарантированные 100 баллов.

```
#include <bits/stdc++.h>

#define all(x) (x).begin(),(x).end()
#define len(x) (int)(x).size()

typedef long long ll;
using namespace std;

#define int ll

struct Segtree { // присвоение неотрицательного на отрезке, сумма на
отрезке
	int size = 1;
	const int NULL_PUSH = -1;
	vector<int> tree;
	vector<int> push;

	Segtree(int n, vector<int> a) {
		while (size < n) size *= 2;
		tree.assign(size * 2 - 1, 0);
```

```
            push.assign(size * 2 - 1, NULL_PUSH);

            build(0, 0, size, a);
      }

      void build(int x, int lx, int rx, vector<int> &a) {
            if (rx - lx == 1) {
                  if (lx < len(a)) {
                        tree[x] = a[lx];
                  }
            } else {
                  int m = (rx + lx) >> 1;
                  build(2 * x + 1, lx, m, a);
                  build(2 * x + 2, m, rx, a);
                  tree[x] = tree[2 * x + 1] + tree[2 * x + 2];
            }
      }

      void prop(int x, int lx, int rx) {
            if (push[x] == NULL_PUSH)
                  return;

            tree[x] = push[x] * (rx - lx);

            if (rx - lx == 1) {
                  push[x] = NULL_PUSH;
                  return;
            }

            push[2 * x + 1] = push[x];
            push[2 * x + 2] = push[x];
            push[x] = NULL_PUSH;
      }

      void set(int l, int r, int v, int x, int lx, int rx) {
            prop(x, lx, rx);
            if (lx >= r || rx <= l)
                  return;
            if (l <= lx && rx <= r) {
                  push[x] = v;
                  prop(x, lx, rx);
                  return;
            }

            int m = (rx + lx) >> 1;
            set(l, r, v, 2 * x + 1, lx, m);
            set(l, r, v, 2 * x + 2, m, rx);
            assert(push[2 * x + 1] == NULL_PUSH && push[2 * x + 2] ==
NULL_PUSH);
            tree[x] = tree[2 * x + 1] + tree[2 * x + 2];
      }
```

```
    void set(int l, int r, int v) { // [l, r)
        set(l, r, v, 0, 0, size);
    }

    int get(int l, int r, int x, int lx, int rx) {
        prop(x, lx, rx);

        if (lx >= r || rx <= l) {
            return 0;
        }

        if (l <= lx && rx <= r) {
            return tree[x];
        }

        int m = (rx + lx) >> 1;
        return get(l, r, 2 * x + 1, lx, m) + get(l, r, 2 * x + 2, m,
rx);
    }

    int get(int l, int r) { // [l...r)
        return get(l, r, 0, 0, size);
    }
};

void solve() {
    int n, q;
    vector<int> count, cost;
    vector<int> q_count;
    vector<int> q_cost;

    auto read = [&]() {
        cin >> n;
        count.resize(n);
        for (auto &el: count) cin >> el;
        cost.resize(n);
        for (auto &el: cost) cin >> el;

        cin >> q;
        q_count.resize(q);
        for (auto &el: q_count) cin >> el;
        q_cost.resize(q);
        for (auto &el: q_cost) cin >> el;
    };

    auto cmp = [&](array<int, 3> lhs, array<int, 3> rhs) -> bool {
        if (lhs[0] != rhs[0])
            return lhs[0] > rhs[0];

        return lhs[2] < rhs[2];
```

```
	};

	auto solve_slow = [&cmp](int n, vector<int> count, vector<int>
cost, int q, vector<int> q_count,
                              vector<int> q_cost) ->
pair<vector<bool>, vector<int>> {
		vector<array<int, 3>> arr;

		for (int i = 0; i < n; ++i) {
			arr.push_back({cost[i], count[i], i});
		}

		sort(all(arr), cmp);

		vector<bool> yesno;
		vector<int> result;
		for (int query = 0; query < q; ++query) {
			int query_count = q_count[query];
			int query_cost = q_cost[query];

			int it = 0;
			while (it < n && arr[it][0] > query_cost) {
				++it;
			}

			if (it == n) {
				yesno.push_back(false);
				continue;
			}

			// arr[it][0] <= query_cost

			int cnt = 0;
			for (int i = it; i < n; ++i) {
				cnt += arr[i][1]; // count
			}

			if (cnt < query_count) {
				yesno.push_back(false);
				continue;
			}

			while (query_count != 0 && it < n) {
				int got = min(query_count, arr[it][1]);
				query_count -= got;
				arr[it][1] -= got;
				it += 1;
			}

			assert(query_count == 0);
			yesno.push_back(true);
```

```
        }

        result.resize(n);
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            result[arr[i][2]] = arr[i][1];
        }

        return {yesno, result};
    };

    auto solve_fast = [&cmp] (int n, vector<int> count, vector<int>
cost, int q, vector<int> q_count, vector<int> q_cost) ->
pair<vector<bool>, vector<int>> {
        vector<array<int, 3>> arr; // [cost, count, ind]

        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            arr.push_back({cost[i], count[i], i});
        }

        sort(all(arr), cmp);

        vector<int> cnts(n);
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            cnts[i] = arr[i][1];
        }

        Segtree segtree(n, cnts);

        vector<bool> yesno;
        vector<int> result;
        for (int query = 0; query < q; ++query) {
            int query_count = q_count[query];
            int query_cost = q_cost[query];

            int left = -1, right = n;
            while (right - left > 1) {
                int mid = (right + left) >> 1;

                if (arr[mid][0] > query_cost) {
                    left = mid;
                } else {
                    right = mid;
                }
            }

            int it = right;

            while (it < n && arr[it][0] > query_cost) {
                assert(false);
                ++it;
            }
```

```
            if (it == n) {
                yesno.push_back(false);
                continue;
            }

            // arr[it][0] <= query_cost

            if (segtree.get(it, n) < query_count) {
                yesno.push_back(false);
                continue;
            }

            left = it - 1;
            right = n;

            while (right - left > 1) {
                int mid = (right + left) >> 1;

                if (segtree.get(it, mid + 1) >= query_count) {
                    right = mid;
                } else {
                    left = mid;
                }
            }

            // [it, right] у нас количество больше либо равно
query_count

            assert(right != n);

            int sum_pref = segtree.get(it, right); // [it, right)
            int ost = query_count - sum_pref;

            segtree.set(it, right, 0);
            int cnt_right = segtree.get(right, right + 1);

            assert(cnt_right >= ost);

            segtree.set(right, right + 1, cnt_right - ost);

            yesno.push_back(true);
        }

        result.resize(n);
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            result[arr[i][2]] = segtree.get(i, i + 1);
        }

        return {yesno, result};
    };
```

```
    read();
    auto ans = solve_fast(n, count, cost, q, q_count, q_cost);

    auto yesno = ans.first;
    auto numbers = ans.second;
    for (auto el: yesno) {
        if (el) {
            cout << "Yes" << '\n';
        } else {
            cout << "No" << '\n';
        }
    }

    for (int &el: ans.second) {
        cout << el << ' ';
    }
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    solve();
    return 0;
}
```

Критерии определения победителей и призеров отборочного тура

Каждое из решений участника по каждой из 12 задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов. Прошедшими в заключительный тур считались участники, набравшие суммарно 120 и более баллов.

Статистика отборочного тура

В отборочном туре приняли участие 1517 школьников из 66 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья. Количество иностранных участников — 43 человека. Количество участников и призеров отборочного тура представлено в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров
5 и младше	190	3
6	224	11
7	214	12
8	229	19
9	210	64
10	247	64
11	203	543
Итого	1517	248

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура

Каждое из решений участника по каждой из 12 задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов.

Дипломы победителя получили участники, набравшие 400 и более баллов. Дипломы призера (2 место) — 300 и более баллов. Участники 10-11 классов, набравшие 230 и более баллов, и 9 класса и младше, набравшие 200 и более баллов, заняли 3 место.

Статистика заключительного тура

В заключительном туре приняли участие 157 школьников из 33 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья.

Призовые места заняли 25 человек. Количество участников, победителей и призеров представлено в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5	1	0	0
6	8	0	0
7	9	0	0
8	24	1	2
9	36	7	0
10	43	9	3
11	36	1	2
Итого	157	18	7

План УМД на 2023/24 уч.г.
С. 4, п. 17

Александр Анатольевич Андреев
Екатерина Алексеевна Максимова
Елена Александровна Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2023/2024 учебный год

Учебное пособие

Подписано в печать 16.04.2024 г. Формат 60x90 1/16.
Объём 10,4 усл.п.л. Изд. № 24.