МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, А.А. Балабекян, А.В. Куприн, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2024/2025 учебный год

Учебное пособие

Москва 2025

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, А.А. Балабекян, А.В. Куприн, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2024/2025 учебный год

Учебное пособие

Для учащихся 5-11 классов школ

Москва 2025

УДК 004.02, 37, 51

Андреев А.А., Балабекян А.А., Куприн А.В., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников: ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2024/2025 учебный год / МТУСИ. – М., 2025. – 192 с.

Издание утверждено Методическим советом университета в качестве учебного пособия. Протокол № 3 от 22.04.2025 г.

Рецензенты: Д.Е. Студеникин, к.т.н., проректор (ГМУ им. Ф.Ф. Ушакова)

К.Н. Панков, к.ф.-м.н., доцент (МТУСИ)

СОДЕРЖАНИЕ

О сборнике

Приводятся тексты заданий олимпиады с решениями/ответами отборочного и заключительного туров по математике и информатике, статистические сведения и историческая справка.

Пособие предназначено для участников Олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

Все опубликованные в настоящем издании материалы распространяются свободно, могут копироваться и использоваться в учебном процессе без ограничений.

Желательны (в случаях, когда это уместно) ссылки на источник.

Электронная версия: https://тиим.рф

Авторы: А.А. Андреев, А.А. Балабекян, А.В. Куприн, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова.

Предисловие

Одним из стратегических приоритетов в сфере реализации государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» до 2030 года, утвержденных Постановлением Правительства Российской Федерации от 26.12.2017 № 1642, является формирование эффективной системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов у детей и молодежи, основанной на принципах ответственности, справедливости, всеобщности и направленной на самоопределение и профессиональную ориентацию всех обучающихся.

Одним из способов реализации этого приоритета является проведение олимпиад школьников, являющихся важным инструментом для выявления и развития талантов у одаренных детей. Олимпиады, особенно математической и IT-направленности, стимулируют креативное и аналитическое мышление, учат находить нестандартные решения сложных задач. Подготовка к олимпиадам требует углубленного изучения предмета, расширяет кругозор и формирует прочную базу знаний. Олимпиадное движение – это прекрасный шанс проверить свои силы, оценить уровень подготовки и, возможно, выбрать будущую профессию. Победы и призовые места на олимпиадах дают дополнительные баллы при поступлении в образовательные организации высшего образования, что является серьезным стимулом для участия.

Вузы, организуя олимпиады, выполняют важную миссию по выявлению и поддержке талантливой молодежи. Это позволяет университетам привлекать наиболее мотивированных и подготовленных абитуриентов. Это, в свою очередь, способствует повышению качества образования и научных исследований.

Кроме того, организация и проведение олимпиад позволяет вузам взаимодействовать со школами, оказывать методическую поддержку учителям, повышать интерес школьников к науке и образованию.

Проведение олимпиад – это инвестиция в будущее науки и технологий. Именно из числа победителей и призеров олимпиад вырастают будущие ученые, инженеры и другие специалисты, которые будут двигать прогресс и решать глобальные проблемы. Олимпиады – это не просто соревнование, это платформа для обмена знаниями, опытом и идеями, которая способствует развитию интеллектуального потенциала страны.

Основной задачей олимпиады школьников «ТИИМ» является поддержание и развитие интереса к решению нестандартных задач математики и программирования. Олимпиада проводится учреждениями высшего образования, центрами Сириус и школами России и ближнего зарубежья.

Впервые олимпиада школьников «ТИИМ – Технологии. Интеллект. Информатика. Математика» состоялась в 2020/2021 учебном году по двум предметам — математике и информатике и сразу привлекла к себе внимание более 3500 школьников со всей России и стран ближнего зарубежья.

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Варианты заданий отборочного тура и финала по информатике включали в себя по шесть задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов. Тур проводился с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решения оценивались в соответствии с количеством верно пройденных тестов и принимались на языках C++, Python, Pascal, Java.

В 2024/2025 учебном году в олимпиаде по математике приняли участие 5985 школьников из 83 регионов РФ и ближнего зарубежья, по информатике – 1437 школьников из 77 регионов РФ и ближнего зарубежья. Заключительный тур прошел на 47 очных площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Калининграде, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-на-Дону, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, а также в Абхазии, Казахстане, Кыргызстане и Донецкой Народной Республике и в дистанционном формате для удаленных регионов и лиц с ограниченными возможностями здоровья с применением технологий, позволяющих идентифицировать участника и отслеживать его действия в реальном времени.

Настоящее пособие содержит:

- 280 задач отборочного тура по математике с ответами;
- 110 задач заключительного тура по математике с решениями;
- 12 задач отборочного тура по информатике с решениями;
- 6 задач заключительного тура по информатике с решениями;
- критерии определения победителей и призеров;
- статистику олимпиады.

Полный текст заданий с ответами и решениями, а также информация о победителях и призерах опубликованы на официальном сайте олимпиады https://тиим.рф.

Олимпиада по математике

Задания отборочного тура олимпиады с ответами

В состязании по математике принимали участие школьники 5-11 классов. Для удобства участников отборочный тур проходил как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов отборочного тура содержал 10 задач. Вариант заключительного тура также включал в себя 10 задач.

Каждое из заданий отборочного тура по математике могло быть оценено в 0 или 1 балл. От участников принимался краткий ответ.

5 класс

Отборочный тур, 5 класс, 1 вариант

▹ **1.** Исходя из представленных равенств найдите и запишите вместо знака вопроса значение, удовлетворяющее закономерности: 3222 = 36, 3322 = 64, 3331 = ?.

Ответ: 91.

▹ **2.** Если $(b,a)\square(d,c)=bc-ad$ и $(x,3)\square(1,4)=5$, то x равно ...

Ответ: 2.

▹ **3.** Какое наименьшее 10-значное число можно получить, по-разному записывая шесть чисел 315, 41, 6, 7, 63, 2 одно за другим?

Ответ: 2315416367.

▹ **4.** Работая на уборке фруктов, 5А класс собрал 560 кг яблок, 5Б — 595 кг и 5В — 735 кг. Все собранные яблоки разложили в ящики, положив в каждый из них одно и то же наибольшее из возможного число килограммов. Сколько таких ящиков потребовалось каждому классу? В ответе запишите произведение найденных значений.

Ответ: 5712.

▹ **5.** Восстановите поврежденные записи. В ответе запишите сумму всех найденных цифр.

```
×    1 2 6
       * *
  ---------
     * * *
+ * * * *
  ---------
  1 * 2 * 6
```

Ответ: 27.

▹ **6.** Анастасии 5 лет, а Николаю 19 лет. Через сколько лет Николай станет втрое старше Анастасии?

Ответ: 2.

▹ **7.** У Незнайки есть квадрат со стороной 100 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал строго по линиям из этого квадрата квадрат со стороной 64 клетки. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых Незнайка хочет сложить новый квадрат наибольшей площади. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 76.

▹ **8.** Сколько целых семизначных чисел можно записать тремя единицами и четырьмя нулями?

Ответ: 15.

▹ **9.** Определите величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 3 часа 30 мин при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 75.

▹ **10.** Решите ребус $\overline{zz}\cdot\overline{vz}=2024$. В ответе запишите $\overline{vz}-\overline{zz}$ (каждая буква — цифра, различные цифры — разные буквы). $\overline{ab}=10a+b$

Ответ: 70.

Отборочный тур, 5 класс, 2 вариант

▹ **1.** Исходя из представленных равенств найдите и запишите вместо знака вопроса значение, удовлетворяющее закономерности: 2111 = 23, 2211 = 42, 2221 = ?.

Ответ: 61.

▹ **2.** Если $(b,a)\square(d,c)=bc+ad$ и $(x,3)\square(-1,2)=5$, то x равно ...

Ответ: 4.

▹ **3.** Какое наименьшее 10-значное число можно получить, по-разному записывая шесть чисел 325, 41, 6, 8, 63, 1 одно за другим?

Ответ: 1325416368.

▹ **4.** Через железнодорожную станцию проследовало три воинских эшелона. В первом находилось 462 солдата, во втором — 546 и в третьем — 630. Сколько вагонов было в каждом эшелоне, если известно, что в каждом вагоне находилось одинаковое число солдат и что это число было наибольшим из всех возможных? В ответе укажите количество вагонов во всех трех эшелонах.

Ответ: 39.

▹ **5.** Восстановите поврежденные записи. В ответе запишите сумму всех найденных цифр.

```
×      4 *
       * 6
   ---------
     2 * 2
+  2 * 5
   ---------
   * * * 2
```

Ответ: 34.

▹ **6.** Алексею 3 года, а Оле 15 лет. Сколько лет будет Алексею, когда Оля станет втрое старше его?

Ответ: 6.

▹ **7.** У Незнайки есть квадрат со стороной 130 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал строго по линиям из этого квадрата квадрат со стороной 110 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых Незнайка хочет сложить новый квадрат наибольшей площади. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 69.

▹ **8.** Сколько всего пятизначных чисел имеют сумму цифр, равную трем?

Ответ: 15.

▹ **9.** Определите величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 2 часа 20 мин, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 50.

▹ **10.** Решите ребус $\overline{zz} \cdot \overline{zv} = 2024$. В ответе запишите $\overline{zz} + \overline{zv}$ (каждая буква — цифра, различные цифры — разные буквы). $\overline{ab} = 10a + b$.

Ответ: 90.

Отборочный тур, 5 класс, 3 вариант

▹ **1.** Исходя из представленных равенств найдите и запишите вместо знака вопроса значение, удовлетворяющее закономерности: 1222 = 16, 1122 = 24, 1112 = ?.

Ответ: 32.

▹ **2.** Если $(a,b)\square(c,d) = ac + bd$ и $(x,3)\square(-2,5) = 3$, то x равно ...

Ответ: 6.

▹ **3.** Какое наибольшее 10-значное число можно получить, по-разному записывая шесть чисел 325, 41, 6, 8, 63, 1 одно за другим?

Ответ: 8663413251.

▹ **4.** На кольцевой дорожке длиной 660 м проводится эстафета, длина каждого этапа которой 150 м. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете?

Ответ: 22.

▹ **5.** Восстановите поврежденные записи. В ответе запишите произведение всех найденных цифр, отличных от нуля.

```
×    * * *
       * 8
   ---------
     * * *
+ * * 3 *
 -----------
  * * * * 0
```

Ответ: 56700.

▹ **6.** Тане 13 лет, а Николаю 2 года. Сколько лет будет Тане, когда она станет вдвое старше Николая?

Ответ: 22.

▹ **7.** У Незнайки есть квадрат со стороной 140 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал строго по линиям из этого квадрата квадрат со стороной 65 клеток. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых Незнайка хочет сложить новый квадрат наибольшей площади. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 123.

▹ **8.** Сколько целых восьмизначных чисел можно записать тремя единицами и пятью нулями?

Ответ: 21.

▹ **9.** Определите величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 1 час 10 мин, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 25.

▹ **10.** Решите ребус $\overline{zo} \cdot \overline{vz} = 2025$. В ответе запишите $z \cdot o \cdot v$ (каждая буква — цифра, различные цифры — разные буквы). $\overline{ab} = 10a + b$.

Ответ: 70.

Отборочный тур, 5 класс, 4 вариант

▹ **1.** Исходя из представленных равенств найдите и запишите вместо знака вопроса значение, удовлетворяющее закономерности: 2223 = 63, 2233 = 46, 2333 = ?.

Ответ: 29.

▹ **2.** Если $a \square b = ab + a + b$ и $3 \square 5 = 2 \square x$, то x равно ...

Ответ: 7.

▹ **3.** Какое наименьшее 10-значное число можно получить, по-разному записывая шесть чисел 315, 42, 5, 8, 63, 1 одно за другим?

Ответ: 1315425638.

▹ **4.** На кольцевой дорожке длиной 700 м проводится эстафета, длина каждого этапа которой 315 м. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какова дистанция наименьшей такой эстафеты (в метрах)?

Ответ: 6300.

▹ **5.** Восстановите поврежденные записи. В ответе запишите наибольшее число, состоящее из цифр, не появляющихся в решении этого примера.

```
×     * 1 *
      3 * 2
     -------
      * 3 *
+   3 * 2 *
  * 2 * 5
 -----------
  1 * 8 * 3 0
```

Ответ: 9762.

▹ **6.** Тане 7 лет, а Алексею 23. Через сколько лет Алексей будет вдвое старше Тани?

Ответ: 9.

▹ **7.** У Незнайки есть квадрат со стороной 160 клеток, выполненный на клетчатой бумаге. Он вырезал строго по линиям из этого квадрата квадрат со стороной 144 клетки. Оставшийся кусок он разрезал по делениям на единичные квадраты, из которых Незнайка хочет сложить новый квадрат наибольшей площади. Чему будет равна сторона его нового квадрата?

Ответ: 69.

▹ **8.** Сколько всего шестизначных чисел имеют сумму цифр, равную трем?

Ответ: 21.

▹ **9.** Определите величину угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 1 час 20 мин, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями.

Ответ: 80.

▹ **10.** Решите ребус $\overline{zo}\cdot\overline{ov}=2025$. В ответе запишите $z+o+v$ (каждая буква — цифра, различные цифры — разные буквы). $\overline{ab}=10a+b.$

Ответ: 14.

6 класс

Отборочный тур, 6 класс, 1 вариант

▹ **1.** На утреннем концерте 40 % всех посетителей были школьниками, 36 % — женщинами и остальные посетители — мужчинами. На вечерний концерт пришло мужчин на 75 % больше, чем на утренний, женщин на 37,5 % больше, а школьников на 75 % меньше, чем на утренний концерт. Как и на сколько процентов (P) число посетителей вечернего концерта изменилось по сравнению с числом посетителей утреннего концерта? В ответе укажите 8P.

Ответ: 12.

▹ **2.** В городе два катка прямоугольной формы. Длина первого катка 180 м, а длина забора вокруг него 600 м. Второй каток имеет ту же площадь, но его длина 216 м. Чему равна ширина второго катка?

Ответ: 100.

▹ **3.** Сколько существует пятизначных чисел, одинаково читающихся слева направо и справа налево?

Ответ: 900.

▹ **4.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 150 дм, Белоснежка проходит 400 вершков. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 655,6 дм и если вышли друзья одновременно? Ответ укажите в метрах (1 вершок = 4,445 см).

Ответ: 30.

▹ **5.** Известно, что книга имеет толщину 0,3 дм, ее 120 листов имеют толщину 0,012 м. Сколько страниц в книге?

Ответ: 600.

▹ **6.** На окраску куба размерами $6\times6\times6$ требуется 18 грамм краски. Сколько краски потребуется на окраску куба с размерами $2\times2\times2$?

Ответ: 2.

▹ **7.** Найдите остаток от деления на $M = 437$ числа $n = 24! + 6!$. $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

Ответ: 283.

▹ **8.** В тетрадь написали несколько положительных чисел. Каждое из них равно пятой части от суммы остальных. Сколько чисел записано в тетради?

Ответ: 6.

▹ **9.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 17 и которое к тому же оканчивается на 17 и делится на 17.

Ответ: 15317.

▹ **10.** Часы показывают 9:00. Через какое наименьшее *M* (количество минут) стрелки будут опять образовывать угол 90°? В ответе запишите 1,1 *M*.

Ответ: 36.

Отборочный тур, 6 класс, 2 вариант

▹ **1.** Слиток сплава серебра с цинком весом в 3,5 кг содержал 76 % серебра. Его сплавили с другим слитком и получили слиток весом в 10,5 кг, содержание серебра в котором было 84 %. Сколько процентов серебра содержалось во втором слитке?

Ответ: 88.

▹ **2.** Сторона квадрата равна 6 см. Сумма длин сторон прямоугольника равна сумме длин сторон квадрата, причем ширина прямоугольника составляет $\frac{1}{3}$ стороны квадрата. Найдите стороны прямоугольника, в ответе укажите его площадь.

Ответ: 20.

▹ **3.** Среди чисел первой тысячи сколько таких, в записи которых имеется цифра 7?

Ответ: 271.

▹ **4.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 2000 см, Белоснежка проходит 100 футов. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 15144 см и если вышли друзья одновременно? Ответ укажите в дециметрах (1 фут = 30,48 см).

Ответ: 600.

▹ **5.** Известно, что книга имеет толщину 4,25 см, ее 100 листов имеют толщину 1,7 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 500.

▹ **6.** На окраску куба размерами $6\times6\times6$ требуется 20 грамм краски. Сколько краски потребуется на окраску куба с размерами $3\times3\times3$?

Ответ: 5.

▹ **7.** Найдите остаток от деления на $M=391$ числа $n=25!+25^2$. $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k$.

Ответ: 234.

▹ **8.** В тетрадь написали несколько положительных чисел. Каждое из них равно шестой части от суммы остальных. Сколько чисел записано в тетради?

Ответ: 7.

▹ **9.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 21 и которое к тому же оканчивается на 21 и делится на 21.

Ответ: 18921.

▹ **10.** Часы показывают 6:00. Через какое наименьшее M (количество минут) стрелки будут опять образовывать развернутый угол? В ответе запишите 2,2 M.

Ответ: 144.

Отборочный тур, 6 класс, 3 вариант

▹ **1.** На утреннем концерте 35 % всех посетителей были школьниками, 40 % — женщинами и остальные посетители — мужчинами. На вечерний концерт пришло мужчин на 80 % больше, чем на утренний, женщин на 15 % меньше, а школьников на 25 % меньше, чем на утренний концерт. Как и на сколько процентов (Р) число посетителей вечернего концерта изменилось по сравнению с числом посетителей утреннего концерта? В ответе укажите 4Р.

Ответ: 21.

▹ **2.** В городе два катка прямоугольной формы. Длина первого катка 150 м, а длина забора вокруг него 400 м. Второй каток имеет ту же площадь, но его длина составляет $\frac{1}{4}$ длины забора первого катка. Определите длину забора вокруг второго катка.

Ответ: 350.

▹ **3.** Сколько страниц в книге, если для перенумерования их потребовалась 6681 цифра?

Ответ: 1947.

▹ **4.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 250 дм, Белоснежка проходит 600 вершков. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 1033,4 дм и если вышли друзья одновременно? Ответ укажите в метрах (1 вершок = 4,445 см).

Ответ: 50.

▹ **5.** Известно, что книга имеет толщину 0,018 м, ее 80 листов имеют толщину 0,09 дм. Сколько страниц в книге?

Ответ: 320.

▹ **6.** На окраску куба размерами $12\times12\times12$ требуется 216 грамм краски. Сколько краски потребуется на окраску куба с размерами $2\times2\times2$?

Ответ: 6.

▹ **7.** Найдите остаток от деления на $M=221$ числа $n=20!+24^3$. $k!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k$.

Ответ: 122.

▹ **8.** В тетрадь написали несколько положительных чисел. Каждое из них равно трети от суммы остальных. Сколько чисел записано в тетради?

Ответ: 4.

▹ **9.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 22 и которое к тому же оканчивается на 22 и делится на 22.

Ответ: 9922.

▹ **10.** Часы показывают 3:00. Через какое ближайшее время M (количество минут) стрелки будут опять перпендикулярны? В ответе запишите $0{,}55M$.

Ответ: 18.

Отборочный тур, 6 класс, 4 вариант

▹ **1.** 5 л сливок с содержанием жира 35 % смешали с 4 л 20-процентных сливок и к смеси добавили 1 л чистой воды. Какой процент жирности (P) у полученной смеси? В ответе укажите 2P.

Ответ: 51.

▹ **2.** В городе планируется построить два катка прямоугольной формы. Известно, что длина первого катка составит 250 м, ширина второго 200 м и его ограждение 800 м. Причем площадь катков будет одинаковой. Чему равна ширина первого катка?

Ответ: 160.

▹ **3.** В книге 237 страниц. Сколько цифр (отдельных типографических знаков) потребуется, чтобы пронумеровать все страницы?

Ответ: 603.

▹ **4.** Гномы и Белоснежка решили встретиться прекрасным весенним утром и прогуляться по парку. Пока Гномы проходят 120 дм, Белоснежка проходит 480 вершков. Какое расстояние пройдут Гномы, если расстояние между домом Белоснежки и домом Гномов составляет 500,04 м и если вышли друзья одновременно? Ответ укажите в метрах (1 вершок = 4,445 см).

Ответ: 180.

▹ **5.** Известно, что книга имеет толщину 0,52 дм, ее 70 листов имеют толщину 1,3 см. Сколько страниц в книге?

Ответ: 560.

▹ **6.** На окраску куба размерами $12 \times 12 \times 12$ требуется 192 грамма краски. Сколько краски потребуется на окраску куба с размерами $3 \times 3 \times 3$?

Ответ: 12.

▹ **7.** Найдите остаток от деления на $M = 505$ числа $n = 20! + 24! + 2^{11}$. $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

Ответ: 28.

▹ **8.** В тетрадь написали несколько положительных чисел. Каждое из них равно четверти от суммы остальных. Сколько чисел записано в тетради?

Ответ: 5.

▹ **9.** Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 28 и которое к тому же оканчивается на 28 и делится на 28.

Ответ: 18928.

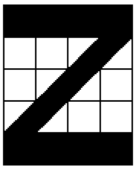
▹ **10.** Часы показывают 2:00. Через какое ближайшее время *M* (количество минут) стрелки образуют такой же угол? В ответе запишите 2,75 *M*.

Ответ: 60.

7 класс

Отборочный тур, 7 класс, 1 вариант

▹ **1.** Площадь одной клеточки равна $1\,\text{см}^2$. Найти площадь буквы Z.



Ответ: 11.

▹ **2.** За победу в партии на шахматном турнире участник получает одно очко, за ничью — половину очка, за поражение 0 очков. Остап Ибрагимович Бендер сыграл на турнире 15 партий и набрал $11\frac{1}{2}$ очков. На сколько партий он выиграл больше, чем проиграл?

Ответ: 8.

▹ **3.** Среди коренного населения острова 30 % говорят по-немецки. Летом население острова увеличивается на 75 % за счет приезжих немцев. Сколько процентов населения острова говорит по-немецки летом?

Ответ: 60.

▹ **4.** Пусть числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + 2x + 8y + 17 = 0.$$

Найдите эти числа. В ответе укажите их сумму.

Ответ: –5.

▹ **5.** Найдите сумму трехзначных чисел, каждое из которых является произведением четырех неравных между собой простых чисел.

Ответ: 10524.

▹ **6.** Среднее арифметическое семи чисел равно 190. После того как одно из семи чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся шести чисел стало равно 175. Какое число было удалено?

Ответ: 280.

▹ **7.** Найдите наименьшее четырехзначное число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает остаток 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

Ответ: 1019.

▹ **8.** Определите величину меньшего угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 2 часа 10 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 5.

▹ **9.** При каких значениях p прямая $y = x + 2p$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 72? Если p принимает больше одного значения, то в ответе укажите их произведение.

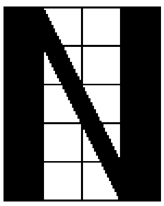
Ответ: –36.

▹ **10.** В многоугольнике с периметром 40 провели произвольным образом диагональ f, которая разбила его на два многоугольника с периметрами 22 и 30. Чему равна длина диагонали f?

Ответ: 6.

Отборочный тур, 7 класс, 2 вариант

▹ **1.** Площадь одной клеточки равна $1\,\text{см}^2$. Найти площадь буквы N.



Ответ: 12.

▹ **2.** За победу в партии на шахматном турнире участник получает одно очко, за ничью — половину очка, за поражение 0 очков. Остап Ибрагимович Бендер сыграл на турнире 18 партий и набрал $10\frac{1}{2}$ очков. На сколько партий он выиграл больше, чем проиграл?

Ответ: 3.

▹ **3.** Среди коренного населения острова 68 % говорят по-английски. Летом население острова увеличивается на 28 % за счет приезжих англичан. Сколько процентов населения острова говорит по-английски летом?

Ответ: 75.

▹ **4.** Пусть числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0.$$

Найдите эти числа. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 1.

▹ **5.** Сумма квадратов двух некоторых простых чисел оканчивается цифрой 9. Найдите все такие простые числа. В ответе укажите сумму всех таких чисел.

Ответ: 7.

▹ **6.** Среднее арифметическое шести чисел равно 17. После того как одно из шести чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся пяти чисел стало равно 19. Какое число было удалено?

Ответ: 7.

▹ **7.** Найдите наибольшее четырехзначное число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает остаток 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

Ответ: 9959.

▹ **8.** Определите величину меньшего угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 4 часа 40 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 100.

▹ **9.** При каких значениях q прямая $y = 2x + q$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 4? Если q принимает больше одного значения, то в ответе укажите их произведение.

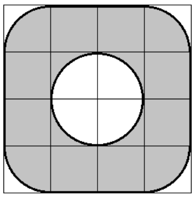
Ответ: –16.

▹ **10.** В многоугольнике с периметром 40 провели произвольным образом диагональ *f*, которая разбила его на два многоугольника с периметрами 26 и 30. Чему равна длина диагонали *f*?

Ответ: 8.

Отборочный тур, 7 класс, 3 вариант

▹ **1.** Площадь одной клеточки равна 1см^2. Найти площадь фигуры



.

Ответ: 12.

▹ **2.** За победу в партии на шахматном турнире участник получает одно очко, за ничью — половину очка, за поражение 0 очков. Остап Ибрагимович Бендер сыграл на турнире 24 партии и набрал $16\frac{1}{2}$ очков. На сколько партий он выиграл больше, чем проиграл?

Ответ: 9.

▹ **3.** Среди некоренного населения острова 5 % говорят по-русски. Зимой население острова увеличивается на 25 % за счет приезжих русских туристов. Сколько процентов населения острова говорит по-русски зимой?

Ответ: 24.

▹ **4.** Пусть числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0.$$

Найдите эти числа. В ответе укажите их сумму.

Ответ: 2.

▹ **5.** Найдите три различных простых числа, произведение которых втрое больше их суммы. В ответе укажите сумму этих простых чисел.

Ответ: 10.

▹ **6.** Среднее арифметическое девяти чисел равно 225. После того как одно из девяти чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся восьми чисел стало равно 224. Какое число было удалено?

Ответ: 233.

▹ **7.** Найдите наименьшее четырехзначное число, которое при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 7 дает остаток 6, при делении на 11 дает в остатке 10.

Ответ: 1154.

▹ **8.** Определите величину меньшего угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 2 часа 40 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 160.

▹ **9.** При каких значениях b прямая $y = 3x - b$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 6? Если b принимает больше одного значения, то в ответе укажите их сумму.

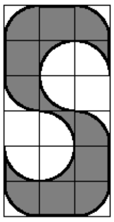
Ответ: 0.

▹ **10.** В многоугольнике с периметром 40 провели произвольным образом диагональ f, которая разбила его на два многоугольника с периметрами 26 и 38. Чему равна длина диагонали f?

Ответ: 12.

Отборочный тур, 7 класс, 4 вариант

▹ **1.** Площадь одной клеточки равна 1см^2. Найти площадь буквы S.



Ответ: 10.

▹ **2.** За победу в партии на шахматном турнире участник получает одно очко, за ничью — половину очка, за поражение 0 очков. Остап Ибрагимович Бендер сыграл на турнире 20 партий и набрал $13\frac{1}{2}$ очков. На сколько партий он выиграл больше, чем проиграл?

Ответ: 7.

▹ **3.** Среди коренного населения острова 65 % говорят по-испански. Летом население острова увеличивается на 25 % за счет испанских туристов. Сколько процентов населения острова говорит по-испански летом?

Ответ: 72.

▹ **4.** Пусть числа x и y удовлетворяют уравнению

$$4x^2 + 9y^2 + 12x + 25 = 24y.$$

Найдите эти числа. В ответе укажите $6 \ \ y - x$.

Ответ: 17.

▹ **5.** Найдите три различных простых числа, произведение которых в пять раз больше их суммы. В ответе укажите сумму этих простых чисел.

Ответ: 14.

▹ **6.** Среднее арифметическое одиннадцати чисел равно 31. После того как одно из одиннадцати чисел удалили, среднее арифметическое оставшихся десяти чисел стало равно 29. Какое число было удалено?

Ответ: 51.

▹ **7.** Найдите наибольшее четырехзначное число, которое при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 4, при делении на 7 дает остаток 6, при делении на 11 дает в остатке 10.

Ответ: 9239.

▹ **8.** Определите величину меньшего угла между часовой и минутной стрелками часов, показывающих 6 часов 45 минут, при условии, что обе стрелки движутся с постоянными скоростями. Ответ укажите в градусах.

Ответ: 67.5.

▹ **9.** При каких значениях a прямая $y = 4x - a$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 32? Если a принимает больше одного значения, то в ответе укажите их произведение.

Ответ: –256.

▹ **10.** В многоугольнике с периметром 40 провели произвольным образом диагональ f, которая разбила его на два многоугольника с периметрами 22 и 28. Чему равна длина диагонали f?

Ответ: 5.

8 класс

Отборочный тур, 8 класс, 1 вариант

▹ **1.** Имеются отрезки с длинами 24, 2*n*, 4*n*. Найдите сумму всех натуральных *n*, при которых можно построить треугольник с такими отрезками.

Ответ: 56.

▹ **2.** Изготовлены два куба — один из меди, другой из стали. Ребро медного куба на 20 % больше ребра стального куба. На сколько процентов (P) медный куб тяжелее стального? (Удельная плотность меди на 10 % больше удельной плотности стали.) В ответе укажите 100P.

Ответ: 9008.

▹ **3.** Среди коренного населения острова 30 % говорят по-немецки. Летом население острова увеличивается на 75 % за счет приезжих немцев. Сколько процентов населения острова говорит по-немецки летом?

Ответ: 60.

▹ **4.** На координатной плоскости изображен квадрат, одна из вершин которого находится в точке $A\ \ 0,5$, а центр симметрии квадрата находится в начале координат. Найдите все точки с рациональными координатами, находящиеся на границе этого квадрата, произведение координат которых есть квадрат натурального числа. Выберите среди них точку x, y с положительными координатами, ближайшую к оси OX и в ответе укажите значение выражения $x - y$.

Ответ: 3.

▹ **5.** Сколько десятичных знаков после запятой имеет значение выражения $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{2024}}$?

Ответ: 2024.

▹ **6.** Если $d \otimes b = \frac{d - 2bd + b^2}{b}$, то чему равно число $(((0 \otimes 1) \otimes 1) \otimes 1)$?

Ответ: 1.

▹ **7.** Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего — в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 6 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, второго — в 2 раза, а третьего — в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован был вырыт в действительности?

Ответ: 10.

▹ **8.** Яна загадала Леониду два натуральных числа, а после сделала два следующих утверждения: произведение этих чисел имеет 5 делителей без учета самого числа, а их разность равна 336. Помогите Леониду отгадать эти числа. В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 722.

▹ **9.** Найти число делителей числа 4410.

Ответ: 36.

▹ **10.** Найдите наименьшее a, при котором существует единственное решение уравнения $3-a|x-1|=2x^2+x$.

Ответ: 5.

Отборочный тур, 8 класс, 2 вариант

▹ **1.** Имеются отрезки с длинами 225, $20n$, $25n$. Найдите сумму всех натуральных n, при которых можно построить треугольник с такими отрезками.

Ответ: 975.

▹ **2.** Три бригады начали одновременную пахоту. Установленная планом ежедневная норма первой бригады так относится к норме второй бригады, как 5 к 4, а второй к третьей — как 2 к 1,5. Первая бригада увеличила ежедневную норму на 10 %, вторая бригада на 20 %, а третья, как и первая, на 10 %. В результате к одному сроку первая бригада вспахала на 14 га больше второй бригады. Предположим, что первая бригада вспахала к этому сроку A га, а вторая и третья — B и C га, соответственно. В ответе укажите $A+2B+3C$.

Ответ: 500.

▹ **3.** Среди коренного населения острова 68 % говорят по-английски. Летом население острова увеличивается на 28 % за счет приезжих англичан. Сколько процентов населения острова говорит по-английски летом?

Ответ: 75.

▹ **4.** На координатной плоскости изображен квадрат, одна из вершин которого находится в точке $A(13,0)$, а центр симметрии квадрата находится в начале координат. Найдите все точки с рациональными координатами, находящиеся на границе этого квадрата, произведение координат которых есть квадрат натурального числа. В ответе укажите квадрат наименьшего возможного расстояния от этих точек до начала координат.

Ответ: 97.

▹ **5.** Сколько десятичных знаков после запятой имеет значение выражения $\frac{1}{8}+\frac{1}{512}+\ldots+\frac{1}{8^{2025}}$?

Ответ: 6075.

▹ **6.** Если $c\otimes d=\frac{c^2+d^2-2c}{d+1}$, то чему равна сумма корней уравнения $1\otimes((1\otimes x)\otimes 0)=x\otimes 0$?

Ответ: 1.

▹ **7.** Трое рабочих должны сделать некоторое количество деталей за определенное время. Если бы первый рабочий работал половину отведенного времени, второй — $\frac{1}{3}$ часть отведенного времени, а третий — $\frac{1}{4}$ часть, то они сделали бы 37 деталей. Если бы первый работал $\frac{1}{6}$ часть, второй — $\frac{1}{10}$ часть, а третий — $\frac{1}{15}$ часть отведенного времени, то они сделали бы 11 деталей. Какое количество деталей сделали бы трое рабочих вместе, если бы работали все отведенное время?

Ответ: 114.

▹ **8.** Женя загадала Степе два натуральных числа, а после сказала два следующих утверждения: произведение этих чисел имеет 12 делителей без учета самого числа, а их разность равна 240. Помогите Степе отгадать эти числа. В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 272.

▹ **9.** Найти число делителей числа 2024.

Ответ: 16.

▹ **10.** Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $3x^2 + 4x = a|x+2| + 4$ имеет ровно два решения.

Ответ: 8.

Отборочный тур, 8 класс, 3 вариант

▹ **1.** Имеются отрезки с длинами 224, $21n$, $26n$. Найдите сумму всех натуральных n, при которых можно построить треугольник с такими отрезками.

Ответ: 980.

▹ **2.** Изготовлены два куба — один из свинца, другой из стали. Ребро куба из свинца на 20 % меньше ребра стального куба. На сколько процентов (P) свинцовый куб легче стального? (Удельная плотность свинца на 45 % больше удельной плотности стали.) В ответе укажите 200P.

Ответ: 5152.

▹ **3.** Среди некоренного населения острова 5 % говорят по-русски. Зимой население острова увеличивается на 25 % за счет приезжих русских туристов. Сколько процентов населения острова говорит по-русски зимой?

Ответ: 24.

▹ **4.** На координатной плоскости изображен квадрат, одна из вершин которого находится в точке $A\ -17,0$, а центр симметрии квадрата находится в начале координат. Найдите все точки с рациональными координатами, находящиеся на границе этого квадрата, произведение координат которых есть квадрат натурального числа. В ответе укажите наибольший модуль разности абсциссы и ординаты этих точек.

Ответ: 15.

▹ **5.** Сколько десятичных знаков после запятой имеет значение выражения $\frac{1}{25}+\frac{1}{625}+\ldots+\frac{1}{25^{2024}}$?

Ответ: 4048.

▹ **6.** Если $b\otimes c=\frac{b^2-c^2+2c}{c+1}$, то чему равна сумма корней уравнения $(((0\otimes x)\otimes 2)\otimes 0)=9$?

Ответ: 5.

▹ **7.** Товары *A, B, C* куплены за некоторую сумму денег. Если бы товар *A* стоил в 5 раз дешевле, товар *B* — в 2 раза дешевле, товар *C* — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8000 рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью товар *A* стоил в 2 раза дешевле, товар *B* стоил в 4 раза дешевле, товар *C* — в 3 раза дешевле, то затраты составили бы 12000 рублей. Сколько стоит покупка?

Ответ: 28000.

▹ **8.** Ксюша загадала Андрею два натуральных числа, а после сказала два следующих утверждения: произведение этих чисел имеет 11 делителей без учета самого числа, а их разность равна 2047. Помогите Андрею отгадать эти числа. В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 2049.

▹ **9.** Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры числа 123456789, при условии, что в каждой такой перестановке как все четные цифры, так и все нечетные будут идти в возрастающем порядке?

Ответ: 126.

▹ **10.** Найдите наибольшее целое a, при котором уравнение $2x^2 - 3x + a|x+1| = 5$ имеет ровно три решения.

Ответ: -8.

Отборочный тур, 8 класс, 4 вариант

▹ **1.** Имеются отрезки с длинами 2024, 20n, 25n. Найдите сумму всех натуральных n, при которых можно построить треугольник с такими отрезками.

Ответ: 80820.

▹ **2.** За *I* квартал завод выполнил 26 % годового плана, а количество продукции, выполненное за *II*, *III* и *IV* кварталы, пропорционально числам 6.5 : 7.8 : 9.1. Определить, на сколько процентов перевыполнил завод план, если во *II* квартале завод дал продукции в $1\frac{1}{4}$ раза больше, чем в первом.

Ответ: 43.

▹ **3.** Среди коренного населения острова 65 % говорят по-испански. Летом население острова увеличивается на 25 % за счет испанских туристов. Сколько процентов населения острова говорит по-испански летом?

Ответ: 72.

▹ **4.** На координатной плоскости изображен квадрат, одна из вершин которого находится в точке $A\ \ 0,-25$, а центр симметрии квадрата находится в начале координат. Найдите все точки с рациональными координатами, находящиеся на границе этого квадрата, произведение координат которых есть квадрат натурального числа. В ответе укажите сумму квадратов расстояний от этих точек до начала координат.

Ответ: 1348.

▹ **5.** Сколько десятичных знаков после запятой имеет значение выражения $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\ldots+\frac{3^{2025}}{2^{2025}}$?

Ответ: 2025.

▹ **6.** Если $a\otimes b=\frac{b+ab-a}{a+1}$, то чему равна сумма квадратов корней уравнения $(((0\otimes x)\otimes 1)\otimes 0)=-x$?

Ответ: 6.

▹ **7.** Имеется три типа станков различной производительности. При этом 3 станка первого типа, 4 — второго и 2 — третьего справляются со всей работой за 15 часов; 2 станка первого типа, 5 — второго и 3 — третьего справляются с работой за 12 часов. Объем работы увеличили в 3,5 раза, но взяли 21 станок первого типа, 42 — второго и 24 — третьего. За какое время они выполнили этот объем работы?

Ответ: 5.

▹ **8.** Ксюша загадала Андрею два натуральных числа, а после сказала два следующих утверждения: произведение этих чисел имеет 13 делителей без учета самого числа, а их разность равна 8191. Помогите Андрею отгадать эти числа. В ответе укажите сумму найденных чисел.

Ответ: 8193.

▹ **9.** Отец оставил в наследство коллекцию из 12 редких различных монет. Каким числом способов можно поровну разделить ее между тремя наследниками?

Ответ: 34650.

▹ **10.** При каком наименьшем a уравнение $2+5x-3x^2=a|x-2|$ имеет единственное решение?

Ответ: 7.

9 класс

Отборочный тур, 9 класс, 1 вариант

▹ **1.** Сколько существует различных треугольников, стороны которых измеряются целым числом см с периметром 13 см?

Ответ: 5.

▹ **2.** Известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 55 % партий, но проиграл 15. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 35 %, 13 партий проиграл и несколько партий закончил вничью. Найдите наименьшее значение $n+d$, где n — количество партий, сведенных вничью, а d — число досок, на которых проходил сеанс.

Ответ: 365.

▹ **3.** Найдите наибольшую сумму $x+y$ из всех возможных пар натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению: $2xy+4x^2=5y+10x+21$.

Ответ: 18.

▹ **4.** Завод в Казахстане должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики трех типов. Один ящик первого типа вмещает 70 деталей, один ящик второго типа вмещает 40 деталей, один ящик третьего типа вмещает 25 деталей. Стоимость пересылки одного ящика первого типа 20 тенге, стоимость пересылки одно ящика второго типа 10 тенге, стоимость пересылки одного ящика третьего типа 7 тенге. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? Недогрузка ящиков не допускается. Какова наименьшая стоимость пересылки?

Ответ: 278.

▹ **5.** Известно, что число 6! не делится на n и имеет такой же остаток при делении на n, как 5!. Найдите все подходящие n, в ответе укажите их сумму.

Ответ: 1500.

▹ **6.** В сладкой мастерской работают несколько кондитеров, и каждый трудится над одним из видов изделия: тортом или эклером (за день один кондитер может изготовить несколько изделий своего вида). Оказалось, что сегодня над тортами работал 101 кондитер, причем все они выпекли одинаковое число изделий. Каждый специалист по эклерам изготовил 200 пирожных. В конце дня оказалось, что всего изготовлено 5450 изделий. Сколько тортов изготовил каждый кондитер?

Ответ: 50.

▹ **7.** При каких a один из корней уравнения

$$a^2+1\ \ x^2 = \ 2a+3\ \ x+a+5+ax^2$$

больше 1, а другой меньше 1? В ответе запишите сумму всех целых a, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 14.

▹ **8.** Найти площадь фигуры, заданной условием $\left||x|-2\right|+|y+3|\leqslant 4$.

Ответ: 56.

▹ **9.** Найдите наибольшее пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна 21 и которое к тому же оканчивается на 21 и делится на 21.

Ответ: 94521.

▹ **10.** Если $b\otimes c=\dfrac{b^2-c^2+2c}{c+1}$, то чему равна сумма корней уравнения $(((0\otimes x)\otimes 2)\otimes 0)=9$?

Ответ: 5.

Отборочный тур, 9 класс, 2 вариант

▹ **1.** Сколько существует различных треугольников, стороны которых измеряются целым числом см с периметром 15 см?

Ответ: 7.

▹ **2.** На юбилее города Нью-Васюки известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 35 % партий, проиграл несколько партий и ни одной не сыграл вничью. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 14 партий проиграл и 25 партий закончил вничью. Найдите наименьшее число досок, на которых шла игра.

Ответ: 100.

▹ **3.** Найдите наименьшую сумму $x+y$ из всех возможных пар натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению: $2x^2+5xy-12y^2=28$.

Ответ: 13.

▹ **4.** На 100 тенге решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 тенге; набор из 35 игрушек стоит 6 тенге, а набор из 50 игрушек стоит 9 тенге. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек? В ответе укажите максимальное число игрушек.

Ответ: 580.

▹ **5.** Известно, что число 11! делится на n и имеет такой же остаток при делении на n, как 8!. Найдите количество подходящих n.

Ответ: 96.

▹ **6.** В сладкой мастерской работают несколько кондитеров, и каждый трудится над одним из видов изделия: конфетой или леденцом (за день один кондитер может изготовить несколько изделий своего вида). Оказалось, что сегодня над конфетами работали 300 кондитеров, причем все они изготовили одинаковое число конфет. Каждый специалист по леденцам изготовил 41 леденец. В конце дня оказалось, что всего изготовлено 1105 изделий. Сколько всего было специалистов по леденцам?

Ответ: 5.

▹ **7.** При каких a оба корня уравнения

$$ax^2-(a+1)x+2=0$$

по модулю меньше 1? В ответе запишите наименьшее натуральное a, удовлетворяющее условию.

Ответ: 6.

▹ **8.** Найти площадь фигуры, заданной условием $|x+2|+||y|-3|\leqslant 4$.

Ответ: 62.

▹ **9.** Найдите наименьшее пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна 28 и которое к тому же оканчивается на 28 и делится на 28.

Ответ: 18928.

▹ **10.** Если $a\otimes b=\dfrac{b+ab-a}{a+1}$, то чему равна сумма квадратов корней уравнения $(((0\otimes x)\otimes 1)\otimes 0)=-x$?

Ответ: 6.

Отборочный тур, 9 класс, 3 вариант

▹ **1.** Сколько существует различных треугольников, стороны которых измеряются целым числом см с периметром 17 см?

Ответ: 8.

▹ **2.** Известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 50 % партий, но проиграл 20. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 10 партий проиграл и несколько партий закончил вничью. Найдите наименьшее значение $n+d$, где n — количество партий, сведенных вничью, а d — число досок, на которых проходил сеанс.

Ответ: 74.

▹ **3.** Найдите наибольшую сумму квадратов всех возможных пар натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению: $x^2-4xy-5y^2=412$.

Ответ: 30740.

▹ **4.** Из лесного хозяйства в город нужно вывезти 1590 деревьев. Для перевозки имеются полуторатонки, трехтонки и пятитонки. На полуторатонке можно перевезти за один раз 26 деревьев, на трехтонке — 45 деревьев, на пятитонке — 75 деревьев. Стоимость одного пробега для полуторатонки равна 9 тысяч рублей, для трехтонки — 15 тысяч рублей, для пятитонки — 24 тысячи рублей. Как лесное хозяйство должно распределить перевозки, чтобы общая их стоимость была наименьшей? Недогрузка машин не допускается. Какова наименьшая стоимость перевозок? Ответ дайте в тысячах рублей.

Ответ: 510.

▹ **5.** Известно, что число 9! не делится на m и имеет такой же остаток при делении на m, как 11!. Найдите все возможные значения m. В ответе укажите наибольший общий делитель наибольшего и наименьшего из них.

Ответ: 109.

▹ **6.** В сладкой мастерской работают несколько кондитеров, и каждый трудится над одним из видов изделия: тортом или эклером (за день один кондитер может изготовить несколько изделий своего вида). Оказалось, что сегодня над тортами работали 97 кондитеров, причем все они выпекли одинаковое число изделий. Каждый специалист по эклерам изготовил 153 пирожных. В конце дня оказалось, что всего изготовлено 1138 изделий. Сколько всего кондитеров было в мастерской сегодня?

Ответ: 100.

▹ **7.** При каких m неравенство

$$x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$$

выполняется при всех $x \in \ 1,2\ $? В ответе запишите сумму всех целых m, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: -21.

▹ **8.** Найти площадь фигуры, заданной условием $\left||x|-3\right| + \left||y|+2\right| \leqslant 4$.

Ответ: 16.

▹ **9.** Найдите наименьшее пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна 21 и которое к тому же оканчивается на 21 и делится на 21.

Ответ: 18921.

▹ **10.** Если $d \otimes b = \dfrac{d - 2bd + b^2}{b}$, то чему равно число $(((0 \otimes 1) \otimes 1) \otimes 1)$?

Ответ: 1.

Отборочный тур, 9 класс, 4 вариант

▹ **1.** Сколько существует различных треугольников, стороны которых измеряются целым числом см с периметром 19 см?

Ответ: 10.

▹ **2.** На юбилее города Нью-Васюки известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 50 % партий и проиграл несколько партий. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 21 партию проиграл и 30 партий закончил вничью. Найдите наименьшее число досок, на которых шла игра.

Ответ: 138.

▹ **3.** Найдите наибольшую сумму квадратов всех возможных пар натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению: $x^2 - 4xy - 5y^2 = 103$.

Ответ: 7685.

▹ **4.** Предполагается использовать 2 млн рублей на путевки в дома отдыха. Путевки есть на 15, 27 и 45 дней. Стоимость их соответственно 21 тысяча рублей, 40 тысяч рублей и 60 тысяч рублей. Сколько и каких путевок нужно купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим? В ответе укажите общее число дней отдыха.

Ответ: 1494.

▹ **5.** Известно, что 8! не делится на n и имеет такой же остаток при делении на n, как 5!. Найдите все возможные n. В ответе укажите их количество.

Ответ: 32.

▹ **6.** В сладкой мастерской работают несколько кондитеров, и каждый трудится над одним из видов изделия: конфетой или леденцом (за день один кондитер может изготовить несколько изделий своего вида). Оказалось, что сегодня над конфетами работали 67 кондитеров, причем все они изготовили одинаковое число конфет. Каждый специалист по леденцам изготовил 108 леденцов. В конце дня оказалось, что всего изготовлено 2193 изделия. Сколько всего было изготовлено конфет?

Ответ: 1005.

▹ **7.** При каких a оба корня уравнения

$$x^2+4ax+\ 1-2a+4a^2\ \ =0$$

меньше –1? В ответе запишите наименьшее натуральное a, удовлетворяющее условию задачи.

Ответ: 2.

▹ **8.** Найти площадь фигуры, заданной условием $\big||x|-5\big|+|y+6|\leqslant 7$.

Ответ: 188.

▹ **9.** Найдите наибольшее пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна 28 и которое к тому же оканчивается на 28 и делится на 28.

Ответ: 94528.

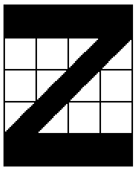
▹ **10.** Если $c\otimes d=\dfrac{c^2+d^2-2c}{d+1}$, то чему равна сумма корней уравнения $1\otimes((1\otimes x)\otimes 0)=x\otimes 0$?

Ответ: 1.

10 класс

Отборочный тур, 10 класс, 1 вариант

▹ **1.** Мальчик разукрасил клетчатую скатерть (см. рис.).



На этот стол случайным образом садится муха. Какова вероятность того, что муха сядет на узор? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0.55.

▹ **2.** Зададим операции $\wedge$, $\oplus$ и $\vee$ с помощью таблиц:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Пусть имеется последовательность a_n, состоящая из нулей и единиц. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$, а про следующие члены последовательности известно: $a_3 = a_1 \oplus a_2$, $a_4 = a_3 \vee a_2$, $a_5 = a_4 \wedge a_3$, затем снова $a_6 = a_5 \oplus a_4$, $a_7 = a_6 \vee a_5$, $a_8 = a_7 \wedge a_6$ и так далее. Найдите шесть последовательных членов, начиная с a_{2024}.

Ответ: 101011.

▹ **3.** Пусть

$$a = \sqrt{2023} - \sqrt{2024}.$$

Вычислите значение $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$.

Ответ: 8094.

▹ **4.** Сумма длин сторон *AB*, *BC* треугольника *ABC* равна 11, величина угла *ABC* равна 60°. Радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, равен $2/\sqrt{3}$. Известно, что длина стороны *AB* больше длины стороны *BC*.

Найдите квадрат длины высоты треугольника *ABC*, опущенной из вершины *A*.

Ответ: 48.

▹ **5.** Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа, делящиеся на 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дают одинаковый остаток 1. В ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим найденными числами.

Ответ: 87360.

▹ **6.** Площадь трапеции *ABCD* равна *S*. Основание *AB* в 7 раз длиннее основания *CD*. На стороне *AD* выбрана точка *K* такая, что площадь треугольника *ABK* в два раза меньше площади треугольника *BCK*. Найти площадь треугольника *CDK*. В ответе запишите найденное значение при $S = 10240$.

Ответ: 832.

▹ **7.** Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{9}$. Определить ее первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $(12;15)$ и существует число n такое, что отношение суммы первых n членов прогрессии к сумме последующих $n-1$ членов равно $1-\frac{1}{n}$. В ответе записать $225a_1$.

Ответ: 3000.

▹ **8.** На юбилее города Нью-Васюки известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 50 % партий и проиграл несколько партий. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 21 партию проиграл и 30 партий закончил вничью. Найдите наименьшее число досок, на которых шла игра.

Ответ: 138.

▹ **9.** Найдите целую часть наибольшего значения функции на промежутке $0;2024$, которая при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству $f\ \ x\ \ -2f\left(\dfrac{2}{x}\right)=x+1.$

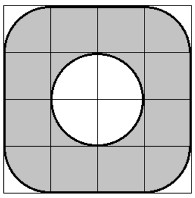
Ответ: -3.

▹ **10.** Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 5 натуральных чисел от 1 до 100 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 32500.

Отборочный тур, 10 класс, 2 вариант

▹ **1.** Мальчик разукрасил клетчатую скатерть (см. рис.).



Криволинейные части границы представляют собой дуги окружности единичного радиуса. На этот стол случайным образом садится муха. Какова вероятность того, что муха сядет на узор? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0.75.

▹ **2.** Зададим операции $\wedge$, $\oplus$ и $\vee$ с помощью таблиц:

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

Пусть имеется последовательность a_n, состоящая из нулей и единиц. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$, а про следующие члены последовательности известно: $a_3 = a_1 \wedge a_2$, $a_4 = a_3 \oplus a_2$, $a_5 = a_4 \vee a_3$, затем снова $a_6 = a_5 \wedge a_4$, $a_7 = a_6 \oplus a_5$, $a_8 = a_7 \vee a_6$ и так далее. Найдите шесть последовательных членов, начиная с a_{2024}.

Ответ: 110101.

▹ **3.** Пусть $b = \sqrt{223} + \sqrt{224}$. Вычислите значение $b^2 + \frac{1}{b^2}$.

Ответ: 894.

▹ **4.** Площадь треугольника *ABC* равна $15\sqrt{3}$. Величина угла *BAC* равна 120°. Величина угла *ABC* больше величины угла *ACB*. Расстояние от вершины *A* до центра окружности, вписанной в треугольник *ABC*, равно 2. Найдите квадрат длины медианы треугольника *ABC*, проведенной из вершины *B*.

Ответ: 19.

▹ **5.** Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа, кратные 13, которые при делении на 3, 4, 5, 6 и 7 дают одинаковые остатки 2. В ответе укажите разность между найденными наибольшим и наименьшим числами.

Ответ: 81900.

▹ **6.** Прямая *OA*, где *O* — центр вписанной окружности треугольника *ABC*, пересекает сторону *BC* в точке *D*. Периметр треугольника в три раза больше одной из его сторон. Найти радиус *R* описанной окружности треугольника *ABC*, если известно, что самая короткая сторона равна 4 и $OD : OA = 2 : 3$. В ответе запишите значение $7R^2$.

Ответ: 64.

▹ **7.** Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый ее член положительный, в 15 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме ее последних шести членов.

Ответ: 16.

▹ **8.** Известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 50 % партий, но проиграл 20. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 10 партий проиграл и несколько партий закончил вничью. Найдите наименьшее значение $n+d$, где n — количество партий, сведенных вничью, а d — число досок, на которых проходил сеанс.

Ответ: 74.

▹ **9.** Найдите сумму всех нулей функции, которая при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству $f(x)-2f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1$.

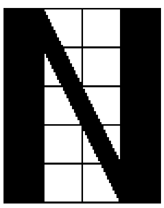
Ответ: -8.

▹ **10.** Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 7 натуральных чисел от 1 до 51 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 27600.

Отборочный тур, 10 класс, 3 вариант

▹ **1.** Мальчик разукрасил клетчатую скатерть (см. рис.).



На этот стол случайным образом садится муха. Какова вероятность того, что муха сядет на узор? Ответ запишите в виде десятичной дроби.

Ответ: 0.6.

▹ **2.** Зададим операции $\wedge$, $\oplus$ и $\vee$ с помощью таблиц:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Пусть имеется последовательность a_n, состоящая из нулей и единиц. Известно, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а про следующие члены последовательности известно: $a_3 = a_1 \wedge a_2$, $a_4 = a_3 \oplus a_2$, $a_5 = a_4 \vee a_3$, затем снова $a_6 = a_5 \wedge a_4$, $a_7 = a_6 \oplus a_5$, $a_8 = a_7 \vee a_6$ и так далее. Найдите шесть последовательных членов, начиная с a_{2024}.

Ответ: 101110.

▹ **3.** Пусть $c = \sqrt{224} - \sqrt{223}$. Вычислите значение $\left(c^3 + \frac{1}{c^3}\right)\frac{1}{\sqrt{14}}$.

Ответ: 7144.

▹ **4.** В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* длина боковой стороны *AB* равна 2. Биссектриса угла *BAD* пересекает прямую *BC* в точке *E*. В треугольник *ABE* вписана окружность, касающаяся стороны *AB* в точке *M* и стороны *BE* в точке *N*. Длина отрезка *MN* равна 1. Найдите величину угла *BAD* в градусах.

Ответ: 120.

▹ **5.** Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа, кратные 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5 и 11 дают одинаковый остаток 1. В ответе укажите разность между найденными наибольшим и наименьшим числами.

Ответ: 87780.

▹ **6.** Площадь трапеции *ABCD* равна *S*. Основание *BC* в пять раз короче основания *AD*. На стороне *AB* выбрана точка *M* такая, что площадь треугольника *ADM* в два раза больше площади треугольника *CDM*. Найти площадь треугольника *BCM*. В ответе запишите найденное значение при $S = 156$.

Ответ: 6.

▹ **7.** Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{10}$. Определить ее первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $(10;12)$ и существует число n такое, что отношение суммы первых $n+1$ членов прогрессии к сумме последующих n членов равно $\frac{n}{n+1}$. В ответе записать $20a_1$.

Ответ: 210.

▹ **8.** На юбилее города Нью-Васюки известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 35 % партий, проиграл несколько партий и ни одной не сыграл вничью. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 25 %, 14 партий проиграл и 25 партий закончил вничью. Найдите наименьшее число досок, на которых шла игра.

Ответ: 100.

▹ **9.** Найдите сумму всех нулей функции, которая при всех допустимых значениях x удовлетворяет равенству $f\left(1-\frac{1}{x}\right)-2f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x+1$. Ответ запишите в виде десятичной дроби.

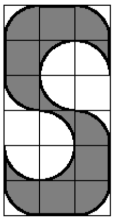
Ответ: -4.5.

▹ **10.** Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 9 натуральных чисел от 1 до 48 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 85008.

Отборочный тур, 10 класс, 4 вариант

▹ **1.** Мальчик разукрасил клетчатую скатерть (см. рис.).



Криволинейные части границы представляют собой дуги окружности единичного радиуса. На этот стол случайным образом садится муха. Какова вероятность того, что муха сядет на узор? Вероятность представить в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{m}{n}$. В ответе запишите значение $2\frac{n+m}{n-m}$.

Ответ: 7.

▹ **2.** Зададим операции $\wedge$, $\oplus$ и $\vee$ с помощью таблиц:

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

Пусть имеется последовательность a_n, состоящая из нулей и единиц. Известно, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а про следующие члены последовательности известно: $a_3 = a_1 \vee a_2$, $a_4 = a_3 \wedge a_2$, $a_5 = a_4 \oplus a_3$, затем снова $a_6 = a_5 \vee a_4$, $a_7 = a_6 \wedge a_5$, $a_8 = a_7 \oplus a_6$ и так далее. Найдите шесть последовательных членов, начиная с a_{2024}.

Ответ: 111010.

▹ **3.** Пусть $d = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Вычислите значение $d^2 + \frac{1}{d^2}$.

Ответ: 2.

▹ **4.** Основание равнобедренного треугольника равно *b*, а угол при основании равен α. Прямая пересекает продолжение основания в точке *M* под углом β и делит пополам ближайшую к *M* боковую сторону треугольника.

Найти площадь четырехугольника, отсекаемого прямой от данного треугольника. В ответе запишите S, где S — целая часть числа *S*, при $\alpha = 45^{\circ}$, $\beta = 30^{\circ}$, $b = 5$.

Ответ: 5.

▹ **5.** Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа, делящиеся на 11, которые при делении на 4, 5, 6, 7 и 8 дают одинаковые остатки 3. В ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим найденными числами.

Ответ: 83160.

▹ **6.** Прямая *OA*, где *O* — центр вписанной окружности треугольника *ABC*, пересекает сторону *BC* в точке *D*. Периметр треугольника в три раза больше одной из его сторон. Найти радиус *R* описанной окружности треугольника *ABC*, если известно, что самая длинная сторона равна 7 и $OD : OA = 1 : 4$. В ответе запишите значение $6R^2$.

Ответ: 98.

▹ **7.** Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый ее член положительный, в 51 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме ее последних шести членов.

Ответ: 12.

▹ **8.** Известный гроссмейстер Бендер О.И. дал сеанс одновременной игры в шахматы на нескольких досках. В течение первых 2 часов он выиграл 55 % партий, но проиграл 15. За последующие 2 часа он из оставшихся партий выиграл 35 %, 13 партий проиграл и несколько партий закончил вничью. Найдите наименьшее значение $n + d$, где n — количество партий, сведенных вничью, а d — число досок, на которых проходил сеанс.

Ответ: 365.

▹ **9.** Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями на отрезке $0;3$ функции, которая при всех допустимых значениях *x* удовлетворяет равенству $f(x)+2f(1-x)=x^2$. Ответ запишите в виде несократимой обыкновенной дроби.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

▹ **10.** Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 11 натуральных чисел от 1 до 35 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 30940.

11 класс

Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▹ **1.** Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 23$, $a_2 = 24$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\dfrac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Найдите $a_{100} + a_{101} + \ldots + a_{105}$.

Ответ: 36.

▹ **2.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{2x^2 + 3x + 16} \leqslant 6 + \sqrt{x + 4}$.

Ответ: 5.

▹ **3.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1 + \cos 2x + \sin 2x = a \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ имеет на отрезке $\ 0; 2\pi\ $ ровно три решения. В ответе запишите сумму квадратов всех найденных значений a.

Ответ: 16.

▹ **4.** Пусть $\alpha = -\sqrt{\ 40\sqrt{2} - 57|} + \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ и $\beta = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ — корни некоторого приведенного многочлена $P_n\ \ x$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите $n \cdot P_n\ \ n^2 + 1\ $.

Ответ: –10.

▹ **5.** Велосипедист выехал из точки A точно в полдень и спустя 2 часа 30 минут прибыл в пункт B. В 12 часов 30 минут из A вслед за велосипедистом выехал автомобиль. Найти время его прибытия в пункт B, если известно, что это случилось спустя 40 минут после того, как он обогнал велосипедиста. Если время прибытия находится неоднозначно, то в ответе укажите разность между наибольшим и наименьшим найденными значениями в минутах.

Ответ: 40.

▹ **6.** Площадь трапеции *ABCD* равна *S*. Основание *AB* в семь раз длиннее основания *CD*. На стороне *AD* выбрана точка *K* такая, что площадь треугольника *ABK* в два раза меньше площади треугольника *BCK*. Найти площадь треугольника *CDK*, если $S = 2240$.

Ответ: 182.

▹ **7.** Найдите наибольшее и наименьшее шестизначные числа *M* и *m*, кратные 13, которые при делении на 3, 4, 5, 6, 7 дают остаток 2. В ответе запишите разность $M - m$.

Ответ: 895440.

▹ **8.** Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый ее член положительный, в 51 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме ее последних шести членов.

Ответ: 12.

▹ **9.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость *CPQ*, где *P* — середина ребра A_1B_1, а *Q* — центр грани *ABCD*. В каком отношении $\dfrac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объем куба? В ответе запишите $10 \cdot \dfrac{m+n}{|m-n|}$.

Ответ: 24.

▹ **10.** Назовем множество чисел *X* симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число *m* так, что для любого элемента *x* из множества *X* число $2m - x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 5 натуральных чисел от 1 до 80 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 19760.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант

▹ **1.** Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 24$, $a_2 = 23$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\frac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x. Какое наименьшее и наибольшее значение может достигать сумма четырех подряд членов этой последовательности? В ответе запишите сумму найденных значений.

Ответ: 67.

▹ **2.** Найдите среднее арифметическое всех целых x, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{2x^2 - x + 1} \leqslant 2 + \sqrt{x+1}$.

Ответ: 1.

▹ **3.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1 - \cos 2x + \sin 2x = a\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ровно три решения. В ответе запишите разность квадратов между наибольшим и наименьшим найденными значениями a.

Ответ: 4.

▹ **4.** Пусть $\alpha = \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50}$ — корень некоторого приведенного многочлена $P_n\ \ x$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите значение $-n \cdot P_n\ \ -n$.

Ответ: 21.

▹ **5.** В 6 часов утра из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Спустя некоторое время вслед за ним выехал автомобиль. Через 1 час он догнал мотоцикл. Найти время T прибытия мотоциклиста в B, если известно, что это случилось через 1 час после того, как его догнал автомобиль, а автомобиль прибыл в B в 8 часов 10 минут. В ответе укажите значение 12 T.

Ответ: 102.

▹ **6.** В окружность радиуса 4 вписан прямоугольный треугольник площади $8\sqrt{3}$. Биссектрисы углов треугольника пересекают эту окружность в точках *A, B* и *C*. Найти площадь *S* треугольника *ABC*. В ответе записать $S-12\ ^{4}$.

Ответ: 2304.

▹ **7.** Найдите наибольшее и наименьшее шестизначные числа *M* и *m*, кратные 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 13 дают остаток 1. В ответе запишите разность $M-m$.

Ответ: 889980.

▹ **8.** Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{10}$. Определить ее первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $\ 10;12\ $, и существует число *n* такое, что отношение суммы первых $n+1$ членов прогрессии к сумме последующих *n* членов равно $\frac{n}{n+1}$. В ответе записать $20a_1$.

Ответ: 210.

▹ **9.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость *PQR*, где *P, Q, R* – центры граней BB_1C_1C, CC_1D_1D, *ABCD*. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость поверхность куба? В ответе запишите $12\cdot\frac{m+n}{|m-n|}$.

Ответ: 20.

▹ **10.** Назовем множество чисел *X* симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число *m* так, что для любого элемента *x* из множества *X* число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 7 натуральных чисел от 1 до 55 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 38025.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

▹ **1.** Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 24$, $a_2 = 23$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\dfrac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Найдите $a_{2000} + a_{2001} + \ldots + a_{2005}$.

Ответ: 24.

▹ **2.** Найдите сумму всех решений уравнения
$$\frac{2x^2 - x - 1 + \ x+1 \ \sqrt{2x^2 - 3x - 2}}{x^2 - x - 2 + \ x-1 \ \sqrt{2x^2 - 3x - 2}} = \frac{2x+1}{3\sqrt{2}}.$$

Ответ: 1.

▹ **3.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1 + \cos 2x - \sin 2x = a \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ имеет на отрезке $\ 0; 2\pi\ $ ровно три решения. В ответе запишите квадрат суммы всех найденных значений a.

Ответ: 8.

▹ **4.** Пусть $\alpha = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}} + \sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}}$ — корень некоторого приведенного многочлена $P_n\ x\ $ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите $n \cdot P_n\ -n\ $.

Ответ: 38.

▹ **5.** Из некоторого пункта выехали велосипед и через 20 минут вслед за ним автомобиль и мотоцикл. Автомобиль, догнав велосипед, мгновенно повернул обратно и спустя 2 минуты встретил мотоцикл. Скорости мотоцикла и велосипеда равны 50 и 25 км/ч. Найти скорость автомобиля V в км/ч. Если решений несколько, то в ответе запишите сумму всех найденных значений V.

Ответ: 225.

▹ **6.** Площадь трапеции *ABCD* равна *S*. Основание *BC* в пять раз короче основания *AD*. На стороне *AB* выбрана точка *M* такая, что площадь треугольника *ADM* в два раза больше площади треугольника *CDM*. Найти площадь треугольника *BCM*, если $S = 1300$.

Ответ: 50.

▹ **7.** Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа *M* и *m*, кратные 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 13 дают остаток 1. В ответе запишите разность $M - m$.

Ответ: 87360.

▹ **8.** Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый ее член положительный, в 15 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме ее последних шести членов.

Ответ: 16.

▹ **9.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость *APQ*, где *P* и *Q* – середины ребер B_1C_1 и C_1C. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объем куба? В ответе запишите $11 \cdot \frac{m+n}{|m-n|}$.

Ответ: 33.

▹ **10.** Назовем множество чисел *X* симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число *m* так, что для любого элемента *x* из множества *X* число $2m - x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 9 натуральных чисел от 1 до 44 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 52668.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▹ **1.** Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 24$, $a_2 = 23$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\frac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x. Какое наименьшее и наибольшее значение может достигать сумма пяти подряд членов этой последовательности? В ответе запишите сумму найденных значений.

Ответ: 73.

▹ **2.** Найдите сумму всех решений уравнения
$$\frac{2x^2-3x+\ 2-x\ \sqrt{2x^2-x-3}}{x^2-x-2-x\sqrt{2x^2-x-3}}=\frac{3-2x}{3\sqrt{2}}.$$

Ответ: 2.

▹ 3**.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1-\cos 2x-\sin 2x = a\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$ ровно три решения. В ответе запишите сумму квадратов всех найденных значений a.

Ответ: 16.

▹ **4.** Пусть $\alpha = 5+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ — корень некоторого приведенного многочлена $P_n\ x$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите $n \cdot P_n\ \ -n$.

Ответ: 74.

▹ **5.** Из некоторого пункта выехали мотоцикл и через 20 минут вслед за ним автомобиль и велосипед. Когда автомобиль догнал мотоцикл, мотоцикл мгновенно повернул обратно и спустя 45 минут встретил велосипед. Скорости автомобиля и велосипеда равны 60 и 15 км/ч. Найти скорость мотоцикла V [км/ч].

Ответ: 45.

$\triangleright$ **6.** В окружность радиуса 2 вписан прямоугольный треугольник площади 4. Биссектрисы углов треугольника пересекают эту окружность в точках *A, B* и *C*. Найти площадь *S* треугольника *ABC*.

Ответ: 64.

$\triangleright$ **7.** Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа *M* и *m*, кратные 13, которые при делении на 3, 4, 5, 6, 7 дают остаток 2. В ответе запишите разность $M-m$.

Ответ: 81900.

$\triangleright$ **8.** Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{9}$. Определить ее первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $12;15$ и существует число n такое, что отношение суммы первых n членов прогрессии к сумме последующих $n-1$ членов равно $1-\frac{1}{n}$. В ответе записать $2025a_1$.

Ответ: 27000.

$\triangleright$ **9.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость *PQR*, где *P, Q, R* — центры граней BB_1C_1C, CC_1D_1D и *ABCD*. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объем куба? В ответе запишите $10\cdot\frac{m+n}{|m-n|}$.

Ответ: 15.

$\triangleright$ **10.** Назовем множество чисел *X* симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число *m* так, что для любого элемента *x* из множества *X* число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 11 натуральных чисел от 1 до 33 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 20384.

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

Каждое из заданий заключительного тура могло быть максимально оценено в 10 баллов. От участников требовалось предоставить полное решение.

5 класс

▹ **Задача 1.** Имеется 2025 яблок. Имеются весы, с помощью которых можно узнать вес любых двух яблок. Как за 1014 взвешиваний узнать общий вес всех яблок?

Решение. Так как число яблок нечетно, их не получится разбить на пары. Определим сначала вес каких-то трех яблок. Взвесим яблоки 1 и 2, потом 2 и 3, затем 1 и 3. Сложим полученные веса и разделим на два, ведь каждое из этих яблок мы взвешивали дважды. Нам понадобилось 3 взвешивания. Оставшиеся 2025 – 3 = 2022 яблока разобьем на пары и взвесим парами. Еще 1011 взвешивания. Итого понадобится 1014.

Ответ: 1014.

▹ **Задача 2.** Четыре землекопа за четыре часа выкопали четыре ямы. Сколько ям выкопают 24 землекопа за два с половиной часа?

Решение. Бригада из 4 землекопов выкапывает 4 ямы, а, значит, за 1 час они выкапывают одну яму. Следовательно, 24 землекопа за 1 час выкапывают 6 ям, а 2,5 часа – 15 ям.

Ответ: 15.

▹ **Задача 3.** За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 458. Как за несколько ходов получить число 14? Укажите по крайней мере две цепочки решения изменяя от 458 до 14 так, чтобы все внутренние числа были различны.

Решение. 1) $458 \Rightarrow 45 \Rightarrow 90 \Rightarrow 180 \Rightarrow 360 \Rightarrow 720 \Rightarrow 1440 \Rightarrow 144 \Rightarrow 14$
2) $458 \Rightarrow 916 \Rightarrow 1832 \Rightarrow 3664 \Rightarrow 7328 \Rightarrow 7732 \Rightarrow 73 \Rightarrow 7 \Rightarrow 14$.

▹ **Задача 4.** Газету 8 раз сложили пополам (поочередно вдоль и поперек), после чего оторвали от нее 4 угла. Если теперь развернуть газету, то сколько в ней будет дырок? (Оторванный кусок на границе газеты дыркой не считается.)

Решение. Газету сгибали 4 раза вдоль и 4 раза поперек. С каждым сгибом число частей, на которые газета делится этими сгибами, удваивается. Поэтому если газету согнуть 4 раза в одном направлении, то газета разделится на $2^4 = 16$ частей, а число сгибов (промежутков между частями) будет на один меньше, т.е. 15. Значит, в нашем случае всего получилось 15 продольных сгибов и 15 поперечных. На пересечении каждых двух сгибов будет дырка. Всего получается $15^2 = 225$ дырок.

Ответ: 225.

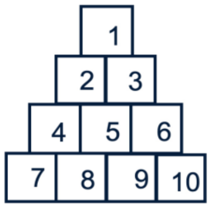
▹ **Задача 5.** Разложите на два последовательных натуральных множителя число 44442222.

Решение.

$$44442222 = 2 \cdot 22221111 = 2(2 \cdot 1111 \cdot 10000 + 1111) = (1111 \cdot 20001) \cdot 2 = 3333 \cdot 6667 \cdot 2;$$

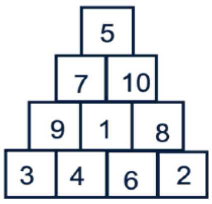
$$44442222 = 2(2 - 11110000 + 1111) = 2 \cdot 11111 \cdot 20001 = 2 \cdot 1111 \cdot 3 \cdot 6667 = 6666 \cdot 6667.$$

▹ **Задача 6.** Переложите пирамиду из 10 кубиков так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.



Решение.

Возможное расположение кубиков показано на рисунке. Ключевой момент в решении состоит в том, что кубик 3 нужно поставить в угол.



▹ **Задача 7.** Девять одинаковых воробьев склевали меньше, чем 1001 зернышко, а десять таких же воробьев склевали больше, чем 1100 зернышек. По сколько зернышек склевывает каждый воробей?

Решение. По условию $9n$ меньше 1001 или $n < 111\frac{2}{9}$, но $10n$ больше 1100 или $n > 110$. Только $n = 111$ удовлетворяет этим условиям.

Ответ: 111.

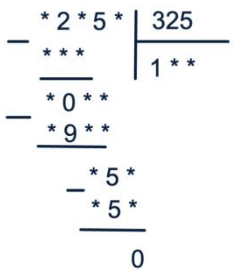
▹ **Задача 8.** Настенные часы с часовой и минутной стрелками нельзя заводить, если хотя бы одна из стрелок находится между 3 и 4 или между 8 и 9. Сколько в сутках времени, когда эти часы можно заводить?

Решение. В каждом часе есть 5 мин, когда минутная стрелка находится между 3 и 4, и 5 мин, когда она находится между 8 и 9. Значит, всего в сутках $24 \cdot 10$ мин времени, когда часы нельзя заводить из-за минутной стрелки. Теперь посчитаем, сколько времени мешает заводу часовая стрелка. За сутки стрелка обходит два полных круга. Из каждых 12 часов она в течение одного часа находится между 3 и 4 и еще один час она находится между 8 и 9, однако в каждом из этих часов мы уже учли 10 мин, когда заводу препятствует минутная стрелка. Поэтому в сутках получается $2 \cdot 2 \cdot 50$ мин времени, когда часы нельзя заводить исключительно из-за часовой стрелки. Подводим итог: $24 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 50$ = 440 мин = 7 ч 20 мин.

24 ч – 7 ч 20 мин = 16 ч 40 мин.

Ответ: 16 ч 40 мин.

▹ **Задача 9.** Восстановите действие:



Решение. Заметим, что если мы восстановим две цифры в частном, то сможем посчитать делимое и, значит, восстановить все действия при делении уголком. Последняя цифра частного должна быть такой, чтобы при умножении на 325 получалось трехзначное число с цифрой 5 в середине. Попадает только 2. Итак частное имеет вид 1*2. Теперь восстановим последние цифры в третьей и четвертой строках на рисунке. Ясно, что в третьей строке стоит цифра 5 (она сносится из первой строки), а в четвертой строке может быть только 0, чтобы при вычитании получилась последняя цифра 5. Наконец, можно восстановить вторую цифру в частном, которая при умножении на 325 должна давать четырехзначное число вида *9*0. Проверяем цифры 4, 6 и 8. Подходит только 6. Стало быть, частное равно 162.

Ответ: 52650:325 = 162.

▹ **Задача 10.** Жители города А – правдолюбцы, города Б – лжецы. По дороге из А в Б жители обоих городов поставили указатели, на которых по направлению своего города написали «Путь в город А». Какой единственный вопрос надо задать случайному прохожему (жителю одного из этих городов), чтобы, получив ответ «да» или «нет», узнать направление в город А?

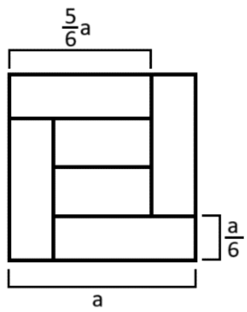
Решение. Надо задать незнакомцу вопрос, показывая на любой из двух указателей: «Этот указатель показывает направление в ваш город?» Если указатель показывает направление в город А, то правдолюбец ответит «да», и лжец ответит «да». Если же указатель ведет в город Б, то правдолюбец ответит «нет», и лжец ответит «нет».

6 класс

▹ **Задача 1.** Разрежьте квадрат на 6 прямоугольников, необязательно одинаковых, каждый из которых имеет периметр, равный полупериметру исходного квадрата.

Решение.

Способ разрезания показан на рисунке. Пусть сторона квадрата равна a. Четыре прямоугольника по краям размера $\frac{5}{6}a \times \frac{a}{6}$. Два прямоугольника в центре размера $\frac{2a}{3} \times \frac{a}{3}$.



Расчет периметров:

$P_1 = 2\left(\frac{5}{6}a + \frac{1}{6}a\right) = 2a$, $P_2 = 2\left(\frac{a}{3} + 2\frac{a}{3}\right) = 2a$.

▹ **Задача 2.** Сколько картин написал художник Говядин за месяц, если на 44 % из них изображены горы, на 36 % изображено море, на 10 % — и море, и горы, а на 162 картинах — ни море, ни горы и не пойми что?

Решение. Пусть художник написал x картин. Тогда море или горы изображены на $0,44 + 0,36 - 0,1\ x = 0,7x$ картинах. Получается: $0,7x + 162 = x$, откуда $x = 540$.

Ответ: 540.

▹ **Задача 3.** Вычислите, с учетом того, что двоек в записи 2025:

$$\cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{\cdots}{2 - \cfrac{1}{2}}}}}}$$

Решение. Заметим, что $\dfrac{1}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{2-\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{2-\frac{3}{4}}=\dfrac{4}{5}$, и вообще, если на предыдущем шаге было $\dfrac{n}{n+1}$, то на следующем будет $\dfrac{1}{2-\frac{n}{n+1}}=\dfrac{n+1}{n+2}$ (по индукции). Поэтому, если в выражении содержится n двоек, то оно равно $\dfrac{n}{n+1}$. Если $n=2025$, то $\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{2025}{2026}$.

Ответ: $\dfrac{2025}{2026}$.

▹ **Задача 4.** Андрей записал на доску два натуральных числа. После этого он стал по очереди записывать на доску то НОД, то НОК (сначала НОД) двух последних записанных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть записано на доске?

Решение. Пусть a_1, a_2 – первые записанные числа. Тогда a_3 = НОД (a_1, a_2), поэтому a_2 делится на a_3, и потому a_4 = НОК $(a_3, a_2)=a_2$. Теперь найдем a_5 = НОД (a_3, a_4) = НОД (a_3, a_2) = a_3, и так далее. Получаем, что любой член начиная с a_2 равен либо a_2, либо a_3. Поэтому больше трех различных чисел в последовательности быть не может. Три различных числа можно получить, если изначально на доске будут записаны, например $a_1=4$, $a_2=6$, тогда $a_3=2$.

Ответ: Три числа.

▹ **Задача 5.** Прямоугольник 5×9 разрезали на 10 прямоугольников с целочисленными сторонами. Докажите, что среди них обязательно найдутся два одинаковых.

Решение. Предположим, что все 10 прямоугольников различны. Покажем, что в этом случае сумма их площадей больше площади прямоугольника 5×9. Рассмотрим самые маленькие по площади прямоугольники:

1 клетка: 1×1

2 клетки: 1×2

3 клетки: 1×3

4 клетки: 1×4, 2×2

5 клеток: 1×5

6 клеток: 1×6, 2×3

7 клеток: 1×7

8 клеток: 1×8, 2×4

Отсюда ясно, что наименьшая возможная сумма площадей 10 различных прямоугольников равна $1+2+3+4+4+5+6+6+7+8=46>45=5\times 9$. Полученное противоречие доказывает, что должны быть одинаковые прямоугольники.

▹ **Задача 6.** Найдите такие 2025 натуральных числа, чтобы их сумма равнялась их произведению.

Решение. $2025, 2, 1, 1, \ldots, 1$

▹ **Задача 7.** Найдите угол между часовой и минутной стрелками в 10 часов 40 минут 9 февраля 2025 года.

Решение.

1) $360^\circ : 12 = 30^\circ$ — проходит часовая стрелка за 1 час;

2) $30^\circ \cdot 10 = 300^\circ$ — пройдет часовая стрелка за 10 часов;

3) $\dfrac{30^\circ \cdot 40^\circ}{60^\circ} = 20^\circ$ — пройдет часовая стрелка за 40 мин;

4) $300^\circ + 20^\circ = 320^\circ$ — пройдет часовая стрелка за 10 ч 40 мин;

5) $360^\circ : 60 = 6^\circ$ – проходит минутная стрелка за 1 мин;

6) $6^\circ \cdot 40 = 240^\circ$ – пройдет минутная стрелка за 40 мин;

7) $320^\circ - 240^\circ = 80^\circ$ — между часовой и минутной стрелками в 10 ч 40 мин.

Ответ: 80°.

▹ **Задача 8.** У Змея Горыныча 2025 голов. Иван-царевич может срубить ему одним ударом меча 21, 17 или 1 голову, но при этом у него вырастает взамен 0, 14, 49 голов соответственно. Если отрублены все головы, то новых голов не вырастает. Сможет ли Иван-царевич одолеть Змея Горыныча?

Решение. Например, так: Иван-царевич может рубить по 17 голов 3 раза. После каждого удара число голов у Змея Горыныча уменьшается на три. Поэтому после 3-го удара у него останется $2025-3\cdot 3=2016$ голов. Следующими 96 ударами, срубая по 21 голове, можно срубить 2016 голов.

Ответ: Да, сможет.

▹ **Задача 9.** Два мотоциклиста одновременно выехали из Кинеля в Безенчук. Первый весь путь ехал со скоростью 25 км/ч, а второй первую половину пути ехал со скоростью 30 км/ч, а вторую половину – со скоростью 20 км/ч. Кто из них раньше прибыл в Безенчук?

Решение. Второй мотоциклист 1 км первой половины пути проезжал за 2 мин, а 1 км второй половины пути – за 3 мин. Значит, средняя скорость второго мотоциклиста – 2 км за 5 минут, или $\frac{2\cdot 60}{5}=24$ (км/ч). Таким образом, первым в Безенчук приедет первый мотоциклист.

▹ **Задача 10.** Найдите два числа, сумма которых равна 2025, а наибольший общий делитель равен 225. В ответе приведите все возможные варианты.

Решение. Если НОД a, b = 225, то $a=225k, b=225n,$ НОД k, n = 1, где k, n – целые числа. Следовательно, $225k+225n=2025$, то есть $k+n=9$. Так как k и n – взаимно простые числа, то возможны следующие варианты:

1) $k=1, n=8, a=225, b=1800$;

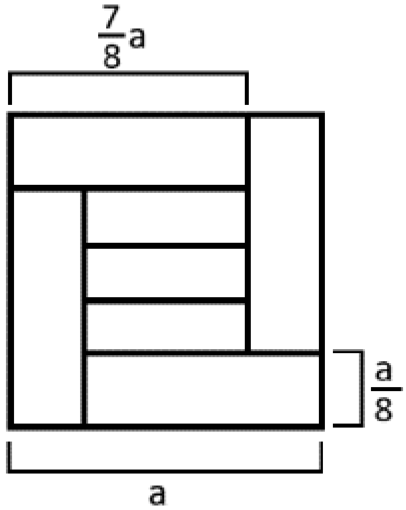
2) $k=2, n=7, a=450, b=1575$;

3) $k=4, n=5, a=900, b=1125$.

Ответ: 225,1800 ; 450,1575 ; 900,1125 .

7 класс

▹ **Задача 1.** Разрежьте квадрат на 7 прямоугольников, необязательно одинаковых, каждый из которых имеет периметр, равный полупериметру исходного квадрата.



Решение.

Способ разрезания показан на рисунке. Пусть сторона квадрата равна a. Четыре прямоугольника по краям размера $\frac{7}{8}a \times \frac{a}{8}$. Три прямоугольника в центре размера $\frac{3}{4}a \times \frac{a}{4}$. Расчет периметров:

$P_1 = 2a = 2\left(\frac{7}{8}a + \frac{1}{8}a\right) = 2a$, $P_2 = 2\left(\frac{3}{4}a + \frac{a}{4}\right) = 2a$.

▹ **Задача 2.** Разложите на множители $2025x^4 - 2024x^3 + 2025x^2 + 1$.

Решение.

$$2025x^4 - 2024x^3 + 2025x^2 + 1 = 2025\left(x^4 - x^3 + x^2\right) + x^3 + 1 =$$

$$= 2025x^2\left(x^2 - x + 1\right) + \left(x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right) = \left(x^2 - x + 1\right)\left(2025x^2 + x + 1\right).$$

▹ **Задача 3.** Андрей записал на доску два натуральных числа. После этого он стал по очереди записывать на доску то НОК, то НОД (сначала НОК) двух последних записанных чисел. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть записано на доске?

Решение. Пусть a_1, a_2 – первые записанные числа. Тогда $a_3 = \text{НОК}\left(a_1, a_2\right)$, поэтому a_2 делится на a_3, и потому $a_4 = \text{НОД}\left(a_3, a_2\right) = a_2$. Теперь $a_5 = \text{НОК}\left(a_3, a_4\right) = \text{НОК}\left(a_3, a_2\right) = a_3$. Далее, получаем, что любой член, начиная с a_2 равен либо a_2, либо a_3. Поэтому больше трех различных чисел в последовательности быть не может. Три различных числа можно получить, если изначально на доске будут записаны, например $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, тогда $a_3 = 12$.

Ответ: Три числа.

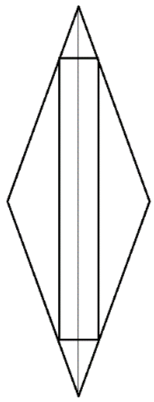
▹ **Задача 4.** На доске записывают последовательность чисел $1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, \ldots$, полученную по формуле $a_{n+1} = a_n + S(a_n)$, $S(a)$ – сумма цифр числа a, $a_1 = 1$. Будет ли на доске записано число $N = 2025202420232022$?

Решение. Пусть a_n дает при делении на 3 остаток 1, сумма цифр $S(a_n)$ дает такой же остаток, поэтому a_{n+1} при делении на 3 дает остаток 1 + 1 = 3. Если a_n дает остаток 2, то a_{n+1} дает остаток 1, т.к. 2 + 2 = 4≡ 1 (mod 3). Поскольку $a_1 = 1$, мы будем получать остатки, образующие последовательность $1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$. Сумма цифр числа *N* равна 30, оно делится на 3 и не может быть членом последовательности a_n .

Ответ: Число *N* на доске записано не будет.

▹ **Задача 5.** Существуют ли два таких выпуклых четырехугольника, что один расположен внутри другого и при этом сумма диагоналей внутреннего четырехугольника больше суммы диагоналей внешнего?

Решение. Рассмотрим ромб с диагоналями d и $10d$ и поместим внутрь него прямоугольник со сторонами, параллельными диагоналям ромба. Пусть большая сторона прямоугольника равна $9d$ а меньшая подобрана таким образом, чтобы прямоугольник не «вылезал» за пределы ромба. Тогда сумма диагоналей ромба равна $d + 10d = 11d$, а в прямоугольнике каждая диагональ больше его стороны $9d$, и поэтому сумма его диагоналей больше $9d + 9d > 11d$.



Задача 6. Числа 12, 14, 37, 65 представляют одно из решений уравнения $xy - xz + yt = 182$. Определить, значением какой буквы является каждое из данных чисел.

Решение. Данное уравнение представим в виде $x\ y - z\ + yt = 2 \cdot 7 \cdot 13$. Отсюда следует, что при $x = 14$ число y должно делиться на 7. Но это невозможно, так как ни одно из остальных трех чисел не делится на 7. Следовательно $x\neq 14$. Аналогично убеждаемся, что $x\neq 65$. Записав данное уравнение в виде $y\ \ x+t\ \ -t=2\cdot 7\cdot 13$, найдем, что $y\neq 14$, $y\neq 65$. Следовательно, значениями x и y являются числа 12 и 37. Тогда $xy=12\cdot 37=444$, и данное уравнение примет вид $xz-yt=262$. Одно из чисел x и y – четное, поэтому хотя бы одно из чисел yt и xz также четное. Но тогда из уравнения $xz-yt=262$ следует, что другое произведение тоже четно. Поэтому произведения yt и xz могут иметь лишь значения $12\cdot 65$ и $37\cdot 14$. Но $xz=yt+262>yt$. Следовательно, большее из чисел $12\cdot 65$ и $37\cdot 14$ есть xz. Отсюда $xz=12\cdot 65$, $yt=37\cdot 14$. Сопоставляя эти равенства с $xy=12\cdot 37$, находим $x=12$, $y=37$, $z=65$, $t=14$.

▹ **Задача 7.** Прямоугольник 7×10 разрезали на 13 прямоугольников с целочисленными сторонами. Докажите, что среди них обязательно найдутся два одинаковых.

Решение. Предположим, что все 13 прямоугольников различны. Покажем, что в этом случае сумма их площадей больше площади прямоугольника 5×9. Рассмотрим самые маленькие по площади прямоугольники:

1 клетка: 1×1
2 клетки: 1×2
3 клетки: 1×3
4 клетки: 1×4, 2×2
5 клеток: 1×5
6 клеток: 1×6, 2×3
7 клеток: 1×7
8 клеток: 1×8, 2×4
9 клеток: 1×9, 3×3
10 клеток: 1×10, 2×5
11 клеток: 1×11
12 клеток: 1×12, 2×6, 3×4
13 клеток: 1×13

Отсюда ясно, что наименьшая возможная сумма площадей 13 различных прямоугольников равна $72 > 70 = 7 \cdot 10$ – площади исходного прямоугольника. Полученное противоречие доказывает, что найдутся одинаковые прямоугольники.

▹ **Задача 8.** В ожесточенном сражении при Трафальгаре 70 % участников потеряли глаз, 75 % – ухо, 80 % – руку, 85 % – ногу. Каков наименьший процент числа ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Решение. Из условия следует, что 30 % участников не потеряли глаз, 25 % не потеряли ухо, 20 % остались с руками и 15 % остались с ногами. Значит, число участников, которые сохранили глаз или ухо, или руку, или, на худой конец, ногу, не может превышать 30 % + 25 % + 20 % + 15 % = 90 %. Следовательно, число ветеранов, оставшихся одновременно без глаза, уха, руки и ноги не меньше 10 %. Причем, этот процент может достигаться, только если упомянутые множества из 30 %, 25 %, 20 % и 15 % не пересекаются, т. е. каждый из них сохранил только одну часть тела, а три другие потерял.

Ответ: 10 %.

▹ **Задача 9.** Найти все такие пары натуральных чисел a и b, для которых выполняется такое равенство:

$$\text{НОК}(a,b) - \text{НОД}(a,b) = \frac{ab}{7}.$$

Решение. Обозначим $\text{НОК}(a,b) = x$, $\text{НОД}(a,b) = y$, тогда $ab = xy$, и данное равенство будет иметь вид $x - y = \dfrac{xy}{7}$.

Преобразовав его, получим $(7-y)(7+x) = 49$, где $x, y \in N$. Поскольку $7 - y$ – делитель 49, то $y = 6$ и $x = 42$ и, следовательно $a = 6$ и $b = 42$ или $b = 6$ и $a = 42$.

Ответ: $(6,42)$ и $(42,6)$.

▹ **Задача 10.** Известно, что при некотором натуральном n число n^2+n+9 делится на 7. Каким будет остаток от деления этого числа на 49?

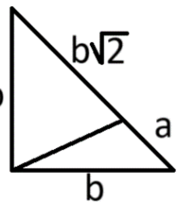
Решение. По условию число $(n-3)^2+7n$ делится на 7, поэтому $(n-3)^2$ делится на 7 и, следовательно, $n-3$ делится на 7. Итак, $n=7k+3$. Тогда $(n-3)^2+7n=49k^2+49k+21$.

Ответ: 21.

8 класс, Азия

▹ **Задача 1.** С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, если известна сумма стороны квадрата и его диагонали.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева*



Пусть сторона квадрата a, тогда диагональ $a\sqrt{2}$. По условию известен отрезок $b = a(\sqrt{2}+1)$. Отсюда, $a = b\sqrt{2} - b$.

▹ **Задача 2.** В профсоюзе пиратов "Карамба" состоят 2025 морских разбойников. У 1420 из них есть хотя бы одно ухо, у 1057 – глаз, а у 695 счастливчиков есть и ухо, и глаз. Профсоюз решил, что члены профсоюза, которые не имеют ни уха, ни глаза, отправляются на пенсию. Сколько претендентов в профсоюзе на получение пенсии?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева*

Глаз или ухо есть у 1420 + 1057 – 695 = 1782 пиратов. Значит, у 2025 – 1782 = 243 нет ни уха, ни глаза.

Ответ: 243.

▹ **Задача 3.** Даны три числа. Если их все увеличить на 3, то произведение увеличится на три, если на 5, то произведение увеличится на пять. На сколько изменится произведение, если исходные числа увеличатся на 7?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

$$x+a \quad y+a \quad z+a \; - xyz = a^3 + a^2 \;\; x+y+z \;\; + a \;\; xy+yz+zx \;\; .$$

$$\begin{cases} 3 \;\; xy+yz+zx \;\; + 9 \;\; x+y+z \;\; + 27 = 3, \\ 5 \;\; xy+yz+zx \;\; + 25 \;\; x+y+z \;\; + 125 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+yz+zx+3\ \ x+y+z\ \ =-8, \\ xy+yz+zx+5\ \ x+y+z\ \ =-24. \end{cases}$$

Отсюда $x+y+z=-8$, $xy+yz+zx=16$. Произведение изменяется на a^3-8a^2+16a, при $a=7:343-8\cdot 49+16\cdot 7=63$.

Ответ: Увеличится 63.

▹ **Задача 4.** На доске записано число 2025. За один ход Андрей может произвольным образом разбить одно из записанных на доске чисел на два числа, умножить одно из этих чисел на 11, а другое — на 29, а затем сумму получившихся чисел записать на доску (например, из 2025 можно сначала разбить на числа 20 и 25, а на доску записать $20\cdot 11+25\cdot 29$ и $20\cdot 29+25\cdot 11$). Может ли после нескольких ходов Андрей записать число 20222025?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Посмотрим, как изменяется остаток числа от деления на 9. Пусть какое-то из записанных на доске чисел n Андрей разбил на a и b, то есть $n=\overline{ab}$. Тогда $n\equiv a+b$ (mod 9). Мы записываем на доску число $11a+29b$ или $29a+11b$, каждое из которых сравнимо с $2a+2b=2(a+b)$ по модулю 9. Таким образом, остаток числа после применения хода умножается на 2. Тогда, если исходное число делилось на 9, то любое записанное на доске будет делиться на 9. Число 20222025 имеет остаток 5 при делении на 9, то есть на 9 не делится. Следовательно, оно не могло быть записано.

Ответ: Не может.

▹ **Задача 5.** Сколько существует несократимых дробей с числителем 2025, больших $\dfrac{1}{2025}$, но меньших $\dfrac{1}{2024}$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Найдем общее количество дробей (в том числе и сократимых):

$\dfrac{1}{2025}<\dfrac{2025}{N}<\dfrac{1}{2024}$, $\quad \dfrac{2025}{2025^2}<\dfrac{2025}{N}<\dfrac{2025}{2024\cdot 2025}$, $\quad 2024\cdot 2025<N<2025^2$, $4098600<N<4100625$. Количество целых чисел $4100624-4098601+1=2024$. Дробь $\dfrac{2025}{N}$ будет несократимой, если НОД $\textit{НОД}\ \ 2025, N\ \ =1$. Разложим 2025 на простые множители $2025=3^4\cdot 5^2$. Крайние числа, делящиеся на 3 – 4098603 и 4100622. Количество чисел, делящихся на 3, равно $n_3=\dfrac{4100622-4098600}{3}=1366874-1366200=674$.

Аналогично, делящихся на 5 чисел N всего $\dfrac{4100620-4098600}{5}=820124-819720=404$. Дважды посчитаны числа N, делящиеся на $15=\text{НОК}\ \ 3,5\ \ $. Их количество равно $\dfrac{4100610-4098600}{15}=273374-273240=134$. В итоге, чисел N от 4098601 до 4100624 включительно, которые делятся либо на 3, либо на 5, имеется 674 + 404 – 134 = 944 штуки. Столько же существует и сократимых дробей.

Вычитая из общего количества чисел N, получаем, что всего несократимых дробей $2024-944=1080$.

Ответ: 1080.

▹ **Задача 6.** Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $\left[\dfrac{x}{2}\right]+\left[\dfrac{x}{3}\right]\geqslant[3x]\cdot\left[\dfrac{5x}{6}\right]$. Здесь $[a]$ – целая часть числа a.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Куприн А.В., старший преподаватель кафедры математического анализа МТУСИ.*

По свойству целой части сумма двух чисел имеет целую часть, не меньшую суммы целых частей слагаемых. Поэтому

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]\leqslant\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right]=\left[\frac{5x}{6}\right].$$

Если x – положительное двузначное число, то $[3x]=3x\geqslant 30$. Следовательно, $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]\leqslant\left[\frac{5x}{6}\right]<30\cdot\left[\frac{5x}{6}\right]\leqslant[3x]\cdot\left[\frac{5x}{6}\right]$, и неравенство, приведенное в условии задачи, не выполняется ни для каких положительных двузначных чисел.

Если x – отрицательное двузначное число, то неравенство не выполняется, поскольку его левая часть отрицательна, а правая положительна как произведение двух отрицательных чисел.

Итак, двузначных чисел, удовлетворяющих данному неравенству, не существует.

Ответ: 0.

▹ **Задача 7.** Известно, что 17 % числа x меньше 26 % числа y на 8 % числа $x-y$. На сколько процентов (относительно числа y) число x больше числа y?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

По условию

$$0{,}17x+0{,}08(x-y)=0{,}26y.$$

Находим: $0{,}25x=0{,}34y$, отсюда $x=1{,}36y$ или $x-y=36\%\cdot y$.

Ответ: 36.

▹ **Задача 8.** Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 20252025?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

На первом месте может стоять только 2 или 5 (если ноль, число не будет восьмизначным).

Рассмотрим случай, когда на первом месте стоит 2. На оставшиеся 7 позиций нужно расставить два 0, две 5 и три 2 в любом порядке. Это равносильно нахождению числа способов переставить буквы *AABBCCC*. Сделаем сначала все буквы разными, приписав индексы $A_1A_2B_1B_2C_1C_2C_3$. Теперь посчитаем число перестановок. Их 7!. Выпишем все 7! перестановок и сотрем индексы сначала у A_1 и A_2. Каждая перестановка будет встречаться по два раза. Останется $\frac{7!}{2}$, аналогично с B_1 и B_2. Получается $\frac{7!}{2\cdot 2}$. Теперь сотрем индексы у C_1, C_2 и C_3. Уберем повторения, останется $\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=7\cdot 6\cdot 5=210$.

Теперь рассмотрим случай, где на первом месте 5. Аналогично, на оставшиеся 7 позиций нужно расставить два 0, одну 5 и четыре 2 в любом порядке. Число перестановок в случае различных цифр 7!. Уберем повторения, останется $\frac{7!}{2!\cdot 1!\cdot 4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2}=105$.

Сложим все случаи 105+210 = 315.

Ответ: 315.

▹ **Задача 9.** Пусть *a, b, c* – стороны треугольника.

1) Докажите, что если $2a+3b>8c$, то c – наименьшая сторона этого треугольника.

2) Докажите, что если $2a+3b>7{,}9c$, то c необязательно наименьшая сторона этого треугольника.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

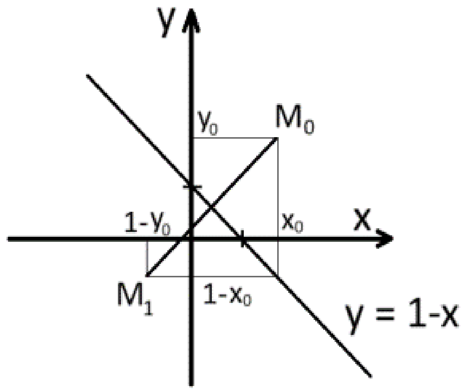
1) Докажем, что если $2a+3b>8c$, то c – наименьшая сторона. Действительно, если $c\geqslant a$, то $3b>6c+2(c-a)\geqslant 6c$, отсюда $b>2c\geqslant c+a$. Противоречие с тем, что $b<c+a$ (неравенство треугольника). Если же $c\geqslant b$, то

$2a>5c+3(c-b)\geqslant 5c$, отсюда $a>2{,}5c>b+c$. Противоречие с тем, что $a<b+c$.

2) Существует треугольник со сторонами $a=5{,}5$, $c=5{,}55$, $b=11$. Легко проверить, что $2a+3b>7{,}9c$, и при этом $c>a$.

▹ **Задача 10.** График функции $y=\dfrac{x}{23}+89$ отразили симметрично относительно прямой $y=1-x$. График какой функции получился?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*



Рассмотрим точку $M_0(x_0,y_0)$. Точка, симметричная M_0 относительно прямой $y=1-x$, имеет координаты $M_1(1-y_0;1-x_0)$.

Сделаем замену в функции $x\to 1-y$, $y\to 1-x$:

$1-x=\dfrac{1-y}{23}+89$, $\qquad y=23x-23+89\cdot 23+1$,

$y=23x+23\cdot 88+1$, $y=23x+2025$.

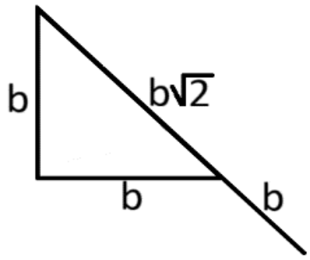
Ответ: $y=23x+2025$.

8 класс, Европа

▹ **Задача 1.** С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, если дан отрезок, равный разности диагонали квадрата и его стороны.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Пусть сторона квадрата a, тогда диагональ $a\sqrt{2}$. По условию дан отрезок $a\sqrt{2}-a=b$. Отсюда, $a=b\ \ \sqrt{2}+1$. Строим квадрат со стороной b и откладываем на продолжении его диагонали длину стороны. Получаем сторону искомого квадрата.



▹ **Задача 2.** Сколько существует целых чисел, меньших 2025 и не делящихся ни на 5, ни на 7?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Натуральных чисел, меньших 2025, всего 2024. Из них на 5 делятся $\frac{2020}{5}=404$ числа. На 7 делятся $\frac{2023}{7}=289$ чисел. При этом числа, кратные $НОК\ \ 5,7\ \ =35$, посчитаны дважды. Их $\frac{1995}{35}=57$. Значит, чисел, кратных 5 или 7 всего 404 + 289 – 57 = 636, а не делящихся ни на 5, ни на 7, имеется 2024 – 636 = 1388 штук.

Ответ: 1388.

▹ **Задача 3.** Даны три числа. Если их все увеличить на 3, то произведение увеличится на три, если на 7, то произведение увеличится на семь. На сколько изменится произведение, если исходные числа увеличатся на 5?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

$$x+a \quad y+a \quad z+a \ -xyz = a^3 + a^2 \ \ x+y+z \ \ + a \ \ xy+yz+zx \ \ .$$

$$\begin{cases} 3 \ \ xy+yz+zx \ \ +9 \ \ x+y+z \ \ = -24, \\ 7 \ \ xy+yz+zx \ \ +49 \ \ x+y+z \ \ = -336. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+yz+zx+7 \ \ x+y+z \ \ = -48, \\ xy+yz+zx+3 \ \ x+y+z \ \ = -8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \ \ x+y+z \ \ = -40, \\ xy+yz+zx-3 \ \ x+y+z \ \ = -8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z = -10, \\ xy+yz+zx = 22. \end{cases}$$

Отсюда получим, что произведение изменилось на $5 \cdot 22 - 25 \cdot 10 + 125 = -15$.

Ответ: Уменьшится на 15.

▹ **Задача 4.** На доске записано число 2025. За один ход Андрей может произвольным образом разбить одно из записанных на доске чисел на два числа, умножить одно из этих чисел на 11, а другое — на 29, а затем сумму получившихся чисел записать на доску (например, из 2025 можно сначала разбить на числа 20 и 25, а на доску записать $20 \cdot 11 + 25 \cdot 29$ и $20 \cdot 29 + 25 \cdot 11$). Может ли после нескольких ходов Андрей записать число 20222025?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Посмотрим, как изменяется остаток числа от деления на 9. Пусть какое-то из записанных на доске чисел n Андрей разбил на a и b, то есть $n = \overline{ab}$. Тогда $n \equiv a + b$ (mod 9). Мы записываем на доску число $11a + 29b$ или $29a + 11b$, каждое из которых сравнимо с $2a + 2b = 2 \ \ a + b$ по модулю 9. Таким образом, остаток числа после применения хода умножается на 2. Тогда, если исходное число делилось на 9, то любое записанное на доске будет делиться на 9. Число 20222025 имеет остаток 5 при делении на 9, то есть на 9 не делится, следовательно, оно не могло быть записано.

Ответ: Не может.

▹ **Задача 5.** Сколько существует несократимых дробей с числителем 225, больших $\frac{1}{225}$, но меньших $\frac{1}{224}$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

$\frac{1}{225} < \frac{225}{N} < \frac{1}{224}$, $224 \cdot 225 < N < 225^2$, $50400 < N < 50625$. Количество целых чисел N $50624 - 50401 + 1 = 224$.

Дробь $\frac{225}{N}$ будет несократимой, если $НОД\ \ 225, N\ \ = 1$. Разложим 225 на простые множители $225 = 3^2 \cdot 5^2$. Крайние числа, делящиеся на 3 – это 50403 и 50622. Количество чисел, делящихся на 3, равно $\frac{50622 - 50400}{3} = 74$.

Аналогично, количество N, делящихся на 5, равно $\frac{50620 - 50400}{5} = 44$. Учтем, что N, делящиеся на $НОК\ \ 3,5\ \ = 15$, посчитаны дважды. Их количество равно $\frac{50610 - 50400}{15} = 14$. Таким образом, количество чисел N от 50401 до 50624 включительно, которые делятся либо на 3, либо на 5, равно 74 + 44 – 14 = 104.

Таким образом, существует $224 - 104 = 120$ несократимых дробей с числителем 225, которые больше чем $\frac{1}{225}$ и меньше чем $\frac{1}{224}$.

Ответ: 120.

▹ **Задача 6.** Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $\left\{\frac{x}{2}\right\}+\left\{\frac{x}{3}\right\}\leqslant\left\{\frac{5x}{6}\right\}$. Здесь $\{a\}$ — дробная часть числа a.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Куприн А.В., старший преподаватель кафедры математического анализа МТУСИ.*

Рассмотрим числа вида $6n+k$, где n – натуральное число, а $k=0,1,2,3,4,5$. Получим $\left\{\frac{k}{2}\right\}+\left\{\frac{k}{3}\right\}\leqslant\left\{\frac{5k}{6}\right\}$.

Проверим выполнение этого неравенства. При $k=0,1,2,3,4$ оно превращается в равенство и, значит, верно. При $k=5$ получим $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{6}$, что неверно.

Таким образом, неравенству удовлетворяют все числа, кроме дающих при делении на 6 остаток 5.

Сумма всех двузначных чисел равна $S_1=\frac{10+99}{2}\cdot 90=109\cdot 45=4905$, сумма всех двузначных чисел, дающих при делении на 6 остаток 5, равна $S_2=\frac{11+95}{2}\cdot 15=795$. Искомая сумма $S=S_1-S_2=4905-795=4110$.

Ответ: 4110.

▹ **Задача 7.** Известно, что 20,25 % числа x меньше 23,75 % числа y и на 7,75 % числа $x-y$. На сколько процентов число x больше числа y?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

По условию $0,2025x+0,0775\ (x-y)\ =0,2375y$. Отсюда $0,28x=0,315y$, $x=1,125y=y+12,5\%y$.

Ответ: 12,5.

▹ **Задача 8.** Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 20262024?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

На первом месте может стоять только 2, 6 или 4 (если 0, число не будет восьмизначным).

Рассмотрим случай, когда на первом месте стоит 2. На оставшиеся 7 позиций нужно расставить три 2, два 0, одну 4 и одну 6 в любом порядке. Это равносильно нахождению числа способов переставить буквы *AAABBCD*. Сделаем сначала все буквы разными, приписав индексы $A_1A_2A_3B_1B_2CD$. Теперь посчитаем число перестановок. Их 7!. Выпишем все 7! перестановок и сотрем индексы сначала у A_1, A_2 и A_3. Останется $\frac{7!}{3!}$. Аналогично поступаем с B_1 и B_2. Получается $\frac{7!}{3!\cdot 2!}$. Уберем оставшиеся повторения, останется

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2} = 420.$$

Теперь рассмотрим случай, где на первом месте 4. Аналогично, на оставшиеся 7 позиций нужно расставить четыре 2, два 0 и одну 6 в любом порядке. Число перестановок в случае различных цифр 7!. Уберем повторения, останется $\frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$.

Рассмотрим оставшийся случай, где на первом месте 6. Аналогично, на оставшиеся 7 позиций нужно расставить четыре 2, два 0 и одну 4 в любом порядке. Число перестановок в случае различных цифр 7!. Уберем повторения, останется $\frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$.

Сложим все случаи 105+105+420 = 630.

Ответ: 630.

▹ **Задача 9.** Пусть *a, b, c* – стороны треугольника.

1) Докажите, что если $3a+4b>11c$, то c – наименьшая сторона этого треугольника.

2) Докажите, что если $3a+4b>10{,}99c$, то c необязательно наименьшая сторона этого треугольника.

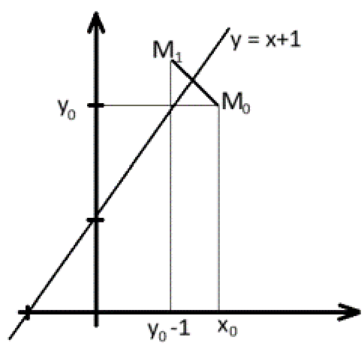
Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

1) Докажем, что если $3a+4b>11c$, то c – наименьшая сторона. Действительно, если $c \geqslant a$, то $4b>11c-3a=8c+3(c-a) \geqslant 8c$, отсюда $b>2c=c+c \geqslant c+a$. Получили противоречие с тем, что $b<c+a$ (неравенство треугольника). Если же $c \geqslant b$, то $3a>11c-4b=7c+4(c-b) \geqslant 7c$, отсюда $a>2\frac{1}{3}c>2c=c+c>b+c$. Противоречие с тем, что $a<b+c$.

2) Существует треугольник со сторонами $a=6{,}97$, $c=7{,}04$, $b=14$. Легко проверить, что $3a+4b=76{,}91>10{,}9c=76{,}736$, и при этом $c>a$.

▹ **Задача 10.** График функции $y=-\dfrac{x}{22}+93$ отразили симметрично относительно прямой $y=x+1$. График какой функции получился?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*



Рассмотрим точку $M_0\ \ x_0, y_0$. Точка, симметричная M_0 относительно прямой $y=x+1$, имеет координаты $M_1\ \ y_0-1; x_0+1$.

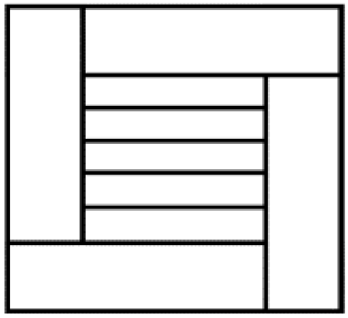
Сделаем замену в функции $x \to y-1$, $y \to x+1$: $22y+x=2046$, $22\ \ x+1\ \ +y-1=2046$, $y=-22x+1-22+2046$, $y=-22x+2025$.

Ответ: $y=-22x+2025$.

9 класс, Азия

▹ **Задача 1.** Можно ли разрезать квадрат на 9 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент.*



Способ разрезания показан на рисунке. Пусть периметр квадрата равен $P=4a$. Четыре прямоугольника с периметром

$$a-b+b \quad \cdot 2=\frac{p}{2}=2a\,.$$

Пять прямоугольников с периметром

$$\left((a-2b+\frac{a-2b}{5}\right)\cdot 2=2a\,.$$

Из этого уравнения найдем b: $\frac{6}{5}a-\frac{12}{5}b=a\,;\ \frac{a}{12}=b\,.$

Ответ: Да, можно.

▹ **Задача 2.** В десятичной записи числа $\frac{1}{14}$ вычеркнули 2025-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $\frac{1}{14}$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

Полученное число больше. Поскольку $\frac{1}{14}=0{,}0\ \ 714285\ $, длина периода равна 6 и предпериод содержит одну цифру, а $2025=1+6\cdot 337+2$, на 2025-м месте после запятой стоит вторая цифра – это 1. После вычеркивания единицы ее место займет следующая цифра – это 4. Число при этом увеличится, так как все предыдущие цифры остались неизменными.

Ответ: Полученное число больше.

▹ **Задача 3.** Даны три попарно неравных отрезка, длины которых (в порядке убывания) равны *a*, *b* и *c*. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок *x*, длина которого равна $\sqrt[4]{a^4-b^3c}$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

Преобразуем выражение для искомого отрезка:

$$\sqrt[4]{a^4-b^3c}=\sqrt[4]{a^2\left(a^2-\frac{b^3c}{a^2}\right)}=\sqrt{a\sqrt{a^2-\left(\frac{b\sqrt{bc}}{a}\right)^2}}.$$

Отсюда ясна последовательность построения. Сначала построим отрезок $x=\sqrt{bc}$, затем $y=\frac{bx}{a}$, затем $z=\sqrt{a^2-y^2}$ и, наконец, искомый отрезок $\sqrt{az}$. В прямоугольном треугольнике, гипотенуза которого делится основанием высоты на отрезки *b* и *c*, проведенная к гипотенузе высота равна *x*. Отрезок *y* строим, пользуясь подобием, отрезок *z* – по теореме Пифагора, а отрезок $\sqrt{az}$ – так же, как отрезок *x*.

▹ **Задача 4.** Последовательность a_n удовлетворяет при любом натуральном *n* соотношению

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+1}{a_n}.$$

Найдите S_{2025}, если $a_{33}=3$, $a_{44}=4$. Здесь $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Обозначим $a_1=a, a_2=b$ и вычислим несколько первых членов последовательности: $a_3=\frac{b+1}{a}$, $a_4=\frac{a+b+1}{ab}$, $a_5=\frac{a+1}{b}$, $a_6=a$, $a_7=b$. Далее все будет повторяться с периодом в пять членов. Таким образом, $a_{33}=a_3$, $a_{44}=a_4$.

Отсюда получим систему $\begin{cases}\dfrac{b+1}{a}=3,\\ \dfrac{a+b+1}{ab}=4.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\ b=1.\end{cases}$ Теперь вычислим

$a_1=\dfrac{2}{3}, a_2=1, a_3=3, a_4=4, a_5=\dfrac{5}{3}$, $S_5=8+\dfrac{7}{3}=\dfrac{31}{3}$.

$$S_{2025}=\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\right)\cdot\frac{2025}{5}=\frac{31}{3}\cdot\frac{2025}{5}=31\cdot 135=4185.$$

Ответ: 4185.

▹ **Задача 5.** На доске сначала было записано число 1. Каждую минуту к имеющемуся в этот момент числу прибавляют сумму его цифр. Может ли спустя некоторое время на доске появиться 12-значное число 202420252026?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Число и сумма его цифр при делении на 3 дают одинаковые остатки. Поэтому, начиная с остатка 1, на втором шаге получим остаток 2, а с остатка 2 – снова остаток 1 и так далее. Таким образом, число 202420252026, которое делится на 3, появиться на доске не может.

Ответ: Не может.

▹ **Задача 6.** Найдите две последние цифры следующей сверхстепени $9^{9^{9^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}$, где 9 встречается в записи 2025 раз.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Выписываем последние цифры первых десяти степени числа 9 $9^1=9$; $9^2=81$; $9^3=100N_3+29$; $9^4=100N_4+61$; $9^5=100N_5+49$; $9^6=100N_6+41$;

$9^7 = 100N_7 + 69$; $9^8 = 100N_8 + 21$; $9^9 = 100N_9 + 89$; $9^{10} = 100N_{10} + 01$, $N_k \in N \ \forall k = \overline{3,10}$.

$9^9 = 10M + 89$, $9^{9^9} = 9^{10M+9} = (9^{10})^M \cdot 9^9 = (100N_{10} + 1)^M (100N_9 + 89) = 100M_1 + 89$.

Далее, по индукции ($9^{a_n} = a_{n+1}$; $a_1 = 9$) последние две цифры этой сверхстепени образуют двузначное число 89.

Ответ: 89.

▹ **Задача 7.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Искомое событие A состоит в том, что составленная из двух чисел дробь – сократимая. Общее число элементарных исходов $N = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. В таблице представлены все элементарные исходы испытания, причем знаком «+» отмечены исходы, благоприятствующие событию A, а знаком «–» – исходы, ему неблагоприятствующие.

	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
15		-	-	+	-	+	+	-	-	+
16			-	+	-	+	-	+	-	+
17				-	-	-	-	-	-	-
18					-	+	+	+	-	+
19						-	-	-	-	-
20							-	+	-	+
21								-	-	+
22									-	+
23										-
24										

Заметим, что каждый знак «+» в таблице означает две сократимые дроби. Тогда $M = 2 \cdot 16 = 32$, $N = A_{10}^2 = 90$, поэтому $P\ A = \dfrac{32}{90} = \dfrac{16}{45}$.

Ответ: $\dfrac{16}{45}$.

▹ **Задача 8.** Существует ли натуральное число n такое, что $5n$ является пятой степенью натурального числа, $6n$ – шестой степенью, $7n$ – седьмой степенью?

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Из условия следует, что n делится на 5, 6 и 7. Будем искать n в виде $n=5^k\cdot 6^l\cdot 7^m$. При этом $k+1\vdots 5, k\vdots 6, k\vdots 7,$ $l\vdots 5, l+1\vdots 6, l\vdots 7,$ $m\vdots 5, m\vdots 6, m+1\vdots 7$.

Общим решением является $k=84+210t_1$, $l=35+210t_2$, $m=90+210t_3$, где $t_{1,2,3}\in\mathbb{Z}$. Наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим условию, является $5^{84}\cdot 6^{35}\cdot 7^{70}$.

Ответ: Существует.

▹ **Задача 9.** Два тела движутся по окружности. Первое совершает полный оборот на 16 секунд быстрее второго. С интервалом в 12 секунд они оказываются в одной точке окружности. Какую часть окружности каждое тело проходит в одну секунду?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Пусть t – время прохождения окружности первым телом, $t+16$ – время прохождения вторым телом. Рассмотрим два случая.

1) Пусть тела движутся в одном направлении.

$$\frac{2\pi R}{t}-\frac{2\pi R}{t+16}=\frac{2\pi R}{12}\Rightarrow t=8, t+16=24.$$

Следовательно, за одну секунду первое тело проходит $\frac{1}{8}$ часть окружности, второе тело – $\frac{1}{24}$ часть.

2) Пусть тела движутся в разных направлениях.

$$\frac{2\pi R}{t}+\frac{2\pi R}{t+16}=\frac{2\pi R}{12}\Rightarrow t=4+4\sqrt{13}, t+16=20+4\sqrt{13}.$$

Следовательно, за одну секунду первое тело проходит $\dfrac{\sqrt{13}-1}{48}$ часть окружности, второе тело – $\dfrac{5-\sqrt{13}}{48}$ части окружности.

Ответ: 1) $\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{24}$, 2) $\dfrac{\sqrt{13}-1}{48},\dfrac{5-\sqrt{13}}{48}$

▹ **Задача 10.** Найдите $a_1+a_2+\ldots+a_{2024}$, где $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$, с точностью до четвертого десятичного знака.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

$$a_n=\frac{\sqrt{n}(n+1)-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{\sqrt{n}(n+1)-n\sqrt{n+1}}{n^3+2n^2+n-n^3-n^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{n}(n+1)-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2024}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=$$

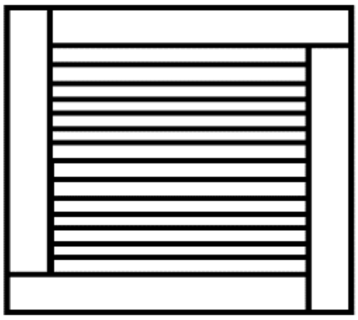
$$=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}=0{,}9(7)=0{,}9778$$

Ответ: 0,9778.

9 класс, Европа

▹ **Задача 1.** Можно ли разрезать квадрат на 18 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент.*



Пусть периметр квадрата равен $P=4a$.

Четыре прямоугольника по краям имеют периметр $a-b+b\ \cdot 2=\frac{p}{2}=2a$.

У четырнадцати прямоугольников в центре периметр $P_1=\left(a-2b+\frac{a-2b}{14}\right)\cdot 2=2a$. Но $P_1=\frac{p}{2}=2a$. Из этого равенства найдем b: $\frac{15}{14}a-\frac{30}{14}b=a$, $\frac{a}{30}=b$.

Ответ: Да, можно.

▹ **Задача 2.** В десятичной записи числа $\frac{1}{13}$ вычеркнули 2025-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $\frac{1}{13}$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

Поскольку $\frac{1}{13}=0,\ 076923$, а длина периода дроби равна 6, на 2025-м месте после запятой стоит цифра 6. После вычеркивания шестерки на ее месте оказывается 9. Число увеличится, так как предыдущие цифры оказались неизменными.

Ответ: Полученное число больше.

▹ **Задача 3.** Даны отрезки a, b, c и d. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок x, длина которого равна $\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

Построим сначала отрезок $u = \sqrt{a^2 + b^2}$. Затем, если $c > d$, построим отрезок $v = \sqrt{c^2 - d^2}$ и, наконец, $x = \sqrt{u^2 - v^2}$. Если же $c < d$, то построим отрезок $v = \sqrt{d^2 - c^2}$, после чего $x = \sqrt{u^2 + v^2}$. Построения проводятся на основе теоремы Пифагора.

▹ **Задача 4.** Существует ли 2025 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2024 из них делится на оставшееся?

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Существуют, например, 1, 2, 3, 6, 12, 24, … (первые три числа 1, 2, 3, а каждое следующее в два раза больше предыдущего). Последнее, 2025-е число, будет равно $3 \cdot 2^{2022}$. Как нетрудно проверить, каждое следующее число, начиная с 4-го, равно сумме всех предыдущих. Поэтому, если выбрать какое-то из этих чисел (кроме 1, 2 и 3), то сумма предыдущих делится на него, и каждое последующее тоже делится на него:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = 2^{n-3} a_3 \ (3 \leqslant n \leqslant 2025);$$

$$S = 1 + 2 + 3 + 2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3 + \ldots + 2^{2021} \cdot 3 + 2^{2022} \cdot 3 = 1 + 2 + 3\ \ 1 + 2 + 2^2 + 2^{2022}\ \ =$$
$$= 1 + 2 + 3\ \ 2^{2023} - 1\ \ = 3 \cdot 2^{2023}.$$

$$\frac{S - a_k}{a_k} = \frac{S}{a_k} - 1 = 2^{2026-n} - 1.$$

Стало быть, сумма всех чисел, кроме выбранного a_n, делится на a_n. Для чисел 1 и 2 проверка тривиальна.

Ответ: Существует.

▹ **Задача 5.** Петя вычислил сумму $1+2+\ldots+N$ и зачеркнул в ней последние *k* цифр (*k* – некоторое фиксированное натуральное число). У него опять получилось *N*. Найдите это *N*, если $k=5$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

По условию составим уравнение

$$\left[\frac{N(N+1)}{2\cdot 10^5}\right]=N,$$

где x – целая часть числа *x*.

Отсюда $N\leqslant\dfrac{N(N+1)}{2\cdot 10^5}<N+1$, $2\cdot N\cdot 10^5\leqslant N(N+1)<2\cdot(N+1)\cdot 10^5$,

$199999\leqslant N<200000$, $N=199999$.

Ответ: 199999.

▹ **Задача 6.** Найдите две последние цифры следующей сверхстепени $11^{11^{11^{\cdot^{\cdot^{11}}}}}$, где 1 встречается в записи 2024 раза.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Выписываем последние цифры первых десяти степеней числа 11:

$11^1=11$; $11^2=21$; $11^3=100N_3+31$; $11^4=100N_4+41$; $11^5=100N_5+51$;

$11^6=100N_6+61$; $11^7=100N_7+71$; $11^8=100N_8+81$; $11^9=100N_9+91$;

$11^{10}=100N_{10}+1$.

$11^{11}=11^{10}\cdot 11=\ldots 11$, т.е. $11^{11}=100M+11=10N+1$.

$11^{11^{11}}=11^{10N+1}=(11^{10})^N\cdot 11=\ 100N+1\ ^N\cdot 11=\ldots 11=100K+11.$

Отсюда ясно, что сверхстепень оканчивается на 11.

Ответ: 11.

▹ **Задача 7.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь несократима.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Искомое событие A состоит в том, что составленная из двух чисел дробь – несократимая. Общее число элементарных исходов $N = A_{10}^{2} = 10 \cdot 9 = 90.$

В таблице представлены все элементарные исходы испытания, причем знаком «–» отмечены исходы, благоприятствующие событию A, а знаком «+» – исходы, ему неблагоприятствующие.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
25		-	-	-	-	+	-	-	-	-
26			-	+	-	+	-	+	-	+
27				-	-	+	-	-	+	-
28					-	+	-	+	-	+
29						-	-	-	-	-
30							-	+	+	+
31								-	-	-
32									-	+
33										-
34										

Заметим, что каждый знак «+» в таблице означает две сократимые дроби. Тогда $M = 2 \cdot 31 = 62$, $N = A_{10}^{2} = 90$, поэтому $P\ \ A\ = \dfrac{62}{90} = \dfrac{31}{45}.$

Ответ: $\dfrac{31}{45}.$

▹ **Задача 8.** Первая цифра чисел 5^n и 2^n одна и та же. Какая это цифра?

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Пусть при некотором n 5^n и 2^n начинаются на цифру k. Тогда $k \cdot 10^x < 5^n <\ k+1\ \cdot 10^x$ и $k \cdot 10^y < 2^n <\ k+1\ \cdot 10^y$. Перемножим эти неравенства:

$$k^2 \cdot 10^{x+y} < 10^n < (k+1)^2 \cdot 10^{x+y},\ k^2 < 10^{n-x-y} < (k+1)^2.$$

Получается, что какая-то степень десятки расположена между двумя последовательными квадратами. Учитывая, что k – цифра, это возможно только для $3^2 < 10 < 4^2$, следовательно, $k = 3$.

Ответ: 3.

▹ **Задача 9.** Два тела движутся по окружности. Первое совершает оборот на 12 секунд быстрее второго. С интервалом в 16 секунд они оказываются в одной точке. Какую часть окружности каждое тело проходит за одну секунду?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Пусть t – время прохождения окружности первым телом, $t+16$ – время прохождения вторым телом. Рассмотрим два случая:

1) Пусть тела движутся в одном направлении.

$$\frac{2\pi R}{t} - \frac{2\pi R}{t+12} = \frac{2\pi R}{16} \Rightarrow t = 2\sqrt{57} - 6, t+12 = 2\sqrt{57} + 6.$$

Следовательно, за секунду первое тело проходит $\frac{3+\sqrt{57}}{96}$ часть окружности, второе тело – $\frac{\sqrt{57}-3}{96}$ часть.

2) Пусть тела движутся в разных направлениях.

$$\frac{2\pi R}{t} + \frac{2\pi R}{t+12} = \frac{2\pi R}{16} \Rightarrow t = 10 + 2\sqrt{73}, t+12 = 22 + 2\sqrt{73}.$$

Следовательно, за секунду первое тело проходит $\frac{\sqrt{73}-5}{96}$ часть окружности, второе тело – $\frac{11-\sqrt{73}}{96}$ часть окружности.

Ответ: 1) $\frac{3+\sqrt{57}}{96}, \frac{\sqrt{57}-3}{96}$, 2) $\frac{\sqrt{73}-5}{96}, \frac{11-\sqrt{73}}{96}$.

▹ **Задача 10.** Вычислить сумму $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2023\cdot 2025}$ с точностью до четвертого десятичного знака.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2023\cdot 2025}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$$

$$...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2025}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2025}\right)=$$

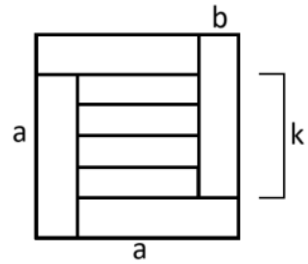
$$=0,5-0,0002469=0,4998.$$

Ответ: 0,4998.

10 класс, Азия

▹ **Задача 1.** Можно ли разрезать квадрат на 10 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент.*



Способ разрезания показан на рисунке. Пусть периметр квадрата равен $P=4a$. В центре $k=10-4=6$ прямоугольников. Четыре прямоугольника по краям имеют периметр $a-b+b \ \cdot 2=\frac{p}{2}=2a$. Шесть прямоугольников в центре имеют периметр $\left(a-2b+\frac{a-2b}{6}\right)\cdot 2=2a$. Отсюда $\frac{7}{3}a-\frac{14}{3}b=2a$, $\frac{a}{14}=b$.

Ответ: Да, можно.

▹ **Задача 2.** Найдите наименьшее натуральное n, при котором

$$1,\ 1\ +2,\ 2\ +\ldots+n,\ n\ \geqslant 202{,}5$$

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Пользуясь представлением периодической дроби в виде обыкновенной, выразим сумму $S=1,\ 1\ +\ldots+9,\ 9\ +10,\ 10\ +n,\ n$ через количество слагаемых n, $10\leqslant n\leqslant 99$:

$$S\ n\ =1+2+\ldots+n+\frac{1+2+\ldots+9}{9}+\frac{10+11+\ldots+n}{99}=\frac{n\ \ n+1}{2}+5+\frac{n+10\ \ \ n-9}{2\cdot 99}=$$

$=\frac{50n^2+50n+450}{99}$. Теперь найдем наименьшее натуральное решение неравенства $S\ n\ \geqslant 202{,}5$:

$100n^2 + 100n + 900 \geqslant 405 \cdot 99$, $n^2 + n \geqslant \dfrac{7839}{20} = 391{,}95$.

При $n = 19$ $n^2 + n = 380 < 391{,}95$, при $n = 20$ $n^2 + n = 420 > 391{,}95$. Итак, наименьшее натуральное решение неравенства $n = 20$.

Ответ: 20.

▹ **Задача 3.** В некоторой системе счисления взято число вида

$$10\underbrace{11\ldots11}_{n}01.$$

Известно, что это число, будучи записано в десятичной системе счисления, при любом натуральном n делится на 19. При каком наименьшем основании системы счисления это возможно?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Пусть a – основание системы счисления. Данное в условии число представимо в виде

$$1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1} + a^{n+3} = 1 + a^2 \frac{a^n - 1}{a - 1} + a^{n+3} =$$

$$= \frac{a^{n+4} - a^{n+3} + a^{n+2} - a^2 + a - 1}{a - 1} = \frac{a^2 - a + 1 \quad a^{n+2} - 1}{a - 1} =$$

$$a^2 - a + 1 \quad a^{n+1} + a^n + \ldots + a + 1 \ .$$

Получившееся выражение делится на 19 независимо от n, следовательно, число $a^2 - a + 1$ кратно 19. Это возможно при наименьшем основании системы счисления a, равном 12.

Ответ: 12.

▹ **Задача 4.** Сколько различных делителей у числа $N = 92719271$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Разложим число N на простые множители:

$$N = 92719271 = 9271 \cdot 10001 = 73^2 \cdot 127 \cdot 137.$$

Как известно, количество делителей числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$, где p_i – простые числа, равно $\alpha_1 + 1 \quad \alpha_2 + 1 \ \ldots \ \alpha_k + 1$. В нашем случае число N имеет $2+1 \quad 1+1 \quad 1+1 = 12$ делителей.

Ответ: 12.

▹ **Задача 5.** Найдите, по крайней мере одну тройку различных натуральных чисел m, n, k таких, что выполняется равенство $\frac{1}{2026} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Одну из троек можно найти, например, так:

$$\frac{1}{2026} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{1013x} = \frac{2026 + 1013 + 2}{2026x} = \frac{3041}{2026x} = \frac{1}{2026}.$$

Отсюда $x = 3041$. Тогда $m = x = 3041$, $n = 2x = 6082$, $k = 1013x = 3080533$.

Ответ: $3041; 6082; 3080533$.

▹ **Задача 6.** Пусть $a = \dfrac{1\overbrace{66\ldots6}^{2025}}{\underbrace{66\ldots6}_{2025}4}$, $b = \dfrac{1\overset{2025}{99\ldots9}}{\underset{2025}{99\ldots9}6}$. Найти $a \cdot b$ с точностью до третьего знака.

Решение.

Пусть $N = 10^{2025}$, тогда

$$a=\frac{10^{2025}+\frac{2}{3}\left(10^{2025}-1\right)}{\frac{2}{3}\left(10^{2025}-1\right)\cdot 10+4}=\frac{5\cdot 10^{2025}-2}{20\cdot 10^{2025}-8}=\frac{5N-2}{20N-8}=\frac{1}{4}.$$

$$b=\frac{10^{2025}+\left(10^{2025}-1\right)}{\left(10^{2025}-1\right)\cdot 10+6}=\frac{2\cdot 10^{2025}-1}{10\cdot 10^{2025}-4}=\frac{2N-1}{10N-4}=\frac{1}{5}-\frac{0,4}{20N-8}.$$

$$a\cdot b=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{0,4}{20N-8}\right)$$

$$a\cdot b=\frac{1}{20}-0,01\left(10^{-2025}+\ldots\right)\approx 0,050.$$

Ответ: 0,050.

▹ **Задача 7.** Построить прямоугольный треугольник по высоте, опущенной на гипотенузу, и разности между суммой катетов и гипотенузой.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева*

В задаче заданы: высота $CD=h$, $x+y-z=k$, где x, y – катеты, а z – гипотенуза треугольника. $x+y=k+z$, $x^2+y^2+2xy=k^2+2kz+z^2$. Так как треугольник прямоугольный, $2xy=k^2+2kz$. Но $xy=hz$ и $z=\dfrac{k^2}{2\left(h-k\right)}$ (здесь возникает условие $h>k$).

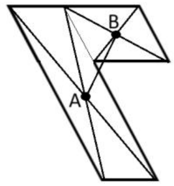
Строим теперь прямоугольник OPR по катетам $OP=k$ и $PR=2\left(h-k\right)$ и проводим $OK\perp OR$ до пересечения с прямой PR в точке K. Так как OP – среднее геометрическое KP и PR, то $PK=\dfrac{\left(OP\right)^2}{PR}=\dfrac{k^2}{2\left(h-k\right)}=z$.

Далее легко строится искомый прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте.

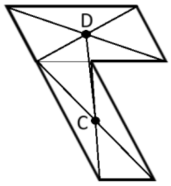
▹ **Задача 8.** Из однородного листа жести вырезан многоугольник («буква Г»). Как можно, располагая только линейкой и

карандашом, построить его центр тяжести?

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*



«Букву Г» можно разбить на два параллелограмма, и центр тяжести «буквы Г» лежит на прямой, соединяющей центры этих параллелограммов.



Но «букву Г» можно и другим способом разбить на два параллелограмма, и мы находим другую прямую, на которой лежит ее центр тяжести – точка пересечения этих прямых.

▹ **Задача 9.** Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Имеем

$$2\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>$$

$$>\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\ldots+\frac{\sqrt{10001}-1}{2}>\frac{100-1}{2}>49,$$

откуда $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$

▹ **Задача 10.** Среди вершин правильного 77-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Какова вероятность того, что треугольник с выбранными вершинами остроугольный?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

Пронумеруем последовательные вершины правильного $2n+1$ -угольника $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Зафиксируем вершину A_0. В качестве остальных вершин треугольника можно взять любые две из оставшихся, всего $C_{2n}^2 = \frac{2n\ \ 2n-1}{2} = n\ \ 2n-1$ вариантов. Рассмотрим, при каких условиях треугольники будут остроугольными. Угол $A_iA_0A_j$ будет острым, если между A_i и A_j лежит не более $n-1$ вершины.

Все вершины, кроме A_0, разделим на две равные группы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$. Если две оставшиеся вершины лежат в одной группе, то угол при одной из них будет тупым. Поэтому в каждой группе есть по вершине. Пусть, например, в первой группе выбрана вершина A_i, а во второй – A_j. Углы при этих вершинах острые. Чтобы острым был и угол $A_iA_0A_j$, должно выполняться ограничение $j-i \leqslant n$. Итак, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n+1 \leqslant j \leqslant i+n$, последнему неравенству отвечают *i* решений. Итак, всего имеем $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ благоприятствующих событий.

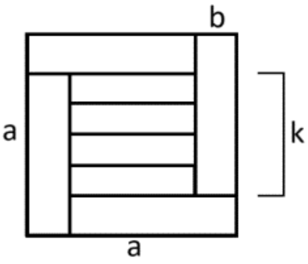
Искомая вероятность равна $\dfrac{\frac{n\ \ n+1}{2}}{n\ \ 2n-1} = \dfrac{n+1}{2\ \ 2n-1}$. Если $n = 38$, то вероятность $P = \dfrac{39}{2\cdot\ \ 2\cdot 38-1} = \dfrac{13}{50} = 0{,}26$.

Ответ: 0,26.

10 класс, Европа

▹ **Задача 1.** Можно ли разрезать квадрат на 20 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент.*



Способ разрезания показан на рисунке. Периметр квадрата равен $P=4a$. В центре расположены $k=20-4=16$ равных прямоугольников. Четыре прямоугольника по краям имеют периметр $a-b+b \;\cdot 2=\dfrac{p}{2}=2a$. Шестнадцать прямоугольников в центре имеют периметр $\left(a-2b+\dfrac{a-2b}{16}\right)\cdot 2=2a$. Отсюда

$a-2b\;\cdot 17=16a$, $17a-34b=16a$, $\dfrac{a}{34}=b$.

Ответ: Да, можно.

▹ **Задача 2.** Найдите наибольшее натуральное значение *n*, при котором

$$n,\ 1\ +\ n-1\ ,\ 2\ +\ldots+1,\ n\ \leqslant 202{,}5.$$

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Пользуясь представлением периодической дроби в виде обыкновенной, выразим сумму $S\ n\ =n,\ 1\ +\ n-1\ ,\ 2\ +\ldots+1,\ n$ через количество слагаемых $10\leqslant n\leqslant 99$:

$$S\ n\ =1+2+\ldots+n+\frac{1+2+...+9}{9}+\frac{10+11+...+n}{99}=\frac{n\ \ n+1}{2}+5+\frac{n+10\ \ \ n-9}{2\cdot 99}=$$

$=\dfrac{50n^2+50n+450}{99}$. Теперь найдем наибольшее натуральное решение неравенства $S\ n\ \leqslant 202{,}5$:

$$100n^2+100n+900 \leqslant 405\cdot 99,\ n^2+n \geqslant \frac{7839}{20} \leqslant 391{,}95.$$

При $n=19$ $n^2+n=380<391{,}95$, при $n=20$ $n^2+n=420>391{,}95$. Итак, наибольшее натуральное решение неравенства $n=19$.

Ответ: 19.

▹ **Задача 3.** В некоторой системе счисления взято число вида

$$10\underbrace{11\ldots 11}_{n}01.$$

Известно, что это число, будучи записано в десятичной системе счисления, при любом натуральном n делится на 37. При каком наименьшем основании системы счисления это возможно?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Пусть a – основание системы счисления. Данное в условии число представимо в виде

$$1+a^2+a^3+\ldots+a^{n+1}+a^{n+3}=1+a^2\frac{a^n-1}{a-1}+a^{n+3}=$$

$$=\frac{a^{n+4}-a^{n+3}+a^{n+2}-a^2+a-1}{a-1}=\frac{a^2-a+1 \quad a^{n+2}-1}{a-1}=$$

$$a^2-a+1 \quad a^{n+1}+a^n+\ldots+a+1 .$$

Получившееся выражение делится на 37 независимо от n, следовательно, число a^2-a+1 кратно 37. Это возможно при наименьшем основании системы счисления a, равном 11.

Ответ: 11.

▹ **Задача 4.** Сколько различных делителей у числа $N=99919991$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Разложим число N на простые множители:

$N = 99919991 = 9991 \cdot 10001 = 73 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 137$.

Как известно, количество делителей числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}$, где p_i – простые числа, равно $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$. В нашем случае число N имеет $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 16$ делителей.

Ответ: 16.

▹ **Задача 5.** Найдите, по крайней мере, одну тройку различных натуральных чисел (m, n, k) таких, что выполняется равенство $\frac{1}{1991} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Одну из троек можно найти, например, так:

$\frac{1}{1991} = \frac{1}{x} + \frac{1}{11x} + \frac{1}{181x} = \frac{1991 + 181 + 11}{1991x} = \frac{2183}{1991x} = \frac{1}{1991}$. Отсюда $x = 2183$.

Тогда $m = x = 2183$, $n = 2x = 24013$, $k = 1013x = 395123$.

Ответ: $(2183; 24013; 395123)$.

▹ **Задача 6.** Пусть $a = \frac{4\overbrace{66\ldots6}^{2025}}{\underbrace{66\ldots6}_{2025}4}$, $b = \frac{\overset{2025}{199\ldots9}}{\underset{2025}{99\ldots91}}$. Найти $a + b$ с точностью до 13 знака.

Решение. Примем число 333...33, в котором все 2025 цифр равны 3, за x, тогда $3x = N - 1$, где $N = 10^{2025}$. Выразим искомую сумму через x:

$$a + b = \frac{4N + 2x}{20x + 4} + \frac{N + 3x}{30x + 1} = \frac{4(3x + 1) + 2x}{20x + 4} + \frac{3x + 1 + 3x}{30x + 1} = \frac{14x + 4}{20x + 4} + \frac{6x + 1}{30x + 1} =$$

$$= \frac{(7x + 2)(30x + 1) + (6x + 1)(10x + 2)}{(10x + 2)(30x + 1)} = \frac{270x^2 + 89x + 4}{300x^2 + 70x + 2} =$$

$$= \frac{270 + \frac{89}{x} + \frac{4}{x^2}}{300 + \frac{70}{x} + \frac{2}{x^2}} \approx \frac{270}{300} = 0{,}9.$$

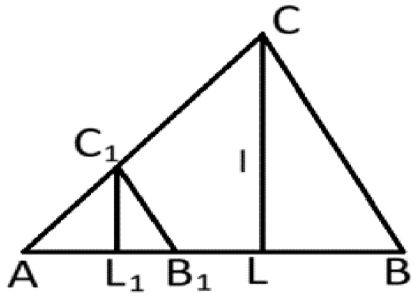
Приближенное значение было получено отбрасыванием в числителе и знаменателе слагаемых, не превышающих 10^{-2022}, поэтому с точностью до 13 знака получим 0,9000000000000.

Ответ: 0,9000000000000.

▹ **Задача 7.** Построить треугольник, зная, что длины его сторон составляют арифметическую прогрессию, биссектриса, проведенная к средней стороне, равна *l* и угол, лежащий против биссектрисы, равен α .

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Анализ. Допустим, что треугольник *ABC* удовлетворяет условиям задачи, т.е. $\angle A = \alpha$, биссектриса $CL = l$ и $AB = \frac{AC + CB}{2}$.



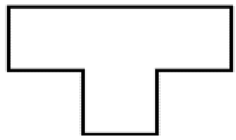
По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника $AL : LB = AC : CB.$

Кроме того, $AL + LB = AB.$ Из вышенаписанного получим: $AL = \frac{AC}{2}$, $BL = \frac{BC}{2}$.

Построение. Строим произвольный треугольник AC_1L_1, у которого $\angle A = \alpha$, $AC_1 = 2AL_1$. Этот треугольник достраивается до треугольника AB_1C_1 так, чтобы C_1L_1 была биссектрисой $\angle AC_1B_1$. После этого строим треугольник *ABC*, подобный треугольнику AB_1C_1, приняв за центр гомотетии точку *A*, а за коэффициент отношение $\frac{l}{CL} = k$. Треугольник *ABC* – искомый.

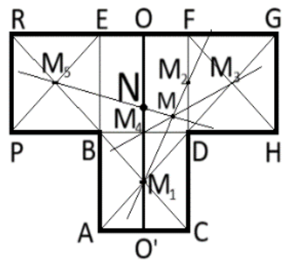
Доказательство и исследование очевидно.

▹ **Задача 8.** Как можно, располагая только линейкой и карандашом, найти центр тяжести симметричной однородной пластинки, изображенной на рисунке?



Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Центр тяжести «буквы Т» лежит на OO' оси симметрии, которую нетрудно построить. Кроме того, можно разбить «букву Т» на «букву Г» и прямоугольник. На отрезке, соединяющем их центры тяжести, лежит исходный центр «буквы Т», так что он находится в пересечении этого отрезка с осью симметрии «буквы Т». M_1 – центр прямоугольника *ABCD*, M_2 – центр прямоугольника *EGHB*, M_3 – центр прямоугольника *FGHC*, M_1 – центр прямоугольника *AEFD*. *M* - центр тяжести «буквы Г» – точка пересечения прямых M_1M_2 и M_3M_4. M_5 – центр прямоугольника *BPRE*. Центр тяжести в точке *N* – пересечение оси OO' и MM_5.



▹ **Задача 9.** Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}}>24,5.$$

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Пусть

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}}\right).$$

Тогда

$$2A = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}} + \frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{2} + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{9998}-\sqrt{9996}}{2} + \frac{\sqrt{10000}-\sqrt{9998}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{10000}-\sqrt{4}}{2} = \frac{100-2}{2} > 49,$$

откуда $2A > 49 \Rightarrow A > 24{,}5.$

▹ **Задача 10.** Среди вершин правильного 89-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Какова вероятность того, что треугольник с выбранными вершинами остроугольный?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

Пронумеруем последовательные вершины правильного $2n+1$ -угольника $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Зафиксируем вершину A_0. В качестве остальных вершин треугольника можно взять любые две из оставшихся, всего $C_{2n}^2 = \frac{2n\ \ 2n-1}{2} = n\ \ 2n-1$ вариантов. Рассмотрим, при каких условиях треугольники будут остроугольными. Угол $A_iA_0A_j$ будет острым, если между A_i и A_j лежит не более $n-1$ вершины.

Все вершины, кроме A_0, разделим на две равные группы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$. Если две оставшиеся вершины лежат в одной группе, то угол при одной из них будет тупым. Поэтому в каждой группе есть по вершине. Пусть, например, в первой группе выбрана вершина A_i, а во второй – A_j. Углы при этих вершинах острые. Чтобы острым был и угол $A_iA_0A_j$, должно выполняться ограничение $j-i\leqslant n$. Итак, $1\leqslant i\leqslant n$, $n+1\leqslant j\leqslant i+n$, последнему неравенству отвечают i решений. Итак, всего имеем $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ благоприятствующих событий.

Искомая вероятность равна $\dfrac{\frac{n\;\,n+1}{2}}{n\;\,2n-1}=\dfrac{n+1}{2\;\,2n-1}$.

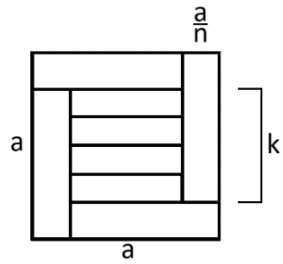
Если $n=44$, то вероятность $P=\dfrac{45}{2\cdot\;\,2\cdot 44-1}=\dfrac{45}{174}=\dfrac{15}{58}\approx 0,25862.$

Ответ: $\dfrac{15}{58}\approx 0,25862$.

11 класс, Азия

▹ **Задача 1.** Разрежьте квадрат на 22 прямоугольника, необязательно одинаковых, таких, что периметр каждого из них равен полупериметру исходного квадрата.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент.*



Пусть периметр квадрата равен $P = 4a$. Разрежем квадрат, как показано на рисунке. Найдем периметр каждого из четырех окаймляющих прямоугольников: $P_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}a + \frac{a}{n}\right) = 2a$ при любом n. Тогда каждый из k одинаковых прямоугольников, на которые разрезана внутренняя часть, имеет периметр $P_2 = 2a \cdot \left(\frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{k} + \frac{n-2}{n}\right) = P_1 = 2a$. Отсюда получим $n - 2 + nk - 2k = kn$, $2k = n - 2$. По условию, $k + 4 = 22$. Следовательно, $k = 18, n = 38$. Окаймляющие прямоугольники размера $\frac{a}{38} \times \frac{37a}{38}$, внутренние прямоугольники $\frac{a}{19} \times \frac{18a}{19}$.

▹ **Задача 2.** Числа от 1 до N вписаны подряд в вершины правильного N-угольника (по часовой стрелке). Начиная с первого числа отмечается каждое k-е число (т.е. числа 1, $k+1$, $2k+1$, …), причем при повторных оборотах учитываются и отмеченные числа. Отметки продолжаются до тех пор, пока не окажется, что все числа, которые отмечаются, уже отмечены. Сколько чисел останется без отметки, если $N = 2025$, $k = 13$?

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

$N = 2025$, $k = 13$.

1 оборот $1,14,27,\ldots,2016$ $2016=13\cdot155+1$

отмечены 156 чисел $2016+13-2025=4$

2 оборот $4,17,30,\ldots,2019$ $2019=13\cdot155+4$

отмечены 156 чисел $2019+13-2025=7$

3 оборот $7,20,33,\ldots,2022$ $2022=13\cdot155+7$

отмечены 156 чисел $2022+13-2025=10$

4 оборот $10,23,36,\ldots,2025$ $2025=13\cdot155+10$

отмечены 156 чисел $2016+13-2025=4$

5 оборот $13,26,39,\ldots,2015$ $2015=13\cdot155+0$

отмечены 155 чисел $2015+13-2025=3$

6 оборот $3,16,29,\ldots,2018$ $2018=13\cdot155+3$

отмечены 156 чисел $2018+13-2025=6$

7 оборот $6,19,32,\ldots,2021$ $2021=13\cdot155+6$

отмечены 156 чисел $2021+13-2025=9$

8 оборот $9,22,35,\ldots,2024$ $2024=13\cdot155+9$

отмечены 156 чисел $2024+13-2025=12$

9 оборот $12,25,38,\ldots,2014$ $2014=13\cdot154+12$

отмечены 155 чисел $2014+13-2025=2$

10 оборот $2,15,28,\ldots,2017$ $2017=13\cdot155+2$

отмечены 156 чисел $2017+13-2025=5$

11 оборот $5,18,31,\ldots,2020$ $2020=13\cdot155+5$

отмечены 156 чисел $2020+13-2025=8$

12 оборот $8,21,34,\ldots,2023$ $2023=13\cdot155+8$

отмечены 156 чисел $2023+13-2025=11$

13 оборот $11,24,37,\ldots,2013$ $2013=13\cdot154+11$

отмечены 155 чисел $2013+13-2025=1$ $\Rightarrow$

1 оборот $1,14,27,\ldots,2016$ $2016=13\cdot155+1$

отмечены 156 чисел $2016+13-2025=4$

$\ldots$

Значит, все числа отмечены.

Ответ: 0.

▹ **Задача 3.** Найдите коэффициент при x^{11} у многочлена $(1+x+x^3)^6$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{k-1} b + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (b+c)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (b+c)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \sum_{s=0}^{k} C_k^s b^{k-s} c^s.$$

Разложим $(1+x+x^3)^6$, подставив $a=1, b=x, c=x^3, n=6$:

$\sum_{k=0}^{6} C_n^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s x^{k-s} (x^3)^s = \sum_{k=0}^{6}\sum_{s=0}^{k} C_n^k C_k^s x^{k+2s}$. Отсюда следует, что:

$\begin{cases} k+2s=11, \\ 0 \leqslant s \leqslant k \leqslant 6. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=3, \\ k=5. \end{cases}$ Коэффициент равен $C_6^5 \cdot C_5^3 = \dfrac{6!}{5!1!} \cdot \dfrac{5!}{3!2!} = 60.$

Ответ: 60.

▹ **Задача 4.** Найдите, по крайней мере, пару троек (m,n,k) различных натуральных чисел, таких что $\dfrac{1}{2025} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}$.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Используем разложение $2025 = 1 \cdot 25 \cdot 81$:

а) $\dfrac{1}{2025} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{25x} + \dfrac{1}{81x} = \dfrac{2025+81+25}{2025x} = \dfrac{2131}{2025x} = \dfrac{1}{2025}, x = 2131.$

Тогда $m = x = 2131,\ n = 25x = 53275,\ k = 81x = 172611.$

б) $НОК(a,b,c)=2025$, $a=81, b=45, c=75$.

$$\frac{1}{2025}=\frac{1}{ax}+\frac{1}{bx}+\frac{1}{cx}=\frac{1}{81x}+\frac{1}{45x}+\frac{1}{75x}=\frac{25+45+27}{2025x}=\frac{97}{2025x}=\frac{1}{2025},\ x=97.$$

Тогда $m=81x=7857$, $n=45x=4365$, $k=75x=7275$.

Ответ: $(2131;53275;172611)$, $(7857;4365;7275)$.

▹ **Задача 5.** В каждой вершине треугольной пирамиды написаны некоторые числа. На каждом ребре написано число, равное сумме чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на всех ребрах равна a и сумма квадратов равна b. Чему равны сумма их кубов, если $a=3$, а $b=3$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Обозначим числа, записанные в вершинах, $x_i, i=1...4$. По условию,

$$(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_1+x_4)+(x_2+x_3)+(x_2+x_4)+(x_3+x_4)=a,$$

откуда $3(x_1+x_2+x_3+x_4)=a$.

Тогда

$$b=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_1+x_4)^2+(x_2+x_3)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3+x_4)^2=$$
$$=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+$$
$$+(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{b-\frac{a^2}{9}}{2}=\frac{9b-a^2}{18}.$$

$$(x_1+x_2)^3+(x_1+x_3)^3+(x_1+x_4)^3+(x_2+x_3)^3+(x_2+x_4)^3+(x_3+x_4)^3=$$
$$=(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+2x_3x_4+x_4^2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4)+$$
$$+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_3+x_3^2+x_2^2+2x_2x_4+x_4^2-x_1x_2-x_1x_4-x_2x_3-x_3x_4)+$$
$$+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_4+x_4^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4-x_3x_4)=$$
$$=(x_1+x_2+x_3+x_4)\left[3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\right]=\frac{a}{3}\cdot\frac{9b-a^2}{18}\cdot 3=\frac{a(9b-a^2)}{18}.$$

Для $a=3,\ b=3$ получим $\frac{a(9b-a^2)}{18}=\frac{3\cdot(9\cdot 3-3^2)}{18}=3$.

Ответ: 3.

▹ **Задача 6.** Дана прямоугольная пирамида *SABC*, известно, что *SB* – высота этой пирамиды, $\angle ABC = \alpha$ и $SB = AC$. На *SB* как на диаметре построили сферу, она пересекает *SA* и *SC* в *M* и *L* соответственно. Вычислите объем пирамиды *SMBL*, если $SB = h$ и объем *ABC* равен *V*. Выполните расчет для $\alpha = 60^\circ$, $h = \sqrt[3]{3}$, $V = \dfrac{1}{3}$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Решим задачу в общем случае. Проведем *BM* и *BL* в соответствующих боковых гранях. Заметим то, что $\angle BMS$ и $\angle BLS$ – вписанные углы, опирающиеся на диаметр. Следовательно, они прямые, то есть *BM* и *BL* – высоты из прямого угла в $\triangle SAC$ и $\triangle ACB$ соответственно. Обозначим $AB = a$, $BC = b$. Тогда из соотношений в прямоугольном треугольнике знаем, что

$$\frac{SM}{MA} = \frac{SB^2}{AB^2} = \frac{h^2}{a^2} \text{ и } \frac{SL}{LC} = \frac{SB^2}{BC^2} = \frac{h^2}{b^2}.$$

Поскольку пирамиды *SABC* и *SMBL* имеют общий трехгранный угол, то их объемы связаны следующим соотношением:

$$\frac{V_{SMBL}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SL}{SC},$$

откуда $V_{SMBL} = \dfrac{h^4}{h^2 + a^2 \quad h^2 + b^2} \cdot V$. Запишем формулу объема *SABC*:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SB \cdot S_{ABC} = V = \frac{1}{6} h \cdot ab \sin\alpha, \quad ab = \frac{6V}{h \sin\alpha}.$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + \frac{12V\cos\alpha}{h\sin\alpha}.$$

Теперь подставим получившиеся выражения в формулу для объема *SMBL* и, применив теорему Пифагора, получим:

$$V_{SMBL}=\frac{h^4V}{(h^2+a^2)(h^2+b^2)}=\frac{h^4V}{h^4+h^2(a^2+b^2)+(ab)^2}=$$

$$=\frac{h^4V}{2h^4+\dfrac{12Vh\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{36V^2}{h^2\sin^2\alpha}}=\frac{h^6V\sin^2\alpha}{2h^6\sin^2\alpha+12Vh^3\cos\alpha\sin\alpha+36V^2}.$$

Подставляя значения параметров из условия, получаем $\dfrac{9}{12\sqrt{3}+70}$.

Ответ: $\dfrac{9}{12\sqrt{3}+70}$.

▹ **Задача 7.** Из полного набора трехзначных чисел наудачу выбирается одно (числа не могут начинаться с цифры 0). Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке убывания слева направо,

б) в порядке неубывания слева направо.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

а) Пусть событие A – получение трехзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо (например, 320, 951). Общее количество трехзначных чисел N равно количеству чисел от 100 до 999, поэтому $n=999-100+1=900$. Любые три различные цифры, извлеченные из данных 10 цифр: $0,1,\ldots,8,9$ – можно единственным способом упорядочить по убыванию, поэтому число благоприятствующих событий событию A исходов

$$M=C_{10}^3=\frac{10!}{7!3!}=120.$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{120}{900}=\frac{4}{30}=0{,}13333.$$

б) Все трехзначные числа, цифры которых расположены в порядке неубывания, могут содержать любые три цифры из следующих девяти: $9,8,\ldots,2,1$, возможно, с повторениями. Следовательно,

$$M=\bar{C}_9^3=C_{9+3-1}^3=C_{11}^3=\frac{11!}{3!8!}=165.$$

Поэтому

$$P\ A=\frac{M}{N}=\frac{165}{900}=\frac{11}{60}.$$

Ответ: а) $\frac{4}{30}=0{,}13333$, б) $\frac{11}{60}=0{,}1833$.

▹ **Задача 8.** Пусть *x*, *y*, *z* – положительные вещественные числа, удовлетворяющие равенству $x+y+z=1$. Найдите наименьшее положительное значение a такое, что для любой тройки x,y,z выполняется неравенство $\frac{a^{1-x}}{1-x}+\frac{a^{1-y}}{1-y}+\frac{a^{1-z}}{1-z}\geqslant\frac{405}{2}\sqrt[3]{45}.$

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Оценим наименьшее значение выражения $\frac{a^{1-x}}{1-x}+\frac{a^{1-y}}{1-y}+\frac{a^{1-z}}{1-z}$.

Применим неравенство о средних для трех чисел:

$$\frac{a^{1-x}}{1-x}+\frac{a^{1-y}}{1-y}+\frac{a^{1-z}}{1-z}\geqslant\sqrt[3]{a^{3-(x+y+z)}}\sqrt[3]{\frac{1}{1-x\ \ 1-y\ \ 1-z}}=3a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-x\ \ 1-y\ \ 1-z}}.$$

Теперь заметим, что $1-x=y+z$, $1-y=z+x$, $1-z=x+y$. Обозначим $y+z=u$, $z+x=v$, $x+y=t$. Тогда $u+v+t=2$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x\ \ 1-y\ \ 1-z}}=\frac{1}{\sqrt[3]{uvt}}$.

По неравенству о средних

$$\frac{2}{3}=\frac{u+v+t}{3}\geqslant\sqrt[3]{uvt},\ \frac{1}{\sqrt[3]{uvt}}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Таким образом, наименьшее значение данного выражения равно $\frac{9}{2}a^{\frac{2}{3}}$ (равенство при $x = y = z = \frac{1}{3}$). Это возрастающая функция, а потому теперь достаточно решить уравнение

$$\frac{9}{2}a^{\frac{2}{3}} = \frac{405}{2}\sqrt[3]{45},$$

откуда $a = 2025$.

Ответ: 2025.

▹ **Задача 9.** Назовем словом любую последовательность любых символов. Андрей играет в игру: вначале ему выдается набор из 2026 слов, состоящих не более, чем из 2025 букв. Андрей может за один ход приписать к любому слову последовательность, состоящую ровно из 2025 букв, тем самым изменив это слово. Игра заканчивается, если через несколько ходов Андрей может получить набор, в котором найдутся два одинаковых слова. Всегда ли Андрей может выиграть? Если ответ положительный, то найдите, за какое наименьшее число ходов Андрей выигрывает независимо от исходного набора слов.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Очевидно, что в данном наборе слов найдутся два слова s и w, состоящие из одинакового числа букв (всего слов 2026, а различных длин не более 2025, поскольку длины слов не превосходят 2025). Длину любого слова x будем обозначать $|x|$. Тогда получаем $|s| = |w|$. Если $s = w$, то Андрей выиграл. Если $s \neq w$, то он будет придерживаться следующей стратегии: первым ходом к слову s он припишет любую последовательность l из 2025 букв, оканчивающуюся словом w, тогда слово s превратится в слово sl. Вторым ходом Андрей припишет к слову w слева первые 2025 букв слова sl (пусть эти буквы составляют последовательность t). Тогда получаем $tw = sl$.

Итак, уже доказано, что Андрею для победы требуется не более двух ходов. Докажем, что за один ход выиграть получится не всегда. Для этого рассмотрим набор из слов вида $a, aa, \ldots, a\ldots a$ (2025 букв a) и b. Андрею точно придется сделать хотя бы один ход, поскольку одинаковых слов в исходном наборе нет. Сделав первый ход, Андрей увеличит длину какого-то из слов на 2025. Тогда в этом слове будет не менее 2026 букв (поскольку в нашем наборе наименьшее число букв в слове равно 1). Это слово не будет равно ни одному из остальных имеющихся, поскольку оно длиннее всех слов исходного набора. Все остальные слова не равны по условию. Таким образом, за один ход добиться победы не получится, следовательно, потребуется не менее двух ходов для гарантированной победы.

Ответ: Андрей всегда может выиграть за два хода.

▹ **Задача 10.** Сже фщеье мдче ьепгфщлуеее тщг тлюлцг фнервгг $f(x)=33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1$. Еейбгжз зо езтлбугхедз жлирг.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Букв в русском алфавите 33. Очевидно, функция $f(x)=33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1$ и есть ключ к шифровке. Здесь скобки { } обозначают дробную часть числа. Функция $f \; x$ переводит целое число от 1 до 33 в другое целое число (т.е. букву по месту в алфавите в другую букву). Для расшифровки использовать функцию не получается, значит, она была использована для шифровки.

Составим таблицу дешифровки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
с	д	ц	и	ы	н	а	т	е	ч	й	ь	о	б	у	ё	ш

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
к	э	п	в	ф	ж	щ	л	ю	р	г	х	з	ъ	м	я

Получилось «Эта фраза была зашифрована при помощи функции $f(x)=33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1$. Найдите ее неподвижные точки.»

Найдем неподвижные точки, решив уравнение $f(x)=x$:

$$33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\}+1=x;\ \left\{\frac{7x-1}{33}\right\}=\frac{x-1}{33};$$

$$\frac{7x-1}{33}-\left[\frac{7x-1}{33}\right]=\frac{x-1}{33};\ \left[\frac{7x-1}{33}\right]=\frac{2x}{11}.$$

Обозначим $\left[\frac{7x-1}{33}\right]=n$, где n – целое число. Тогда $\frac{2x}{11}=n\Rightarrow x=\frac{11n}{2}$.

Подставим в выражение

$$\left[\frac{\frac{77n}{2}-1}{33}\right]=n;\ \left[\frac{77n-2}{66}\right]=n;\ \left[n+\frac{11n-2}{66}\right]=n.$$

Следовательно, $0\leqslant\frac{11n-2}{66}<1$. Отсюда $\frac{2}{11}\leqslant n<\frac{68}{11}$, т.е. $1\leqslant n\leqslant 6$.

Получаем 6 точек $\frac{11}{2},11,\frac{33}{2},22,\frac{55}{2},33.$

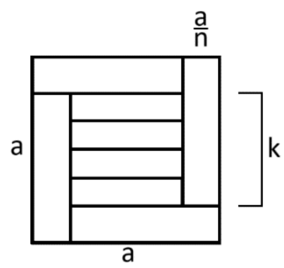
Ответ: $\frac{11}{2},11,\frac{33}{2},22,\frac{55}{2},33.$

11 класс, Европа

▹ **Задача 1.** Разрежьте квадрат на 33 прямоугольника, необязательно одинаковых, таких, что периметр каждого из них равен полупериметру исходного квадрата.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Дворянинов С.В., к.ф.-м.н., доцент.*

Пусть периметр квадрата равен $P = 4a$. Разрежем квадрат, как показано на рисунке. Найдем периметр каждого из четырех окаймляющих прямоугольников: $P_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}a + \frac{a}{n}\right) = 2a$ при любом n. Тогда каждый из k одинаковых прямоугольников, на которые разрезана внутренняя часть, имеет периметр $P_2 = 2a \cdot \left(\frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{k} + \frac{n-2}{n}\right) = P_1 = 2a$. Отсюда получим $n - 2 + nk - 2k = kn$, $2k = n - 2$. По условию, $k + 4 = 33$. Следовательно, $k = 29, n = 60$. Окаймляющие прямоугольники размера $\frac{a}{60} \times \frac{59a}{60}$, внутренние прямоугольники размера $\frac{a}{30} \times \frac{29a}{30}$.



▹ **Задача 2.** Числа от 1 до N вписаны подряд в вершины правильного N-угольника (по часовой стрелке). Начиная с первого числа отмечается каждое k-е число (т.е. числа 1, $k+1$, $2k+1$, …), причем при повторных оборотах учитываются и отмеченные числа. Отметки продолжаются до тех пор, пока не окажется, что все числа, которые отмечаются, уже отмечены. Сколько чисел останется без отметки, если $N = 1000$, $k = 7$?

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

$N=1000$, $k=13$

1 оборот $1,8,15,\ldots,995$ $995=7\cdot142+1$

отмечены 143 числа $995+7-1000=2$

2 оборот $2,9,16,\ldots,996$ $996=7\cdot142+2$

отмечены 143 числа $996+7-1000=3$

3 оборот $3,10,17,\ldots,997$ $997=7\cdot142+3$

отмечены 143 числа $997+7-1000=4$

4 оборот $4,11,18,\ldots,998$ $998=7\cdot142+4$

отмечены 143 числа $998+7-1000=5$

5 оборот $5,12,19,\ldots,999$ $999=7\cdot142+5$

отмечены 143 числа $999+7-1000=6$

6 оборот $6,13,20,\ldots,1000$ $1000=7\cdot142+6$

отмечены 143 числа $1000+7-1000=7$

7 оборот $7,14,21,\ldots,994$ $994=7\cdot142$

отмечены 143 числа $994+7-1000=1$

$\Rightarrow$

1 оборот $1,8,15,\ldots,995$ $955=7\cdot142+1$

отмечены 143 числа $995+7-1000=2$

$\ldots$

Значит, все числа отмечены.

Ответ: 0.

▹ **Задача 3.** Найдите коэффициент при x^{13} у многочлена $(1+x^2+x^3)^7$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Яруллин Р.Н., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{k-1} b + \ldots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (b+c)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \sum_{s=0}^{k} C_k^s b^{k-s} c^s.$$

Разложим $(1+x^2+x^3)^7$, подставив $a=1, b=x^2, c=x^3, n=7$:

$$\sum_{k=0}^{7} C_7^k (1+x^2)^k (x^3)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} x^{(7-k)3} C_7^k \sum_{s=0}^{k} C_k^s x^{2s} = \sum_{k=0}^{7} \sum_{s=0}^{k} C_k^s C_7^k x^{2s+21-3k}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 2k+s=13, \\ 0 \leqslant s \leqslant k \leqslant 7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=3, \\ k=5. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} s=1, \\ k=6. \end{cases}$$ Коэффициент равен:

$$C_7^5 \cdot C_5^3 + C_7^6 \cdot C_6^1 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} + \frac{7!}{6!\cdot 1!} \cdot \frac{6!}{5!\cdot 1!} = 21 \cdot 10 + 7 \cdot 6 = 252.$$

Ответ: 252.

▹ **Задача 4.** Найдите, по крайней мере, пару троек (m,n,k) различных натуральных чисел, таких что $\dfrac{1}{1001} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{k}$.

Решение. *Условие и решение задачи представила методической комиссии Андреева М.И., студентка 2-го курса факультета прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Используем разложение $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$:

а) $\dfrac{1}{1001} = \dfrac{1}{7x} + \dfrac{1}{11x} + \dfrac{1}{13x} = \dfrac{143+91+77}{1001x} = \dfrac{311}{1001x} = \dfrac{1}{1001}, x = 311.$

Тогда $m = 7x = 2177$, $n = 11x = 3421$, $k = 13x = 4043$.

б) $\dfrac{1}{1001} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{13x} + \dfrac{1}{77x} = \dfrac{1001+77+13}{1001x} = \dfrac{1091}{1001x} = \dfrac{1}{1001}, x = 1091.$

Тогда $m = x = 1091$, $n = 13x = 14183$, $k = 77x = 84007$.

Ответ: $(2177; 3421; 4043)$, $(1091; 14183; 84007)$.

▹ **Задача 5.** В каждой вершине треугольной пирамиды написаны некоторые числа. На каждом ребре написано число, равное сумме чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма чисел на всех ребрах равна a и сумма квадратов равна b. Чему равна сумма их кубов, если $a=6$, а $b=6$?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Новицкий Н.В., аспирант Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.*

Обозначим числа, записанные в вершинах, $x_i, i=1...4$. По условию,

$$x_1+x_2 \ + \ x_1+x_3 \ + \ x_1+x_4 \ + \ x_2+x_3 \ + \ x_2+x_4 \ + \ x_3+x_4 \ = a, \text{ откуда}$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{a}{3}. \text{ Тогда}$$

$$b= \ x_1+x_2 \ ^2+ \ x_1+x_3 \ ^2+ \ x_1+x_4 \ ^2+ \ x_2+x_3 \ ^2+ \ x_2+x_4 \ ^2+ \ x_3+x_4 \ ^2=$$

$$=3 \ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \ +2 \ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4 \ =2 \ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \ +$$

$$+ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \ ^2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{b-\frac{a^2}{9}}{2}=\frac{9b-a^2}{18}.$$

$$x_1+x_2 \ ^3+ \ x_1+x_3 \ ^3+ \ x_1+x_4 \ ^3+ \ x_2+x_3 \ ^3+ \ x_2+x_4 \ ^3+ \ x_3+x_4 \ ^3=$$

$$= \ x_1+x_2+x_3+x_4 \ \ x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+2x_3x_4+x_4^2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4 \ +$$

$$+ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \ \ x_1^2+2x_1x_3+x_3^2+x_2^2+2x_2x_4+x_4^2-x_1x_2-x_1x_4-x_2x_3-x_3x_4 \ +$$

$$+ \ x_1+x_2+x_3+x_4 \ \ x_1^2+2x_1x_4+x_4^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4-x_3x_4 \ =$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \ \left[3 \ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \ \right]=\frac{a}{3}\cdot\frac{9b-a^2}{18}\cdot 3=\frac{a \ 9b-a^2}{18}.$$

Для $a=6, b=6$ получим $\frac{a \ 9b-a^2}{18}=\frac{6\cdot \ 9\cdot 6-6^2}{18}=6$.

Ответ: 6.

▹ **Задача 6.** Дана прямоугольная пирамида *SABC*, известно, что *SB* – высота этой пирамиды, $\angle ABC=\alpha$ и $SB=AC$. На *SB* как на диаметре построили сферу, она пересекает *SA* и *SC* в *M* и *L* соответственно. Вычислите объем пирамиды *SMBL*, если $SB = h$ и объем *SABC* равен *V*. Выполните расчет для $\alpha = 90^\circ$, $h = \sqrt{2}$, $V = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Майоров С.С., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Решим задачу в общем случае. Проведем *BM* и *BL* в соответствующих боковых гранях. Заметим то, что $\angle BMS$ и $\angle BLS$ – вписанные углы, опирающиеся на диаметр. Следовательно, они прямые, то есть *BM* и *BL* – высоты из прямого угла в $\triangle SAC$ и $\triangle ACB$ соответственно. Обозначим $AB = a$, $BC = b$. Тогда из соотношений в прямоугольном треугольнике знаем, что

$$\frac{SM}{MA} = \frac{SB^2}{AB^2} = \frac{h^2}{a^2} \text{ и } \frac{SL}{LC} = \frac{SB^2}{BC^2} = \frac{h^2}{b^2}.$$

Поскольку пирамиды *SABC* и *SMBL* имеют общий трехгранный угол, то их объемы связаны следующим соотношением:

$$\frac{V_{SMBL}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SL}{SC},$$

откуда $$V_{SMBL} = \frac{h^4}{h^2 + a^2 \quad h^2 + b^2} \cdot V.$$

Запишем формулу объема *SABC*:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SB \cdot S_{ABC} = \frac{1}{6} h \cdot ab \sin\alpha, \; ab = \frac{6V}{h \sin\alpha}.$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + \frac{12V\cos\alpha}{h\sin\alpha}.$$

Теперь подставим получившиеся выражения в формулу для объема *SMBL* и, применив теорему Пифагора, получим:

$$V_{SMBL}=\frac{h^4V}{h^2+a^2\quad h^2+b^2}=\frac{h^4V}{h^4+h^2\;\; a^2+b^2\;\;+\;\;ab^{\;\;2}}=$$

$$=\frac{h^4V}{2h^4+\dfrac{12Vh\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{36V^2}{h^2\sin^2\alpha}}=\frac{h^6V\sin^2\alpha}{2h^6\sin^2\alpha+12Vh^3\cos\alpha\sin\alpha+36V^2}.$$

Подставляя значения параметров из условия, получаем $\frac{4\sqrt{6}}{11}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{11}$.

▹ **Задача 7.** Из полного набора трехзначных чисел наудачу выбирается одно (числа не могут начинаться с цифры 0). Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке возрастания слева направо,

б) в порядке невозрастания слева направо.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Балабекян А.А., студент 2-го курса ФКН ВШЭ.*

а) Пусть событие A – получение трехзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке возрастания слева направо (например, 123, 238). Очевидно, что в записи таких чисел не должно быть цифры 0. Общее количество трехзначных чисел $N=900$. Любые три различные цифры, извлеченные из девяти цифр 1,…,8,9, можно единственным способом упорядочить по возрастанию, поэтому число благоприятствующих событию A исходов

$$M=C_9^3=\frac{9!}{6!3!}=84.$$

Поэтому,

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{84}{900}=\frac{7}{75}.$$

б) Все трехзначные числа с цифрами, расположенными в порядке невозрастания, могут содержать любые три цифры из следующих девяти: $0,1,\ldots,8,9$, возможно, с повторениями. Следовательно,

$$M=\bar{C}_{10}^{3}-1=C_{10+3-1}^{3}-1=C_{12}^{3}-1=\frac{12!}{3!9!}-1=220-1=219.$$

Поэтому

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{219}{900}=\frac{73}{300}.$$

Заметим, что единица вычитается из числа $\bar{C}_{10}^{3}$ потому, что среди сочетаний повторения из 10 по 3 имеется и «трехзначное» число 000.

Ответ: а) $\frac{7}{75}$, б) $\frac{73}{300}$.

▹ **Задача 8.** Дана функция $f(x)=\frac{b^x}{x^2}$, где b — некоторое положительное число. Найдите значение b такое, что для всякой тройки (u,v,t) такой, что $u+v+t=9$ выполняется неравенство $f(u)+f(v)+f(t)\geqslant 9$.

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Наша задача – найти наименьшее $b>0$, такое, что $\frac{b^u}{u^2}+\frac{b^v}{v^2}+\frac{b^t}{t^2}\geqslant 9$ для всех указанных (u,v,t). Оценим для этого наименьшее значение $f(u)+f(v)+f(t)$. По неравенству о средних для трех чисел получаем

$$\frac{b^u}{u^2}+\frac{b^v}{v^2}+\frac{b^t}{t^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^{u+v+t}}{(uvt)^2}}=3b^3\frac{1}{\left(\sqrt[3]{uvt}\right)^2}.$$

Аналогично, $\sqrt[3]{uvt}\leqslant\frac{u+v+t}{3}=3$. Тогда $\frac{1}{\sqrt[3]{uvt}\ ^{2}}\geqslant\frac{1}{9}$.

Таким образом, наименьшее значение $f\ \ u\ \ +f\ \ v\ \ +f\ \ t$ равно $\frac{b^3}{3}$, равенство достигается при $u=v=t=3$. Функция $g\ \ b\ \ =\frac{b^3}{3}$ возрастает, поэтому остается решить уравнение $\frac{b^3}{3}=9\Rightarrow b=3$.

Ответ: 3.

▹ **Задача 9.** Назовем словом любую последовательность любых символов. Андрей играет в игру: вначале ему выдается набор из 2026 слов, состоящих не менее, чем из 2025 букв. Андрей может за один ход приписать к любому слову последовательность, состоящую ровно из 2025 букв, тем самым изменив это слово. Игра заканчивается, если через несколько ходов Андрей может получить набор, в котором найдутся два одинаковых слова. Всегда ли Андрей может выиграть?

Решение. *Условие и решение задачи представил методической комиссии Чиликов Л.В., студент 2-го курса факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета.*

Обозначим для любого слова x через $|x|$ его длину (число букв в нем). Так как различных остатков по модулю 2025 ровно 2025, а слов имеется 2026, то найдутся два слова s и w такие, что $|s|\equiv|w|$ (mod 2025). Пусть остаток от деления $|s|$ на 2025 равен k. Если k = 0, то Андрей последовательно приписывает блоками по 2025 букв справа к слову w слово s, а затем последовательно приписывает к слову s слово w, тоже блоками по 2025.

Пусть теперь $k\neq 0$. В слове s выделим первые k символов. Пусть они образуют слово l. Тогда первым ходом Андрей приписывает к слову w справа любую последовательность из 2025 букв t, оканчивающуюся на l, и вместо слова w получится слово wt. Тогда получаем, что $|wt|\equiv|s|\ \ \mathrm{mod}\,2025$ и конец слова wt такой же, как начало слова s, причем совпадение не менее, чем по $|l|$ буквам. Представим слово $wt = bl$ и слово $s = la$. Тогда длины слов b и a кратны 2025. Тогда можно к слову s несколькими операциями приписать слово b слева, а к слову wt слово a справа.

Ответ: Андрей всегда может выиграть.

▹ **Задача 10.** Хад йцдкд илюд кдэпйцмндзд сцп смгмвп йезщупп $f(x) = 33\left\{\dfrac{5x-1}{33}\right\}+1$. Здфчпаь ьб зьсмчнпезль амшщп, д н маньаь кдспэпаь ыегге ныьо зьсмчнпезло амшьщ.

Решение. *Условие и решение задачи представлены методической комиссии студенткой 2-го курса факультета Прикладной математики и информатики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, Андреевой М.И.*

Букв в русском алфавите 33. Очевидно, функция $f(x) = 33\left\{\dfrac{5x-1}{33}\right\}+1$ и есть ключ к шифровке. Здесь скобки { } обозначают дробную часть числа. Функция $f \;\; x$ переводит целое число от 1 до 33 в другое целое число (т.е. букву по месту в алфавите в другую букву). Для расшифровки использовать функцию не получается, значит, она была использована для шифровки. Составим таблицу дешифровки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
т	ё	щ	м	а	у	ж	ъ	н	б	ф	з	ы	о	в	х	и

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
ь	п	г	ц	й	э	р	д	ч	к	ю	с	е	ш	л	я

Получилось «Эта фраза была зашифрована при помощи функции $f(x)=33\left\{\frac{5x-1}{33}\right\}+1$. Найдите ее неподвижные точки, а в ответе запишите сумму всех неподвижных точек.»

Найдем все x, для которых верно $33\left\{\frac{5x-1}{33}\right\}+1=x$.

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left[\frac{5x-1}{33}\right]=\frac{5x-1}{33}-\left\{\frac{5x-1}{33}\right\}=\frac{5x-1}{33}-\frac{x-1}{33}=\frac{4x}{33}.$$

Будем искать решение в виде $x=\frac{33n}{4}$, где n – целое число. Тогда $\left[\frac{5n}{4}-\frac{1}{33}\right]=n$, откуда $n\leqslant\frac{5n}{4}-\frac{1}{33}<n+1$. Этому уравнению удовлетворяют $n=1,2,3,4$.

Неподвижные точки функции $\frac{33}{4}$, $\frac{33}{2}$, $\frac{99}{4}$, 33, их сумма $\frac{165}{2}=82{,}5$.

Ответ: 82,5.

Критерии определения призеров отборочного тура олимпиады по математике

Каждое верно решенное задание отборочного тура оценивалось в 1 балл. Прошли в заключительный тур олимпиады участники, набравшие:

4-5 класс 4 и более баллов

6 класс 4 и более баллов

7 класс 5 и более баллов

8 класс 3 и более баллов

9 класс 3 и более баллов

10 класс 3 и более баллов

11 класс 3 и более баллов

Статистика отборочного тура олимпиады по математике

В олимпиаде по математике приняли участие 5985 школьников из 8 стран ближнего зарубежья (34 участника) и 75 регионов РФ. Заключительный тур прошел на 45 площадках, в том числе в Москве, Санкт-Петербурге, Владимире, Самаре, Белгороде, Казани, Омске, Тюмени, Ульяновске, Саранске, Улан-Удэ, Красноярске, Елабуге, Волгограде, Ивановской области, Республике Башкортостан, Вологде, Ростове-на-Дону, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Челябинске, Абхазии.

Статистика отборочного тура представлена в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	957	294	95
6	1129	450	86
7	1036	313	198
8	916	382	11
9	710	320	17

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
10	734	189	5
11	503	75	6
Итого	5985	2023	418

Призеры отборочного тура получили сертификаты призера и прошли в заключительный тур.

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады

Максимальная оценка за каждую из задач заключительного тура — 10 баллов. Призовые места определялись в соответствии со следующими критериями:

Класс	1 место	2 место	3 место
4	50	40	30
5	50	40	30
6	50	40	30
7	50	40	30
8	50	40	30
9	50	40	30
10	50	40	30
11	58	43	39

Статистика заключительного тура

В финале олимпиады приняли участие 1305 школьников, из них 7 – иностранцы, остальные проживают в 48 различных регионах России.

Количество участников, призеров и победителей заключительного тура представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	209	52	25
6 класс	294	42	12
7 класс	311	23	7
8 класс	218	20	19
9 класс	153	23	6
10 класс	79	9	1
11 класс	41	9	2
Итого	1305	178	72

Олимпиада по информатике

Задания отборочного тура олимпиады с решениями

Отборочный тур олимпиады ТИИМ по информатике проводился с применением системы автоматического тестирования решений учащихся на наборах тестовых данных. Каждая из 6 задач оценивалась максимально в 100 баллов, в соответствии с количеством успешно пройденных тестов. Задания были рассчитаны на учащихся 8-11 классов, все учащиеся решали один вариант. На решение отводилось 5 часов как для отборочного, так и для заключительного тура.

9 класс и младше

▹ **Задача 1. Помогите математику**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Британский математик Джон Литлвуд однажды высказался о великом индийском математике Сринивасе Рамануджане: «каждое натуральное число было его личным другом».

Однажды Рамануджану для решения одной сложной математической задачи понадобилось ответить на t вопросов. Каждый вопрос имел вид: сколько существует целых положительных чисел, которые делятся на x, но не делятся на y и при этом не превосходят n?

Рамануджан смог ответить на все вопросы в уме, ведь он дружил со всеми натуральными числами. Однако он просит вас написать программу, которая ответит на каждый вопрос, чтобы проверить, что он нигде не ошибся.

Входные данные

Первая строка содержит число t $(1 \le t \le 10^5)$ — количество вопросов. Далее следует описание вопросов. Каждый вопрос описывается числами n, x, y $(1 \le n, x, y \le 10^{18})$, записанными через пробел в отдельной строке для каждого вопроса.

Выходные данные

Вывод должен содержать ответы на вопросы, каждый ответ в отдельной строке.

Критерии оценки

Решения, верно работающие при $t \times n \le 10^5$, будут получать не менее 50 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3 4 6 1 2 2 5	3

Решение задачи

На 50 баллов данную задачу можно решить полным перебором: для каждого запроса перебрать все числа от 1 до n, посчитав среди этих чисел количество таких, которые делятся на a, но не делятся на b. К полному решению приводят следующие наблюдения:

1) количество чисел от 1 до n, которые делятся на a, равно $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$;

2) количество чисел от 1 до n, которые делятся и на a, и на b, равно $\left\lfloor \frac{n}{[a,b]} \right\rfloor$, где $[a, b]$ — НОК чисел a и b;

3) из пунктов 1 и 2 следует, что количество чисел от 1 до n, которые делятся на a, но не делятся на b, равно $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{[a,b]} \right\rfloor$. Осталось вспомнить, что НОК двух чисел равно отношению их произведения и их НОД, а НОД двух чисел можно находить алгоритмом Евклида или встроенными библиотечными функциями за $O\left(\max\left(\log a, \log b\right)\right)$. Таким образом получено решение за $O\left(\max\left(\log a, \log b\right)\right)$ на запрос. Итоговая асимптотика полного решения: $O\left(t \max\left(\log a, \log b\right)\right)$.

Авторское решение на языке C++:

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

#define int ll

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    int t = 1;
    cin >> t;

    auto solve_stupid = [&](ll n, ll x, ll y) -> ll {
        ll ans = 0;
        for (ll i = 1; i <= n; ++i) {
            if (i % x == 0 && i % y != 0) {
                ++ans;
            }
        }
        return ans;
    };

    auto solve_smart = [&](ll n, ll x, ll y) -> ll {
        auto get = [] (ll n, ll x) {
            // сколько чисел от 1 до n делятся на x
            return n / x;
        };

        auto lcm = [] (ll a, ll b) -> ll {
            return a / __gcd(a, b) * b;
        };

        return get(n, x) - get(n, lcm(x, y));
    };

    while (t--) {
        ll n, x, y;
        cin >> n >> x >> y;
        cout << solve_smart(n, x, y) << '\n';
    }

    return 0;
}
```

▹ **Задача 2. Волшебное слово**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Уровнем волшебства строки назовем максимальное количество подряд идущих слов «tiim» (без кавычек), которые могут получиться удалением некоторых символов строки. Буратино решил посадить волшебный лес из деревьев, на которых будут расти деньги. От кота Базилио он узнал, что если посадить в землю строку длиной n, то она вырастет в дерево, на котором будет висеть количество монет, равное уровню волшебства строки. У Буратино есть t строк. Помогите ему узнать, сколько монет даст каждое выращенное им дерево.

Входные данные

В первой строке написано натуральное число t $(1 \leq t \leq 100)$ — количество строк у Буратино. В следующих $2t$ строках следует описание всех имеющихся у него строк. Для каждого слова сначала записана его длина, а на следующей строке записана сама строка. (Для лучшего понимания смотрите тесты).

Выходные данные

Выведите t чисел, каждое в отдельной строке — ответы для каждой из строк, имеющихся у Буратино.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3 tabiim timi abtmivmimabtioim	1

Решение задачи

Разбор

Вместо того чтобы удалять буквы из исходной строки, будем идти по этой строке и добавлять буквы в итоговый ответ. Можно заметить, что для добавления букв выгоднее всего использовать жадную стратегию: идти по буквам строки слева направо и жадно набирать из букв слово «tiim». Такое решение будет иметь асимптотику $O\ \ n$.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    int T;
    cin >> T;

    auto solve_test = [] () {
        int n; cin >> n;
        string s; cin >> s;

        int ans = 0, ost = 0;
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            if (ost == 0 && s[i] == 't') {
                ++ost;
            } else if (ost == 1 && s[i] == 'i') {
                 ++ost;
            } else if (ost == 2 && s[i] == 'i') {
                ++ost;
            } else if (ost == 3 && s[i] == 'm') {
                ++ans;
                ost = 0;
            }
        }

        return ans;
    };

    while (T --> 0) {
        cout << solve_test() << '\n';
    }

    return 0;
}
```

▹ Задача 3. Полотенце

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Мы строили-строили, и наконец построили. Ура!

— Чебурашка

Скоро у Крокодила Гены день рождения, поэтому Чебурашка решил подарить ему *полотенце* прямоугольной формы. Чебурашка хочет, чтобы длины сторон были целыми положительными числами. Он знает, что Гена любит число x (x **четное**), поэтому он собирается подобрать полотенце так, чтобы его периметр (сумма длин сторон полотенца) был равен x. Чтобы подчеркнуть значимость подарка, он хочет подарить полотенце самой большой возможной площади.

Помогите Чебурашке определить максимально возможную площадь полотенца с фиксированным периметром x.

Входные данные

Каждый тест содержит несколько наборов входных данных. Первая строка содержит число t $(1 \le t \le 10)$ — количество наборов входных данных. Каждый набор описывается в отдельной строке одним числом x $(4 \le x \le 10^9)$ — периметром полотенца.

Выходные данные

Для каждого набора входных данных в отдельной строке выведите максимально возможную площадь полотенца с целочисленными сторонами и периметром x.

Критерии оценки

Решения, правильно работающие на тестах, где $x \le 10^5$, будут набирать не менее 30 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3	1

Замечание

Для периметра 4 существует единственное полотенце 1x1, которое имеет площадь 1.

Для периметра 10 существуют полотенца размера 2х3, 1х4. Из них максимальную площадь 6 имеет полотенце 2х3.

Для периметра 12 существуют полотенца размера 1х5, 2х4, 3х3. Из них максимальную площадь 9 имеет полотенце 3х3.

Решение задачи

Разбор

Заметим, что стороны искомого прямоугольника являются решениями уравнения $x^2 - ax + b = 0$, где a — сумма длин сторон (полупериметр), b — искомая максимальная площадь. Посмотрим на дискриминант этого уравнения $D = a^2 - 4b$. Так как стороны являются целыми числами, то дискриминант должен быть точным квадратом. Теперь имеем уравнение $n^2 = a^2 - 4b$, из которого следует, что $b = \frac{a^2 - b^2}{4}$. Мы хотим максимизировать b, а значит минимизировать n. Заметим, что нам достаточно, чтобы a и n были одной четности, чтобы b было целым числом. Значит, оптимальное n равно либо 0, либо 1. Таким образом, за $O(1)$ можно найти оптимальное n, из которого мы узнаем оптимальное b. Так как $b > 0$ и $a > 0$, то решения уравнения точно будут неотрицательными (убедиться в этом оставим упражнением для заинтересованного читателя). Получается, что на один запрос можно отвечать за $O(1)$. Итоговая асимптотика решения $O(t)$.

Авторское решение на языке С++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

#define int ll

void solve() {
    int a; cin >> a;
    assert(a % 2 == 0);
    a /= 2;
```

```
    auto solve_stupid = [&] () {
        int ans = 0;
        for (int x = 1; x < a; ++x) {
            int y = a - x;
            int S = x * y;
            ans = max(ans, S);
        }
        return ans;
    };

    auto solve_smart = [&] () {
        cerr << a << endl;
        // x^2 - ax + b = 0
        // D = a^2 - 4b = n^2
        // a > n, т.к. a^2 = n^2 + 4b, где b > 0
        // (x, y) = (a +- n) / 2
        // т.е. a и n должны быть одной четности
        // 4b = a^2 - n^2
        // b = (a^2 - n^2) / 4
        // хотим максимизировать b
        // значит хотим минимизировать n

        for (int n = 0; n <= a; ++n) {
            // утверждается что цикл отработает быстро
            int quadro_b = (a * a - n * n);
            if (quadro_b % 4 != 0) {
                continue;
            }
            return quadro_b / 4;
        }
        return -1LL; // такого быть просто не может
    };

    cout << solve_smart() << '\n';
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int t = 1;
    cin >> t;
    while (t--) {
        solve();
    }
    return 0;
}
```

▹ Задача 4. Мечты сбываются

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Уровнем волшебства строки назовем максимальное количество подряд идущих слов «tiim» (без кавычек), которые могут получиться удалением некоторых символов строки.

Буратино ждет, пока вырастут его денежные деревья. Он уже начал представлять, как они взойдут и подарят ему несметные сокровища. Теперь у него в голове появилось t вопросов. Каждый вопрос звучит так: сколько существует строк длины n из строчных символов латинского алфавита с уровнем волшебства k? Помогите ему ответить на каждый вопрос. Так как ответы могут быть очень большими, выводите их по модулю 10^9+7.

Входные данные

В первой строке находится число t ($1 \le t \le 10$) — количество вопросов, которые возникли у Буратино. В следующих t строках описываются вопросы: в каждой строке через пробел вводятся числа n и k ($1 \le n \times k \le 10^6$) — параметры вопроса.

Выходные данные

Для каждого вопроса в отдельной строке выведите ответ, вычисленный по модулю 10^9+7.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3 1 1 4	1

Замечание

Для $n=4$ и $k=1$ существует единственная строка: «tiim».

Решение задачи

Разбор

В авторском решении используется идея динамического программирования: обозначим за $dp\;\; i\;\;\; j\;\;\; k$ – количество строчек длины i из латинских букв, у которых (с помощью удаления букв) можно выделить *j* строк «tiim» и префикс еще одного слова «tiim» длины ровно *k* в конце. При пересчете динамики нужно учитывать, что одна из 26 добавляемых в конец строки букв будет увеличивать длину последнего префикса (параметр *k*) на 1 (при этом если параметр *k* был равен 3, то увеличится параметр *j*, а параметр *k* станет равен 0, т.к. появилось еще одно слово «tiim» в самом конце). Остальные же 25 букв не будут менять параметр *k* и параметр *j*. Изначально можно инициализировать $dp\ 0\ \ 0\ \ 0\ =1$. Ответ после подсчета динамики будет равен $dp\ n\ \ k\ \ 0\ + dp\ n\ \ k\ \ 1\ + dp\ n\ \ k\ \ 2\ + dp\ n\ \ k\ \ 3$. Такая динамика хранит $O\ \ n^2$ состояний и пересчитывается за $O\ \ n^2\Sigma$, где Σ — количество букв в алфавите (в нашем случае 26). Для лучшего понимания решения можно ознакомиться с кодом в архиве авторских решений.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

#define int ll

const int mod = 1'000'000'000 + 7;

int add(int a, int b) {
    a += b;
    if (a >= mod) {
        a -= mod;
    }
    return a;
}

int sub(int a, int b) {
    a -= b;
    if (a < 0) {
        a += mod;
    }
    return a;
}
```

```
int mul(int a, int b) {
    return int(1LL * a * b % mod);
}

const int alpha = 26;

void solve() {
    int n, k;
    cin >> n >> k;

    auto find_ans = [] (int n, int k) {
        vector dp(n + 1, vector<array<int, 4>>(k + 1));
        // dp[i][j][c] - сколько строк длины i, у которых алгоритм
        // выберет j строчек тиим и будет префикс длины c от нового
тиима
        dp[0][0][0] = 1;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            for (int j = 0; j <= k; ++j) {
                dp[i][j][0] = mul(dp[i - 1][j][0], 25);
                if (j) {
                    (dp[i][j][0] += dp[i - 1][j - 1][3]) %= mod;
                }

                for (int c = 1; c < 4; ++c) {
                    dp[i][j][c] = (dp[i - 1][j][c] * 25LL + dp[i -
1][j][c - 1] * 1LL) % mod;
                }
            }
        }
        return ((ll)dp[n][k][0] + dp[n][k][1] + dp[n][k][2] +
dp[n][k][3]) % mod;
    };

    cout << find_ans(n, k) << '\n';
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int t = 1;
    cin >> t;
    while (t--) {
        solve();
    }
    return 0;
}
```

▹ **Задача 5. Большой шалаш**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Иннокентий с друзьями решил построить шалаш. Для этого он направился в лес, в котором расположено n деревьев. Каждое дерево представлено, как точка на двумерной плоскости с целочисленными координатами. Для того чтобы построить шалаш, Иннокентий выбирает три дерева и строит между ними попарно стены из веток и листьев.

Помогите Кеше понять, какой максимальной площади он может построить шалаш.

Гарантируется, что существует три дерева, не лежащие на одной прямой.

Более формально: найдите, какой максимальной площади можно построить невырожденный треугольник на каких-либо трех точках из заданных?

Входные данные

В первой строке содержится число n $(1 \le n \le 1000)$ – количество деревьев в лесу.

В следующих n строках находятся координаты каждого дерева – целые неотрицательные числа, не превосходящие 10^6 (по два числа в каждой строке – x и y координата очередного дерева соответственно).

Выходные данные

В единственной строке выведите ответ, округленный до одного знака после запятой. В качестве разделителя целой и дробной части используйте точку.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
5 0 3 3 3 1	12.0

Замечание

Решения, верно работающие при $n \le 500$, будут получать не менее 70 баллов.

Решение задачи

Разбор

На 70 баллов можно было сдать задачу с помощью полного перебора всех троек точек с помощью трех вложенных циклов с асимптотикой $O(n^3)$. Для этого нужно уметь находить площадь треугольника по координатам его вершин за $O(1)$. Это можно делать либо с помощью формулы Герона, либо с помощью косого произведения двух векторов-сторон. Опишем далее решение с асимптотикой $O(n^2 \log n)$. Построим выпуклую оболочку исходного множества точек (это можно сделать примитивным алгоритмом с итеративным добавлением за $O(n^2)$, информацию можно найти в сети «Интернет»). Можно доказать, что искомый треугольник максимальной площади будет образован тремя точками, которые являются вершинами выпуклой оболочки. Оставим это упражнением для заинтересованного читателя (подсказка: попробуйте предположить, что какая-либо вершина оптимального треугольника не лежит на выпуклой оболочке, а дальше зафиксируйте две остальные вершины и попробуйте «подвигать» третью). Будем перебирать две вершины искомого треугольника во вложенных циклах. Теперь имеем зафиксированное основание перебираемого треугольника. Нам нужно найти максимально удаленную от этого основания вершину, чтобы максимизировать высоту в перебираемом треугольнике, так как при этом и будет максимизироваться его площадь. Как за $O(\log n)$ определить третью вершину, которая будет наиболее удаленной от этой стороны? Для этого заметим, что расстояние от зафиксированной стороны до другой точки на выпуклой оболочке является выпуклой функцией в силу определения выпуклой оболочки (то есть нам выгодно брать вершину где-то «примерно в середине» между двумя зафиксированными вершинами, но не выгодно брать «близко» к одной из зафиксированных). Так как функция выпуклая, то можно применить тернарный поиск для нахождения максимума. Таким образом, для каждой зафиксированной потенциальной стороны треугольника мы перебрали самую удаленную вершину от этой стороны. Так как искомый треугольник с максимальной площадью содержит хотя бы одну из сторон, которую мы перебрали (поскольку мы перебрали все возможные стороны), то он был найден где-то в процессе нашего алгоритма. Данное решение получало 100 баллов. Можно было также реализовать решение, основанное на похожей идее, которое имеет асимптотику $O(n^2)$ и использует технику двух указателей. Оставим это как упражнение заинтересованному читателю.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

#define all(x) (x).begin(),(x).end()
#define len(x) (int)(x).size()

typedef long long ll;
typedef long double ld;
using namespace std;

using ptype = ld;

struct point {
    ptype x, y;

    point operator+(point oth) const {
        return {x + oth.x, y + oth.y};
    }

    point operator-(point oth) const {
        return {x - oth.x, y - oth.y};
    }

    point operator+=(point oth) {
        return *this = *this + oth;
    }

    point operator-=(point oth) {
        return *this = *this - oth;
    }
```

```
    point operator-() const {
        return {-x, -y};
    }

    ptype operator*(point oth) const {
        return x * oth.x + y * oth.y;
    }

    ptype operator%(point oth) const {
        return x * oth.y - oth.x * y;
    }

    ld getLen() const {
        return sqrtl(x * x + y * y);
    }

    ld operator~() const {
        return getLen();
    }

    bool operator==(point oth) const {
        return x == oth.x && y == oth.y;
    }
};


const ld eps = 1e-10;

bool equal(ld source, ld target) {
    return target - eps <= source && source <= target + eps;
}

struct Line {
    ptype a, b, c;

    Line(point p1, point p2) {
        ptype x1 = p1.x, y1 = p1.y;
        ptype x2 = p2.x, y2 = p2.y;

        a = (y1 - y2);
        b = (x2 - x1);
        c = -(a * x1 + b * y1);
    }

    static bool isParallel(Line first, Line second) {
        ptype A1 = first.a, B1 = first.b;
        ptype A2 = second.a, B2 = second.b;
        return equal(B1 * A2 - A1 * B2, (ld) 0);
    }
```

```
    static point getIntersec(Line first, Line second) {
        //a1x + b1y + c1 = 0
        //a2x + b2y + c2 = 0
        //A1*A2*x + B1*A2*y + C1*A2 = 0
        //A1*A2*x + A1*B2*y + A1*C2 = 0
        //(B1*A2 - A1*B2)y + (C1*A2 - A1*C2) = 0
        // y = (A1*C2 - C1*A2) / (B1*A2 - A1*B2)

        ptype A1 = first.a, B1 = first.b, C1 = first.c;
        ptype A2 = second.a, B2 = second.b, C2 = second.c;
        assert(!equal(B1 * A2 - A1 * B2, (ld) 0));

        ptype y = (A1 * C2 - C1 * A2) / (B1*A2 - A1*B2);
        ptype x;
        if (equal(A1, (ld) 0)) {
            assert(!equal(A2, ld(0)));
            x = (-C2 - B2*y) / A2;
        } else {
            x = (-C1 - B1*y) / A1;
        }
        return point{x, y};
    }

    ptype getDist(point p) {
        return (ld) (a * p.x + b * p.y + c) / sqrtl(a * a + b * b);
    }
};

typedef pair<point, point> Cut;

ld getDistCut(point p, Cut c) {
    if ((p - c.first)*(c.second - c.first) <= 0) {
        return (p - c.first).getLen();
    } else if ((p - c.second) * (c.first - c.second) <= 0) {
        return (p - c.second).getLen();
    }

    return abs(Line{c.first, c.second}.getDist(p));
}

ld getArea(point a, point b, point c) {
     ld doubled_area = (b - a) % (c - a);
     return abs(doubled_area) / 2.0;
}

void solve() {
     int n; cin >> n;
     vector<point> ps;

     for (int i = 0; i < n; ++i) {
          ld x, y;
```

```
            cin >> x >> y;
            ps.push_back(point{x, y});
        }

        auto get_convex_hull = [] (vector<point> ps) {
            int n = len(ps);
            point down = *min_element(all(ps), [&](const point p1, const
point p2) {
                if (p1.y == p2.y) {
                    return p1.x < p2.x;
                }
                return p1.y < p2.y;
            });

            sort(all(ps), [&](const point p1, const point p2) {
                if (p1 == down) {
                    return true;
                }

                if (p2 == down) {
                    return false;
                }

                if ((p1 - down) % (p2 - down) == 0) {
                    return ~(p1 - down) < ~(p2 - down);
                }

                return (p1 - down) % (p2 - down) > 0; // значит p1 лежит
раньше p2
            });

            assert(ps[0] == down);
            vector<point> convex;
            convex.push_back(ps[0]);
            convex.push_back(ps[1]);
            for (int i = 2; i < n; ++i) {
                while (len(convex) >= 2) {
                    auto prev = convex[len(convex) - 2];
                    auto cur = convex[len(convex) - 1];
                    auto next = ps[i];
                    if ((cur - prev) % (next - cur) > 0) {
                        break;
                    }
                    convex.pop_back();
                }
                convex.push_back(ps[i]);
            }

            return convex;
        };
```

```
	auto hull = get_convex_hull(ps);
	auto hull_doubled = hull;
	for (auto &el : hull) {
		hull_doubled.push_back(el);
	}

	ld ans = 0;
	for (int i = 0; i < len(hull_doubled); ++i) {
		for (int j = i + 1; j < i + len(hull) && j <
len(hull_doubled); ++j) {
			// можно искать между i и j
			auto cut = make_pair(hull_doubled[i],
hull_doubled[j]);
			auto search = [&] () {
				ld res = 0;
				int left = i, right = j;
				while (right - left > 2) {
					int lm = (2 * left + right) / 3;
					int rm = (left + 2 * right) / 3;

					if (getDistCut(hull_doubled[lm], cut) <
getDistCut(hull_doubled[rm], cut)) {
						left = lm;
					} else {
						right = rm;
					}
				}

				for (int k = max<int>(0, left - 10); k <
min<int>(len(hull_doubled), right + 10); ++k) {
					res = max<ld>(res, getArea(hull_doubled[i],
hull_doubled[j], hull_doubled[k]));
				}

				return res;
			};

			ans = max<ld>(ans, search());
		}
	}

	cout << fixed << setprecision(1) << ans;
}

int main() {
	ios::sync_with_stdio(false);
	cin.tie(nullptr);
	solve();
	return 0;
}
```

▹ **Задача 6. Тайна переписки**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 Мб

Восьмиклассницы Нина и Зина хотят защитить свою переписку от посторонних, поэтому при каждой отправке сообщения шифруют его с использованием нового ключевого слова из англо-русского словаря. Порядок сообщений им известен и словари у них одинаковые, поэтому с ключом для расшифровки никаких проблем не возникает. Однако, школьницам быстро надоело делать это вручную, и они захотели создать программу, которая будет шифровать сообщения за них.

В придуманном шифре повторения букв в ключевом слове удаляются, а алфавит переупорядочивается таким образом, что буквы в ключевом слове появляются последними, а перед ними идут остальные буквы алфавита в их обычном порядке.

Например, для заглавного латинского алфавита с ключевым словом «KEYWORD»:

```
A|B|C|D|E|F|G|H|I|J|K|L|M|N|O|P|Q|R|S|T|U|V|W|X|Y|Z
```

становится:

```
A|B|C|F|G|H|I|J|L|M|N|P|Q|S|T|U|V|X|Z|K|E|Y|W|O|R|D
```

Таким образом `abc` преобразуется в `abc`; `xyz` преобразуется в `ord`.

Все сообщения написаны маленькими буквами.

Пробелы и знаки препинания остаются без изменений.

Напишите программу для шифрования сообщения.

Входные данные

В первой строке записан ключ шифра длиной $0 \le n < 20$.

Во второй строке записано сообщение для расшифровки $0 \le n < 2000$.

Выходные данные

Расшифрованная строка.

Примеры

Входные данные	Результат работы программы
keyword abc	abc
keyword xyz	ord

Решение задачи

Авторское решение задачи на языке Python:

```
abc = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
keyword =  input()
word =  input()
alpha=''
for letter in  abc:
    alpha += '' if letter in keyword else letter
alpha += ''.join(dict.fromkeys(keyword).keys())


s = word.translate(str.maketrans(abc, alpha))
print(s)
```

10-11 класс

▹ Задача 1. Волшебное слово

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Уровнем волшебства строки назовем максимальное количество подряд идущих слов «tiim» (без кавычек), которые могут получиться удалением некоторых символов строки. Буратино решил посадить волшебный лес из деревьев, на которых будут расти деньги. От кота Базилио он узнал, что если посадить в землю строку длиной n, то она вырастет в дерево, на котором будет висеть количество монет, равное уровню волшебства строки. У Буратино есть t строк. Помогите ему узнать, сколько монет даст каждое выращенное им дерево.

Входные данные

В первой строке написано натуральное число t $(1 \le t \le 100)$ — количество строк у Буратино. В следующих $2t$ строках следует описание всех имеющихся у него строк. Для каждого слова сначала записана его длина, а на следующей строке записана сама строка. (Для лучшего понимания смотрите тесты).

Выходные данные

Выведите t чисел, каждое в отдельной строке — ответы для каждой из строк, имеющихся у Буратино.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3 tabiim timi abtmivmimabtioim	1

Решение задачи

Разбор

Вместо того чтобы удалять буквы из исходной строки, будем идти по этой строке и добавлять буквы в итоговый ответ. Можно заметить, что для добавления букв выгоднее всего использовать жадную стратегию: идти по буквам строки слева направо и жадно набирать из букв слово «tiim». Такое решение будет иметь асимптотику $O(n)$.

Авторское решение на языке С++:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    int T;
    cin >> T;

    auto solve_test = [] () {
        int n; cin >> n;
        string s; cin >> s;

        int ans = 0, ost = 0;
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            if (ost == 0 && s[i] == 't') {
                ++ost;
            } else if (ost == 1 && s[i] == 'i') {
                 ++ost;
            } else if (ost == 2 && s[i] == 'i') {
                ++ost;
            } else if (ost == 3 && s[i] == 'm') {
                ++ans;
                ost = 0;
            }
        }

        return ans;
    };

    while (T --> 0) {
        cout << solve_test() << '\n';
    }

    return 0;
}
```

▹ **Задача 2. Экзамен**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

В одном известном вузе есть n студентов первого курса, которые изучают дисциплину «Алгоритмы и структуры данных». Оценка за этот предмет складывается из нескольких факторов:

- оценка за теоретические домашние работы,
- оценка за контрольную работу,
- оценка за семинарские занятия,
- бонусная оценка,
- оценка за экзамен.

Каждая из оценок является целым числом от 0 до 10 включительно. Итоговая оценка за курс считается по следующей формуле: $O_{itog} = 0.25 \times O_{teor} + 0.25 \times O_{kr} + 0.2 \times O_{sem} + 0.3 \times O_{exam} + 0.1 \times O_{bon}$,

где O_{itog} — итоговая оценка за курс; O_{teor} — оценка за теоретические домашние работы; O_{sem} — оценка за семинарские занятия и O_{bon} — бонусная оценка; O_{exam} — оценка за экзамен.

Обратите внимание, что оценка **округляется** до ближайшего целого числа, то есть по правилам арифметического округления (оценка с дробной частью ≥ 0.5 округляется вверх).

Завтра пройдет экзамен по упомянутой дисциплине. У каждого студента есть желаемая итоговая оценка, которую он хочет получить за курс. Также каждый студент знает все свои оценки, кроме оценки за экзамен. Посчитайте для каждого студента, какую минимальную целую оценку от 0 до 10 включительно ему достаточно получить на экзамене, чтобы его итоговая оценка за курс была не ниже желаемой, либо выведите -1, если он не сможет добиться желаемой итоговой оценки независимо от оценки за экзамен.

Входные данные

В первой строке входных данных записано число n ($1 \leq n \leq 10^5$) — количество студентов, которые изучают дисциплину.

В каждой из следующих n строк записано по 5 целых чисел от 0 до 10 включительно — желаемая итоговая оценка соответствующего студента, его оценка за теоретические домашние работы O_{teor}, оценка за контрольную работу O_{kr}, оценка за семинарские занятия O_{sem}, бонусная оценка O_{bon}.

Выходные данные

Выведите n строк: в каждой строке напечатайте одно целое число от 0 до 10 включительно — минимальную целую оценку за экзамен, которую нужно получить соответствующему студенту, чтобы его итоговая оценка была не ниже желаемой, либо –1, если независимо от оценки студента за экзамен его итоговая оценка будет ниже желаемой.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3 4 5 6 4 9 9 9 9 10 10 10 10	-1

Решение задачи

Разбор

Для решения задачи достаточно для каждого студента перебрать оценку от 0 до 10 за экзамен и посчитать по формуле из условия, достигается ли для какой-то из этих оценок желаемая итоговая оценка за курс, и если да, то среди всех подходящих выбрать минимальную. Для того чтобы избежать ошибок округления, можно домножить все оценки на 100 и считать итоговую оценку в целых числах. Итоговая асимптотика решения $O(n)$.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    int n; cin >> n;
    auto solve_test = [&] (int need, int teor, int kr, int sem, int 
bon) -> int {
        for (int exam = 0; exam <= 10; ++exam) {
            int itog = teor * 25 + kr * 25 + sem * 20 + exam * 30 + 
bon * 10;
            if (itog >= need * 100 - 50) {
                return exam;
            }
        }
```

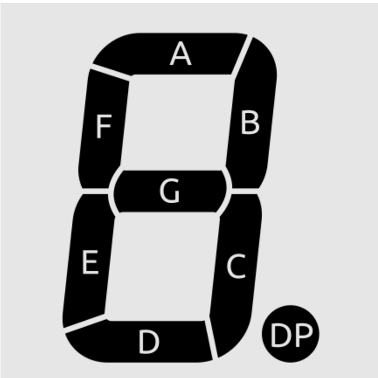
```
        return -1;
    };

    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        int need, teor, kr, sem, bon;
        cin >> need >> teor >> kr >> sem >> bon;

        cout << solve_test(need, teor, kr, sem, bon) << '\n';
    }

    return 0;
}
```

▹ **Задача 3. Тестировщик**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 Мб

Тестировщику электрооборудования попали на проверку семисегментные индикаторы



Изображение индикатора

На каждом индикаторе поочередно выводится произвольный набор чисел. Верное отображение чисел – следующее:

```
 _       _   _       _   _   _   _   _
| |   |  _|  _| |_| |_  |_    | |_| |_|
|_|   | |_   _|   |  _| |_|   | |_|  _|
```

Все выведенные числа выглядят корректно, при этом есть вероятность, что один из сегментов «сломан», т.е. всегда светится или всегда погашен.

Найти сломанный сегмент. Если он есть – вывести его код (A-G), см. рис. 1, если все сегменты работают верно или данных недостаточно, чтобы найти сломанный – вывести ’None’

Входные данные

Три строки с выводом индикаторов в ASCII формате, каждый вывод индикатора представляет собой 3 строки и 3 столбца.

Количество индикаторов

$$n \leq 100$$

Выходные данные

Один символ (A-G), если есть битый сегмент или ’None’

Примеры

<table>
<tr><th>Входные данные</th><th>Результат работы программы</th></tr>
<tr><td><pre>
 _   _
| | | _|
|_| | |_
</pre></td><td>b</td></tr>
</table>

Решение задачи

Решение задачи на языке Python

```
items_tmpl = [' _ \n| |\n|_|', '   \n  |\n  |', ' _ \n _|\n|_ ',
' _ \n _|\n _|', '   \n|_|\n  |', ' _ \n|_ \n _|', ' _ \n|_ \n|_|',
' _ \n  |\n  |', ' _ \n|_|\n|_|', ' _ \n|_|\n _|']


def dead_segment(d):
    return (h:=[None]+[e[0]for e in zip(' a \nfgb\nedc',*d)if
len({*e})==2])[len(h)==2]

line1 =  input()
line2 =  input()
line3 = input()

items = []



for i in range(len(line1)//3):
    item = line1[i*3]+line1[i*3+1]+line1[i*3+2]+'\n'+\
            line2[i*3]+line2[i*3+1]+line2[i*3+2]+'\n'+\
            line3[i*3]+line3[i*3+1]+line3[i*3+2];

    items.append(item);

print(dead_segment(items))
```

▹ **Задача 4. Круговой расклад**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Профессор Трелони открыла новый способ гадания: она берет двумерную плоскость и чертит на ней окружность радиуса r с центром в точке (0, 0). После этого она просит человека, которому она гадает, провести n прямых на этой же плоскости. Далее она считает количество треугольников, образованных этими прямыми, которые лежат полностью внутри окружности (если какая-то точка лежит на границе окружности, то считается, что она тоже лежит внутри).

Помогите профессору Трелони понять, сколько будет треугольников, образованных данными прямыми и лежащих внутри окружности.

Входные данные

В первой строке содержится два числа n и r $(1 \le n, r \le 100)$ – количество прямых и радиус окружности соответственно.

В следующих n строках следует описание всех прямых.

Каждая прямая описывается в отдельной строке тремя числами a, b, c $(-100 \le a, b, c \le 100)$ – коэффициенты уравнения, задающего прямую (уравнением $ax + by + c = 0$).

Гарантируется, что во входных данных нет двух совпадающих прямых.

Выходные данные

В ответе запишите одно число – искомое количество треугольников.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
4 5 -3 1 1 2 -1 -3 0 -2	2

Замечание

Треугольник, образованный тремя прямыми – это треугольник, составленный из их точек пересечения (если они попарно пересекаются).

Треугольники, образованные набором прямых, – это множество треугольников, образованных всевозможными тройками из данных прямых.

Решение задачи

Разбор

Заметим, что треугольник лежит внутри окружности тогда и только тогда, когда все три его вершины лежат внутри этой окружности. Проверить, что вершина лежит внутри окружности, можно с помощью уравнения окружности. Чтобы найти все возможные треугольники, нужно уметь пересекать две прямые. Это можно сделать, если решить систему из двух уравнений прямых, выразив x и y координаты точек пересечения. Для уточнения деталей рекомендуется посмотреть код авторского решения.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>
typedef long long ll;
using namespace std;
#define int ll

const ll INF = 1e18 + 100;

struct line {
    int a, b, c;

    bool operator<(line oth) const {
        return a < oth.a || (a == oth.a && b < oth.b) ||
        (a == oth.a && b == oth.b && c < oth.c);
    }
};

bool IsIntersecInside(line l1, line l2, ll r) {
    auto [a1, b1, c1] = l1;
    auto [a2, b2, c2] = l2;

    ll znam = a1 * b2 - a2 * b1;

    if (znam == 0) {
        return false;
    }
```

```
    // x^2 + y^2 <= r^2
    //

    ll x = (c1 * b2 - c2 * b1);
    ll y = (a1 * c2 - a2 * c1);

    return x * x + y * y <= r * r * znam * znam;
}

void solve() {
    int n, r; cin >> n >> r;
    vector<line> ls;

    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        int a, b, c;
        cin >> a >> b >> c;
        ls.push_back(line{a, b, c});
    }
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        for (int j = i + 1; j < n; ++j) {
            for (int k = j + 1; k < n; ++k) {
                bool res = IsIntersecInside(ls[i], ls[j], r);
                res = res && IsIntersecInside(ls[i], ls[k], r);
                res = res && IsIntersecInside(ls[j], ls[k], r);
                ans += res;
            }
        }
    }

    cout << ans;
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    solve();
    return 0;
}
```

▹ **Задача 5. Мечты сбываются**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Уровнем волшебства строки назовем максимальное количество подряд идущих слов «tiim» (без кавычек), которые могут получиться удалением некоторых символов строки.

Буратино ждет, пока вырастут его денежные деревья. Он уже начал представлять, как они взойдут и подарят ему несметные сокровища. Теперь у него в голове появилось t вопросов. Каждый вопрос звучит так: сколько существует строк длины n из строчных символов латинского алфавита с уровнем волшебства k? Помогите ему ответить на каждый вопрос. Так как ответы могут быть очень большими, выводите их по модулю 10^9+7.

Входные данные

В первой строке находится число t ($1 \le t \le 10$) — количество вопросов, которые возникли у Буратино. В следующих t строках описываются вопросы: в каждой строке через пробел вводятся числа n и k ($1 \le n \times k \le 10^6$) — параметры вопроса.

Выходные данные

Для каждого вопроса в отдельной строке выведите ответ, вычисленный по модулю 10^9+7.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
3 1 1 4	1

Замечание

Для $n=4$ и $k=1$ существует единственная строка: «tiim».

Решение задачи

Разбор

В авторском решении используется идея динамического программирования: обозначим за $dp\ i\ \ j\ \ k$ – количество строчек длины i из латинских букв, у которых (с помощью удаления букв) можно выделить j строк «tiim» и префикс еще одного слова «tiim» длины ровно k в конце. При пересчете динамики нужно учитывать, что одна из 26 добавляемых в конец строки букв будет увеличивать длину последнего префикса (параметр k) на 1 (при этом если параметр k был равен 3, то увеличится параметр j, а параметр k станет равен 0, т.к. появилось еще одно слово «tiim» в самом конце). Остальные же

25 букв не будут менять параметр k и параметр j. Изначально можно инициализировать $dp[0][0][0] = 1$. Ответ после подсчета динамики будет равен $dp[n][k][0] + dp[n][k][1] + dp[n][k][2] + dp[n][k][3]$. Такая динамика хранит $O(n^2)$ состояний и пересчитывается за $O(n^2\Sigma)$, где Σ — количество букв в алфавите (в нашем случае 26). Для лучшего понимания решения можно ознакомиться с кодом в архиве авторских решений.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

#define int ll

const int mod = 1'000'000'000 + 7;

int add(int a, int b) {
    a += b;
    if (a >= mod) {
        a -= mod;
    }
    return a;
}

int sub(int a, int b) {
    a -= b;
    if (a < 0) {
        a += mod;
    }
    return a;
}

int mul(int a, int b) {
    return int(1LL * a * b % mod);
}

const int alpha = 26;

void solve() {
    int n, k;
    cin >> n >> k;

    auto find_ans = [] (int n, int k) {
        vector dp(n + 1, vector<array<int, 4>>(k + 1));
```

```
        // dp[i][j][c] - сколько строк длины i, у которых алгоритм
        // выберет j строчек тиим и будет префикс длины c от нового
тиима
        dp[0][0][0] = 1;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            for (int j = 0; j <= k; ++j) {
                dp[i][j][0] = mul(dp[i - 1][j][0], 25);
                if (j) {
                    (dp[i][j][0] += dp[i - 1][j - 1][3]) %= mod;
                }

                for (int c = 1; c < 4; ++c) {
                    dp[i][j][c] = (dp[i - 1][j][c] * 25LL + dp[i -
1][j][c - 1] * 1LL) % mod;
                }
            }
        }
        return ((ll)dp[n][k][0] + dp[n][k][1] + dp[n][k][2] +
dp[n][k][3]) % mod;
    };

    cout << find_ans(n, k) << '\n';
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int t = 1;
    cin >> t;
    while (t--) {
        solve();
    }
    return 0;
}
```

▹ Задача 6. Громкие шкафы

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Чем больше шкаф, тем громче он падает

— Народная мудрость

В магазине мебели есть отдел, в котором продаются шкафы. В этом отделе в ряд расположены n шкафов с высотами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно. Известно, что расстояние между любыми двумя соседними шкафами составляет 1 метр. Хулиган Петя захотел наделать шума в этом магазине. Поэтому он решил толкнуть один из шкафов влево или вправо. При этом если шкаф падает, то он задевает другие шкафы, которые тоже начинают от этого падать в ту же сторону. Шкаф высотой x заденет все шкафы, которые находятся на расстоянии строго меньше x от него. Также, когда шкаф высотой x падает, то он издает x децибел шума. Это значит, что суммарный шум, наделанный падением каких-то шкафов, равен сумме их высот. Петя задался вопросом, какой максимальный суммарный шум он сможет наделать в магазине, если толкнет ровно один шкаф так, чтобы он начал падать влево или вправо.

Входные данные

В первой строке содержится число t $(1 \le t \le 10)$ — количество наборов входных данных, для которых необходимо найти решение. Каждый набор входных данных начинается с числа n $(1 \le n \le 10^5)$ — количества шкафов в магазине. В следующей строке каждого набора находится массив a из n чисел $(1 \le a_i \le n)$, задающий высоты для шкафов.

Выходные данные

Для каждого набора входных данных выведите одно число в отдельной строке — максимальный шум, который может наделать Петя в магазине, толкнув ровно один любой шкаф влево или вправо.

Критерии оценки

Решения, работающие корректно на тестах, где $n \le 1000$, будут получать не менее 60 баллов.

Примеры

Входные данные	Результат работы программы
3 1 5 1 5 3 3 4 3 1 9 11 9 8 1 1 8 6 5 1 2 1 4 1	18
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1

Решение задачи

Разбор

Представим, что мы толкнули какой-либо шкаф в какую-либо сторону (без ограничения общности считаем, что толкнули его влево). Это означает, что какой-то подотрезок шкафов левее упал. При этом первый шкаф левее, который не упал, находится достаточно далеко от каждого из свалившихся шкафов, поскольку они его не задели. Как найти первый шкаф левее, который не будет задет? За $O(n)$ можно просто идти влево по шкафам и поддерживать самое левое место, куда свалился какой-либо из упавших шкафов. Если следующий шкаф слева находится правее этого места, то он тоже свалится влево и возможно сделает самое левое место еще левее. Таким образом, научились решать задачу за $O(n^2)$: просто симулируем падение каждого шкафа влево и вправо за $O(n)$. Так как всего шкафов *n*, то суммарное количество действий для всех симуляций будет равно $O(n^2)$. Такое решение набирало 60 баллов. Далее опишем решение на 100 баллов. Посчитаем $dp[i]$ – самый левый шкаф, который упадет, если мы толкнем *i*-й шкаф. Будем пересчитывать *dp* слева направо. Изначально считаем, что $dp[i]=i$. Заметим, что $dp[i]$ можно пересчитать как $\min(dp[j])$ по всем *j* таким, что $i-j<a_i$, что равносильно $j>i-a_i$. С помощью вышеописанного способа эту динамику можно посчитать за $O(n^2)$. Научимся считать ее за $O(n\log n)$. Для этого нужно использовать структуру данных, называемую «дерево отрезков»: она умеет находить минимум на подотрезке массива за $O(\log n)$ и обновлять значение по какому-то индексу массива за $O(\log n)$. Будем хранить все насчитанные состояния *dp* в дереве отрезков. Дальше для пересчета $dp[i]$ используем это дерево отрезков, чтобы найти искомый минимум $\min(dp[i-a_i+1], dp[i-a_i+2], \ldots, dp[i])$ за $O(\log n)$. После этого обновим через найденное число значение $dp[i]$ и пойдем вычислять следующие значения *dp*. Таким образом ответ будет равен $\max(i-dp[i]+1)$ по всем возможным *i*. Для того чтобы учесть случай, когда мы толкнули шкаф вправо, можно применить известный для такого типа задач трюк: перевернем изначальный массив и будем решать такую же задачу (толкать шкаф влево) уже на нем. Из двух полученных ответов для исходного и перевернутого массива выберем максимальный. В решении мы сделали $O(n)$ запросов в дерево отрезков, каждый из которых отработал за $O(\log n)$, значит итоговая асимптотика решения $O(n \log n)$.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

#define all(x) (x).begin(),(x).end()

typedef long long ll;
using namespace std;

#define int ll

const int INF = 1e9 + 100;
struct segtree {
    int size = 1;
    vector<pair<int, int>> tree;

    segtree(int n) {
        while (size < n) size *= 2;
        tree.assign(size * 2 - 1, {INF, INF});
    }

    void upd(int i, ll v) {
        upd(i, v, 0, 0, size);
    }

    pair<ll, int> get(int l, int r) {
        return get(l, r, 0, 0, size);
    }

private:
    void upd(int i, ll v, int x, int lx, int rx) {
        if (rx - lx == 1) {
            tree[x] = {v, i};
        } else {
            int m = (rx + lx) >> 1;
            if (i < m) {
                upd(i, v, 2 * x + 1, lx, m);
            } else {
                upd(i, v, 2 * x + 2, m, rx);
            }
            tree[x] = min(tree[2 * x + 1], tree[2 * x + 2]);
```

```
        }
    }

    pair<ll, int> get(int l, int r, int x, int lx, int rx) {
        if (lx >= r || rx <= l) {
            return {INF, INF};
        }

        if (l <= lx && rx <= r) {
            return tree[x];
        }

        int m = (rx + lx) >> 1;
        return min(get(l, r, 2 * x + 1, lx, m), get(l, r, 2 * x + 2,
m, rx));
    }
};

void solve() {
    int n;
    cin >> n;
    vector<int> a(n);
    for (auto &el: a) cin >> el;

    auto solve_60 = [](int n, vector<int> a) {
        auto solve_left = [&]() -> ll {
            // что если толкнем шкаф влево
            ll ans = 0;
            for (int i = 0; i < n; ++i) {
                int left = i - a[i] + 1;
                ll cur = 0;
                for (int j = i; j >= 0 && j >= left; --j) {
                    cur += a[i];
                    left = min(left, j - a[j] + 1);
                }

                ans = max(ans, cur);
            }
            return ans;
        };

        ll ans = solve_left();
        reverse(all(a));
        ans = max<ll>(ans, solve_left());
        return ans;
    };

    auto solve_100 = [](int n, vector<int> a) {
        auto solve_left = [&]() -> ll {
            vector<ll> pref(n + 1);
            for (int i = 0; i < n; ++i) pref[i + 1] = pref[i] + a[i];
```

```
            auto get_sum = [&pref](int left, int right) {
                return pref[right + 1] - pref[left];
            };

            segtree st(n);
            vector<ll> dp(n);

            dp[0] = a[0];
            st.upd(0, 0);

            for (int i = 1; i < n; ++i) {
                auto [mn_val, ind] = st.get(max<int>(0, i - a[i] + 1),
i);
                if (ind == INF) {
                    assert(a[i] == 1);
                    dp[i] = a[i];
                } else {
                    if (mn_val >= i - a[i] + 1) {
                        dp[i] = get_sum(max<int>(0, i - a[i] + 1), i);
                    } else {
                        dp[i] = dp[ind] + get_sum(ind + 1, i);
                    }
                }
                st.upd(i, max<int>(0, i - a[i] + 1));
            }

            return *max_element(all(dp));
        };

        ll ans = solve_left();
        reverse(all(a));
        ans = max<ll>(ans, solve_left());
        return ans;
    };

    cout << solve_100(n, a) << '\n';
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    int t = 1;
    cin >> t;
    while (t--) {
        solve();
    }
    return 0;
}
```

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

▹ **Задача 1. Вопрос встал ребром**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

После тяжелой рабочей недели n друзей собрались вместе отдохнуть и поесть пиццы. Они решили заказать одну большую пиццу и разрезать ее на несколько равных кусков. Чтобы все было справедливо, каждому другу из компании достанется одинаковое количество кусочков. У каждого из друзей есть свое любимое число, и каждый хочет, чтобы количество доставшихся ему кусочков делилось на это число. Помогите друзьям определить, на какое минимальное количество равных кусков нужно разрезать пиццу, чтобы каждый получил равное количество кусков, которое делится на его любимое число.

Входные данные

В первой строке дано число n $(2 \le n \le 10)$ – количество друзей. Во второй строке задано n чисел (каждое от 1 до 10) – любимые числа друзей.

Выходные данные

В ответе выведите одно число – искомое минимальное количество кусков.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
2 3	12

Замечание

Разберем пример из условия. Если разрезать пиццу на 12 кусков, то каждый из двух друзей получит по 6 кусков. 6 делится на 2 и на 3. Можно показать, что разрезать пиццу на меньшее количество кусков так, чтобы удовлетворить все капризы друзей, не получится.

Решение задачи

Разбор

Обозначим минимальное количество кусков, на которые нужно разрезать пиццу, за M. M в первую очередь должно делиться на n (ведь каждому другу должно достаться поровну кусочков), а $\frac{M}{n}$ должно делиться на каждое из любимых чисел друзей. Значит $\frac{M}{n}$ больше или равно, чем НОК любимых чисел друзей. Обозначим это НОК за K. Тогда $M \geq nK$. Заметим, что nK кусков пиццы можно разделить поровну между друзьями, чтобы выполнялись все нужные требования, просто отдав каждому другу по K кусков (ведь K как НОК делится на каждое из любимых чисел друзей). Отсюда получаем ответ $M = nK$. Вычислить НОК всех любимых чисел друзей можно было, разложив каждое число на множители или с помощью вычисления НОД алгоритмом Евклида. Отсюда получаем решение с асимптотикой $O(nA)$ или $O(n\log A)$, где A – максимальное из любимых чисел друзей.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

#define all(x) (x).begin(),(x).end()
#define len(x) (int)(x).size()

typedef long long ll;
typedef long double ld;
using namespace std;

#define int ll

void solve() {
    int n; cin >> n;
    vector<int> a(n);
    for (auto &el : a) cin >> el;
    int x = a[0];
    for (int i = 1; i < n; ++i) {
        x = x / __gcd(a[i], x) * a[i]; // lcm(a[i], x)
    }
    cout << x * n;
```

```
}

signed main(signed argc, char* argv[]) {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    solve();
    return 0;
}
```

▹ **Задача 2. Теория струн**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Музыканту Иннокентию на день рождения подарили новую шестиструнную гитару. На гитаре есть 11 ладов, на которых можно зажимать каждую из шести струн. Для того чтобы получать разные ноты при игре на гитаре, нужно зажимать разные струны на разных ладах, дергая зажатые струны (при этом можно дернуть струну, не зажимая ее ни на каком ладу; давайте считать, что в таком случае мы «зажали струну на ладу под номером 0» и сыграли ее).

Так как Иннокентий еще и математик, то он занумеровал все элементы гитары: струны от самой тонкой (она имеет номер 1) до самой толстой (она имеет номер 6), лады от самого дальнего (он имеет номер 1) до самого ближнего (он имеет номер 11).

Для того чтобы занумеровать еще и ноты, Иннокентий решил изучить нотную теорию для его модели гитары и узнал следующее: при зажатии струны i на ладу x получается такая же нота, как и при зажатии струны $i+1$ на ладу $x+d_i$ (если такое зажатие возможно, т.е. $x+d_i \le 11$).

После изучения этой теории Иннокентий занумеровал ноты, начиная от самой низкой (она получается, если сыграть шестую струну, не зажимая никакого лада, или в наших обозначениях: «зажать струну 6 на ладу под номером 0»), которой присвоил номер 1, и заканчивая самой высокой (которая получается, если сыграть первую струну, зажатую на 11-м ладу).

Ноты были занумерованы Иннокентием так, что одинаковым нотам соответствуют одинаковые номера, а разным нотам соответствуют разные номера, при этом более низкой ноте соответствует меньший номер, чем более высокой. При этом было использовано минимально возможное количество чисел для такой нумерации (другими словами, никакое число от 1 до максимального не было «пропущено»).

Чтобы закрепить всю эту теорию у себя в голове, Иннокентий придумал себе N вопросов для самопроверки. Вопрос под номером j (для $j = 1, \ldots, N$) звучит так: «Если я зажму струну a_j на ладу b_j и сыграю ее, то ноту с каким номером я получу?» Иннокентий ответил на все вопросы в уме. Но он думает, что мог ошибиться, поэтому просит вас написать программу, которая найдет ответ на каждый из его вопросов.

Входные данные

Первая строка содержит пять чисел d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 $(1 \le d_i \le 11)$ – "разницы" между соседними струнами из нотной теории, изученной Иннокентием. Вторая строка содержит одно целое число N $(1 \le N \le 12 \times 6)$ – количество вопросов. В следующих N строках следует описание вопросов. В вопросе с номером j содержится два числа a_j и b_j $(1 \le a_j \le 6, 0 \le b_j \le 11)$ – номер струны и номер лада из вопроса соответственно.

Выходные данные

В ответе выведите N строк. В каждой строке выведите одно число – ответ на соответствующий запрос.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
5 4 5 5 5 0 0 0 0 0 0 0 11	1

Замечание

Для обычной шестиструнной гитары из реальной жизни $d_1 = d_3 = d_4 = d_5 = 5$ и $d_2 = 4$. Обратите внимание, что «зажать струну на ладу 0» означает «не зажимать струну ни на каком ладу».

Решение задачи

Разбор

Данная задача является некоторым обобщением концепции гитарной табулатуры. Для решения достаточно было пройтись в нужном порядке двумя вложенными циклами по номерам струн и номерам ладов и задать ноту на каждую пару (струна, лад), сохранив эту ноту в двумерном массиве ответов. Для этого нужно было посмотреть, задавали ли мы до этого идентичную ноту на прошлых струнах (например, сравнив номер лада минус d_{i-1} с нулем), и, если задавали, то пронумеровать так же, как и идентичную ноту, а иначе присвоить оригинальный номер, который равен максимальному ранее присвоенному номеру, увеличенному на 1. Для лучшего понимания можете посмотреть код авторского решения.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    vector<int> d = {0, 5, 4, 5, 5, 5};
    for (int i = 1; i <= 5; ++i) {
        cin >> d[i];
    }

    vector<vector<int>> answer(7, vector<int>(12));
    for (int x = 0; x <= 11; ++x) {
        answer[6][x] = x + 1;
    }

    for (int i = 5; i >= 1; --i) {
```

```
        for (int x = 0; x <= 11; ++x) {
            if (x + d[i] <= 11) {
                answer[i][x] = answer[i + 1][x + d[i]];
            } else {
                answer[i][x] = answer[i][x - 1] + 1;
            }
        }
    }

    int N; cin >> N;
    for (int it = 0; it < N; ++it) {
        int a, b;
        cin >> a >> b;
        cout << answer[a][b] << '\n';
    }

    return 0;
}
```

▹ **Задача 3. Сходка музыкантов**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Сразу после того, как Иннокентий получил в подарок на день рождения гитару, он решил организовать сходку музыкантов. Он решил позвать на сходку n своих друзей, попутно пронумеровав их от 1 до n (так как Иннокентий математик, он любит нумеровать все вокруг). Так как все друзья Иннокентия очень важные люди, то все они не смогут прийти к началу сходки, а придут только некоторое количество минут после начала: i-й друг обещал прийти спустя a_i минут после начала сходки. Иннокентий будет считать сходку классной, если в какой-то момент времени на сходке присутствует хотя бы k его друзей. Друзья хотят, чтобы сходка была классной, а также чтобы каждый человек пробыл на сходке равное количество минут, ведь так будет справедливее всего. Так как они очень занятые, то они хотят выбрать минимально возможное количество минут, которое каждый человек обязан провести на сходке, чтобы сходка была классной. Помогите друзьям определить, сколько минут каждый из них должен провести на сходке, чтобы Иннокентий считал ее классной.

Входные данные

В первой строке вводится два целых числа n и k ($1 \le k \le n \le 10^5$) – количество друзей Иннокентия, а также количество друзей Иннокентия, которые должны одновременно присутствовать на сходке, чтобы Иннокентий посчитал ее крутой. Во второй строке вводится n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($1 \le a_i \le 10^9$) – на сколько минут каждый друг опоздает на сходку. Гарантируется, что все друзья пришли в разное время, то есть все числа в массиве a различны.

Выходные данные

В ответе выведите одно число – минимальное количество минут, которое каждый обязан провести на сходке, чтобы Иннокентий считал ее классной.

Критерии оценки

Решения, правильно работающие для $n \times \max\ a_i\ \le 10^5$, будут набирать не менее 40 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
5 3 10 3 13 16	7

Замечание

Обратите внимание, что в момент ухода со сходки человек не находится на ней. Другими словами, если человек пришел спустя x минут после начала и провел t минут на сходке, то он находился на сходке в полуинтервале времени $x, x+t$ спустя начала сходки.

Решение задачи

Разбор

Авторское решение данной задачи использует решение за $O\ n\log n\log A$, где A – максимальный возможный ответ. Основная идея решения заключается в двоичном поиске по ответу: так мы сводим задачу нахождения ответа к задаче о проверке, является ли вечеринка классной при фиксированном ответе. Для того чтобы проверить, что ответ не превосходит определенного числа t, нам нужно проверить, что существует точка на координатной прямой, которая содержит хотя бы k полуинтервалов вида $a_i, a_i + t$. Понятно, что достаточно проверить все точки, которые являются началом какого-либо из этих полуинтервалов. Это можно сделать с помощью сканирующей прямой, пройдясь упорядоченно по точкам открытия и закрытия всех полуинтервалов $a_i, a_i + t$ и для каждой точки открытия проверяя, сколько открытых полуинтервалов содержат эту точку, а также изменяя счетчик текущих открытых полуинтервалов в зависимости от типа точки (началом или концом полуинтервала которого она является). Сложность проверки составляет $O \;\; n\log n$, т.к. для проверки мы сортируем $O \;\; n$ точек, являющихся началами и концами отрезков. Сложность всего решения составляет $O \;\; n\log n\log A$, т.к. проверка осуществляется на каждой из $O \;\; \log A$ итераций двоичного поиска по ответу. Для лучшего понимания рекомендуется посмотреть код в архиве с решениями.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);

    int n, k;
    cin >> n >> k;

    vector<int> a(n);
    for (auto &el : a) cin >> el;

    auto check = [&] (int time) {
        vector<pair<int, int>> events;
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            events.push_back({a[i], 1});
            events.push_back({a[i] + time, -1}); // если кто-то уходит
```

```
в то же время как другой приходит, то он уйдет раньше
        }

        sort(events.begin(), events.end());

        int cnt = 0;
        for (auto [x, type] : events) {
            cnt += type;
            if (cnt >= k) {
                return true;
            }
        }

        return false;
    };

    int l = -1, r = 1e9 + 100;
    while (r - l > 1) {
        int mid = (r + l) >> 1;
        if (check(mid)) {
            r = mid;
        } else {
            l = mid;
        }
    }

    assert(r > 0);

    cout << r;

    return 0;
}
```

▹ Задача 4. Сложность мелодии

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Эта задача является продолжением задачи «Теория струн». Для полного понимания условия прочитайте сначала задачу «Теория струн». После того как Кеша пронумеровал все ноты, он решил начать играть мелодии. Любая мелодия представляет собой последовательность нот. Каждая нота в последовательности описывается и задается своим номером (в нумерации, которую придумал Иннокентий в задаче «Теория струн»). Представим, что Иннокентий сначала сыграл струну i на ладу x, а сразу после этого сыграл струну j на ладу y. Расстоянием между этими последовательно сыгранными нотами назовем число $|i-j|+|x-y|$. Заметим, что одну и ту же ноту можно сыграть на разных струнах, поэтому расстояние между двумя одинаковыми нотами может быть разным и зависит от того, на каких струнах мы эти ноты сыграли. Для лучшего понимания смотрите секцию «Замечание». Сложностью мелодии назовем суммарное расстояние между всеми соседними сыгранными нотами (заметим, что сложность мелодии может быть разной в зависимости от того, на каких струнах мы играли ноты из нее). Для заданной мелодии определите, с какой минимально возможной сложностью можно ее сыграть.

Входные данные

Первая строка содержит пять чисел d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 $(1 \le d_i \le 11)$ – «разницы» между соседними струнами из нотной теории, изученной Иннокентием (означающие то же самое, что и в задаче «Теория струн»). Вторая строка содержит одно целое число n ($2 \le n \le 10^5$) – длину последовательности нот. Третья строка содержит n натуральных чисел – номера нот в последовательности (нумерация определяется, как в задаче «Теория струн»). Гарантируется, что все номера нот корректны и любую ноту можно каким-либо образом сыграть на гитаре.

Выходные данные

В ответе выведите одно число – минимально возможную сложность заданной мелодии.

Критерии оценки

Решения, правильно работающие при $n \le 5$, получат не менее 30 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
5 4 5 5 5 6	1

Замечание

Для обычной шестиструнной гитары из реальной жизни $d_1 = d_3 = d_4 = d_5 = 5$ и $d_2 = 4$. В примере из условия ноты 1 и 6 обе можно сыграть на шестой струне, тогда расстояние между ними будет равно $|6-6|+|0-5|=5$. Но легче будет сыграть ноту 1 на шестой струне, а ноту 5 на пятой струне, тогда расстояние между нотами будет равно $|6-5|+|0-0|=1$.

Решение задачи

Разбор

Для того чтобы определять по паре (струна, лад) номер ноты, воспользуемся решением задачи «Теория струн». Для тестов, где $n \le 5$, можно было написать решение, которое перебирало все возможные варианты (струна, лад) для каждой из сыгранных нот и определяло бы минимальную сложность среди всех перебранных вариантов. Для получения 100 баллов можно было использовать концепцию динамического программирования: за $dp\ i\ \ j$ обозначим минимальное расстояние, за которое мы сыграли первые *i* нот, если последнюю сыгранную ноту мы сыграли на струне *j*. Пересчет такой динамики достаточно тривиален: будем перебирать прошлую струну, на которой мы сыграли ноту и следующую струну, на которой собираемся сыграть ноту. Для каждой из струн найдем, на каком ладу мы должны ее зажать, чтобы сыграть нужную ноту. Таким образом мы найдем расстояние между последней сыгранной нотой и нотой, которую мы собираемся сыграть. Тогда $dp\ i\ \ j$ равно минимуму по всем $dp\ i-1\ \ k\ + dist$, где $dist$ – это расстояние между нотой a_i, которую мы собираемся сыграть на струне *j* и нотой a_{i-1}, которую сыграли на струне *k*. Итоговый ответ будет равен минимальному числу в строке $dp\ n$. Для лучшего понимания рекомендуем посмотреть код авторского решения.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

int main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    vector<int> d = {0, 5, 4, 5, 5, 5};
    for (int i = 1; i <= 5; ++i) {
        cin >> d[i];
    }

    auto get_numeration = [&]() {
        vector<vector<int> > answer(7, vector<int>(12));
        for (int x = 0; x <= 11; ++x) {
            answer[6][x] = x + 1;
        }

        for (int i = 5; i >= 1; --i) {
            for (int x = 0; x <= 11; ++x) {
                if (x + d[i] <= 11) {
                    answer[i][x] = answer[i + 1][x + d[i]];
                } else {
                    answer[i][x] = answer[i][x - 1] + 1;
                }
            }
        }

        return answer;
    };


    auto numeration = get_numeration();
    const int INF = 1e9 + 100;

    auto find_note_at_string = [&](int note, int str) {
        for (int x = 0; x <= 11; ++x) {
            if (numeration[str][x] == note) {
                return x;
            }
        }
        return INF;
    };

    int n;
    cin >> n;
    vector<int> a(n);
    for (auto &el: a) cin >> el;
```

```
    vector<vector<int> > dp(n, vector<int>(7, INF));
    // dp[i][j] - минимальная стоимость если сыграл ноты до i-й и
    // последнюю ноту сыграл на струне j
    for (int j = 1; j <= 6; ++j) {
        int x = find_note_at_string(a[0], j);
        if (0 <= x && x <= 11) {
            dp[0][j] = 0;
        } else {
            dp[0][j] = INF;
        }
    }

    for (int i = 1; i < n; ++i) {
        for (int prev = 1; prev <= 6; ++prev) {
            int x = find_note_at_string(a[i - 1], prev);

            if (x < 0 || x > 11) {
                continue;
            }

            for (int nxt = 1; nxt <= 6; ++nxt) {
                int y = find_note_at_string(a[i], nxt);

                if (0 <= y && y <= 11) {
                    int dist = abs(x - y) + abs(prev - nxt);
                    dp[i][nxt] = min(dp[i][nxt], dp[i - 1][prev] +
dist);
                }
            }
        }
    }

    cout << *min_element(dp.back().begin(), dp.back().end());

    return 0;
}
```

▹ Задача 5. Римское произведение

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

В римской системе счисления можно представить любое число от 1 до 3999 (смотрите пример для лучшего понимания). Гай Юлий Цезарь, один из правителей Римской империи, решил оптимизировать написание чисел в римской системе счисления. Он заметил, что иногда короче записывать число как произведение нескольких римских чисел. Длиной такой записи назовем суммарную длину строки без пробелов со знаками умножения. Например, длина представления XXI*XXX равна 7. При этом сама римская запись числа тоже является представлением (например, IX имеет длину 2). Он поручил вам написать программу, которая вычислит для T чисел длину самого короткого представления каждого из них. Для лучшего понимания смотрите тесты и примечания.

Входные данные

В первой строке содержится число T $(1 \leq T \leq 10^5)$ – количество чисел, для которых нужно найти длину самого короткого представления. В каждой из следующих T строк записано по одному числу. Каждое из чисел может принимать значения от 1 до 10^5.

Выходные данные

Для каждого числа в отдельной строке выведите ответ на задачу – минимально возможное количество символов в представлении числа в виде произведения римских чисел. Если число **невозможно** представить в виде произведения римских чисел от 1 до 3999, то выведите для него в ответе 100001.

Критерии оценки

Решения, верно работающие для $t \leq 10$, будут получать не менее 30 баллов. Решения, верно работающие для $t \leq 1000$, будут получать не менее 60 баллов.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
8	1

Замечание

Например, число 12 можно представить в виде XII (12) или VI*II (6 * 2) или как IV*III (4*3). Таким образом, самым коротким представлением числа

12 является XII, оно имеет длину 3. Для числа 4000 самым коротким представлением является IV*M. Длина такого представления равна 4. Для числа 38 самым коротким представлением является XIV*II. Оно имеет длину 6.

Решение задачи

Разбор

Обозначим искомое минимальное количество символов в представлении (в виде произведения римских чисел) числа m за ans_m. Пусть мы хотим представить некоторое число n в виде произведения чисел, записанных в римской системе, минимальной длины. Есть два варианта: либо мы можем просто записать это число в римской системе, либо это число является произведением не менее двух чисел, которые записаны в римской системе. Давайте исходно считать ответом для числа n его длину представления в римской системе (если оно записывается в римской системе, а иначе 100001). Понятно, что от перестановки множителей произведение не будет меняться. Давайте переберем первый множитель среди делителей числа n. Тогда ans_n равен минимуму по всем возможным делителям числа n выражения $ans_d + ans_{\frac{n}{d}} + 1$, где d – это произвольный делитель числа n. Эта формула получается так: мы берем минимальную искомую запись числа d, добавляем к ней справа символ умножения и после этого приписываем справа минимальную возможную запись числа $\frac{n}{d}$. Мы не можем заранее знать, с какого делителя начинается минимальная запись, поэтому как раз перебираем все возможные делители числа n. Для того чтобы мы знали корректные значения всех ans_i, где $i < n$, будем пересчитывать массив ans в порядке возрастания индексов. В зависимости от эффективности алгоритма поиска делителей числа решение могло набирать 30-100 баллов. На 100 баллов предполагалось решение за $O(A \log A + T)$ (где A – максимальное число в запросах) с использованием алгоритма нахождения всех делителей для каждого от 1 до A, в котором мы для каждого числа от 1 до A проходимся циклом по всем кратным ему числам и добавляем этот делитель в отдельный массив для каждого числа (таким образом мы выполним

$$A+\left\lfloor \frac{A}{2} \right\rfloor+\left\lfloor \frac{A}{3} \right\rfloor+\ldots+\left\lfloor \frac{A}{A} \right\rfloor=O\left(A\log A\right)$$ операций.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

#define all(x) (x).begin(),(x).end()
#define len(x) (int)(x).size()

typedef long long ll;
typedef long double ld;
using namespace std;

#define int ll
#define double ld

vector<int> digits = {1000, 900,
    500, 400,
    100, 90,
    50, 40,
    10, 9,
    5, 4,
    1};
vector<int> length = {1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1, 2,
    1};


int roman_len(int x) {
    assert(len(digits) == len(length));
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < len(digits) && x > 0; ++i) {
        while (x >= digits[i]) {
            x -= digits[i];
            ans += length[i];
        }
    }

    return ans;
}

constexpr int maxn = 100'000 + 1;
void solve() {
```

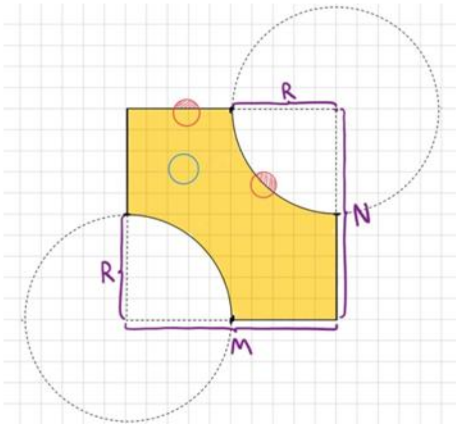
```
     int t; cin >> t;
     vector<int> qs(t);
     for (auto &el : qs) cin >> el;

    vector<int> ans(maxn, maxn);
    vector<vector<int>> dels(maxn);

    for (int i = 2; i < maxn; ++i) {
        for (int j = i; j < maxn; j += i) {
            dels[j].push_back(i);
        }
    }

    for (int i = 1; i < 4000; ++i) {
        ans[i] = min(ans[i], roman_len(i));
    }

    for (int i = 1; i < maxn; ++i) {
        for (auto del : dels[i]) {
            ans[i] = min(ans[i], ans[del] + ans[i / del] + 1);
        }
    }

    for (auto el : qs) {
        cout << ans[el] << '\n';
    }
}

signed main() {
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
#ifdef ONPC
    assert(freopen("input.txt", "r", stdin));
    assert(freopen("output.txt", "w", stdout));
#endif

    int TT = 1;
#ifdef MT
    cin >> TT;
#endif
    while (TT--) {
        solve();
    }

#ifdef ONPC
    cerr << "Time(ms): " << 1000 * clock() / CLOCKS_PER_SEC << endl;
#endif
    return 0;
}
```

▹ **Задача 6. Красивый стол**

Ограничение времени: 1 секунда

Ограничение памяти: 256 мегабайт

Бизнесмен Владимир решил купить ресторан. В центре ресторана он решил расположить большой прямоугольный стол размерами N дециметров в длину и M дециметров в ширину. Для красоты Владимир отпилил от двух противоположных углов стола по четвертинке окружностей радиуса R дециметров (центры окружностей находятся ровно в противоположных углах стола, для лучшего понимания смотрите рисунок). Гарантируется, что стол после этого **остался связным** и не развалился на две части. В случайное место этого стола поставили круглую тарелку с деликатесом, радиусом 1 дециметр. Известно, что центр этой тарелки попал на стол или на его границы, ведь если бы центр находился вне стола, то тарелка упала бы и разбилась, что очень сильно расстроило бы Владимира. Владимир задался вопросом, с какой вероятностью случайно поставленная тарелка не выпирает за границы стола, то есть если посмотреть на стол сверху, то границы тарелки находятся строго внутри стола (возможно касаясь границ стола). Помогите Владимиру ответить на эту задачу. Ответ выведите в процентах, округлив до ближайшего целого числа (то есть ваш ответ должен быть равен целому числу от 0 до 100).



Изображение стола

Входные данные

В единственной строке входных данных находятся три целых числа: N, M и R $(5 \le N, M, R \le 100)$ – размеры стола и радиус отпиленной части соответственно.

Выходные данные

В ответе выведите одно целое число от 0 до 100, которое означает, сколько процентов составляет вероятность того, что тарелка, поставленная на случайное место стола, не выпирает за границы стола.

Пример

Входные данные	Результат работы программы
10 10 5	48

Замечание

Красным на рисунке показаны выпирающие тарелки.

Синим на рисунке показана тарелка, полностью лежащая внутри стола.

Решение задачи

Разбор

Площадь стола можно найти по формуле $N \times M - 2 \times \frac{\pi R^2}{4}$ (ведь мы из прямоугольника площади $N \times M$ вырезали две четвертинки окружностей, площадь каждой из которых равна $\frac{\pi R^2}{4}$. Несложно понять, что поставленная тарелка не будет падать со стола тогда и только тогда, когда ее центр находится строго внутри стола. Стоящая на столе тарелка будет вылезать за границы стола, если расстояние от ее центра до какой-либо граничной точки стола строго меньше 1. Это означает, что либо центр тарелки находится на расстоянии строго меньше $R+1$ от одного из двух углов стола, где сделан вырез радиуса *R*, либо центр тарелки находится на расстоянии строго меньше 1 от стороны прямоугольника, которым образован стол (до того, как из него вырезали четвертинки окружностей). Для произвольной известной точки мы можем за O 1 проверить выполнение одного из этих двух условий. Для решения задачи можно было воспользоваться методом Монте-Карло: сгенерировать случайно равновероятно множество точек внутри прямоугольника и для каждой точки проверить (с помощью вышеописанных рассуждений), будет ли тарелка с центром в этой точке лежать полностью внутри стола или нет. Чтобы получить ответ, найдем отношение количества «хороших точек» (тарелки, центры которых будут лежать внутри стола) к количеству точек, которые мы проверяли; округлим это отношение до сотых и умножим на 100 — это и будет итоговый ответ. Известно, что для получения абсолютной погрешности ϵ нужно проверить $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ точек. В авторском решении точки генерируются с отсечением по времени (то есть в течение примерно одной секунды), что позволяет получить такую малую погрешность, которой достаточно для нахождения правильного ответа. Отметим, что ответ можно было получить и математическим способом с помощью интегрирования. Оставим эту задачу заинтересовавшемуся читателю в качестве математического упражнения.

Авторское решение на языке C++:

```
#include <bits/stdc++.h>

typedef long long ll;
using namespace std;

int main(int argc, char* argv[]) {
    int N, M, R;
    cin >> N >> M >> R;

    mt19937_64 mt(229);
    uniform_real_distribution<long double> dist_x =
        uniform_real_distribution((long double)1, (long double)N - 1);
    uniform_real_distribution<long double> dist_y =
        uniform_real_distribution((long double)1, (long double)M - 1);
    auto check = [&] () -> bool {
        // генерим рандомную точку [1, N - 1], [1, M - 1]
        long double x = dist_x(mt);
        long double y = dist_y(mt);

        if (x * x + y * y <= (R + 1) * (R + 1)) {
            return false;
        }

        if ((N - x) * (N - x) + (M - y) * (M - y) <= (R + 1) * (R +
1)) {
            return false;
        }
```

```
        return true;
    };

    ll good = 0, all = 0;
    while (1000 * clock() / CLOCKS_PER_SEC < 900) {
        ++all;
        good += check();
    }

    long double PI = acosl(-1);
    long double S = N * M - PI * R * R / 2;
    long double S_small = (N - 2) * (M - 2);
    long double S_need = S_small * good / all;

#define debug(x) cerr << #x << ": " << (x) << endl;

    debug(S);
    debug(S_small);
    debug(S_need);
    debug(good);
    debug(all);
    debug(S_need / (N * M));

    long double ANSWER = S_need * 100 / S;

    cerr << "ANSWER: " << fixed << setprecision(10) << ANSWER << endl;
    cout << round(ANSWER);

    return 0;
}
```

Критерии определения победителей и призеров отборочного тура

Каждое из решений участника по каждой из задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов. Прошедшими в заключительный тур считались участники 5-7 классов, набравшие суммарно 100 и более баллов, участники 8-10 классов, набравшие 130 и более баллов, и участники 11 классов, набравшие не менее 140 баллов.

Статистика отборочного тура

В отборочном туре приняли участие 1437 школьников из 77 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья. Количество иностранных участников — 14 человек. Количество участников и призеров отборочного тура представлено в таблице.

Класс	Количество участников	Количество призеров
5 класс и младше	165	6
6	245	5
7	200	30
8	235	59
9	194	57
10	211	52
11	187	54
Итого	1437	263

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура

Каждое из решений участника по каждой из 6 задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 100 баллов.

Критерии определения победителей и призеров представлены в таблице ниже:

Класс	1 место	2 место	3 место
4	340	270	200
5	340	270	200
6	340	270	200
7	340	270	200
8	340	230	200
9	340	270	200
10	340	310	260
11	410	350	270

Статистика заключительного тура

В заключительном туре приняли участие 140 школьников из 33 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья. Заключительный тур прошел на 10 площадках, в том числе в Москве, Самаре, Санкт-Петербурге, Кемерово, Владимире, Ульяновске, Омске, Белгороде.

Призовые места заняли 32 человека. Количество участников, победителей и призеров представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5	1	0	0
6	2	0	0
7	13	3	0
8	41	2	1
9	26	7	1
10	30	3	5
11	26	8	2
Итого:	140	23	9

План УМД на 2024/25 уч.г.

Александр Анатольевич Андреев
Андрей Александрович Балабекян
Андрей Валентинович Куприн
Екатерина Алексеевна Максимова
Елена Александровна Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2024/2025 учебный год

Учебное пособие

Подписано в печать 22.04.2025г.
Объём 12,1 усл.п.л. Изд. № 37.