МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, М.И. Карпухина, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2020/2021 учебный год

Учебное пособие

Москва 2021

МИНИСТЕРСТВО ЦИФРОВОГО РАЗВИТИЯ, СВЯЗИ И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ордена Трудового Красного Знамени федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский технический университет связи и информатики

А.А. Андреев, М.И. Карпухина, Е.А. Максимова, Е.А. Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2020/2021 учебный год

Учебное пособие

Для учащихся 5-11 классов школ

Москва 2021

УДК 004.02, 37, 51

Андреев А.А., Карпухина М.И., Максимова Е.А., Скородумова Е.А. Олимпиада школьников ТИИМ-технологии. Интеллект. Информатика. Математика. Задания, решения, статистика. 2020/2021 учебный год / МТУСИ. – М., 2021. – 167 с.

Издание утверждено Методическим советом университета в качестве учебного пособия. Протокол № 4 от 13.04.2021 г.

Рецензенты: М.В. Яшина, д.т.н., профессор (МАДИ)

А.Р. Лакерник, к.ф.-м.н., доцент (МТУСИ)

О сборнике

Приводятся тексты заданий Олимпиады с решениями/ответами по математике и информатике, как отборочного, так и заключительного тура, статистические сведения и историческая справка.

Пособие предназначено для участников Олимпиады, школьников, учителей, родителей, руководителей школьных кружков, организаторов олимпиад.

Все опубликованные в настоящем издании материалы распространяются свободно, могут копироваться и использоваться в учебном процессе без ограничений.

Желательны (в случаях, когда это уместно) ссылки на источник.

Электронная версия: http://тиим.рф

Предисловие

Основной задачей олимпиады является поддержание и развитие интереса к решению нестандартных задач математики и программирования. Олимпиада проводится учреждениями высшего образования, центрами Сириус и школами России и ближнего зарубежья.

В декабре 2020 - январе 2021 гг. впервые прошел отборочный тур олимпиады ТИИМ.

Отборочный тур олимпиады по математике проходил для школьников 5-11 классов, как в очной, так и в дистанционной форме. Каждый из четырех вариантов содержал 10 задач.

Отборочный тур по информатике включал в себя шесть задач, рассчитанных на учащихся 8-11 классов, тур проводился только в дистанционной форме с применением системы автоматической проверки решений участников на наборе тестовых данных. Решение принималась на языках C++, Python, Pascal, Java. В отборочном туре олимпиады по математике приняли участие 2769 школьников, по информатике – 539 школьников из 62 регионов Российской Федерации и семи стран.

В заключительный тур прошли лучшие участники отбора. Заключительный тур по математике состоялся 28 марта 2021 г. на 18 площадках проведения.

Заключительный тур по информатике прошел 4 апреля, в дистанционной форме.

Олимпиада ТИИМ в 2021 г. посвящается 100-летию МТУСИ и первому ректору МТУСИ, Бутягину Алексею Сергеевичу, который также стоял у истоков олимпиадного движения в России.

БУТЯГИН АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ (06.04.1881, г. Елец – 26.09.1958, Москва), математик, ректор МГУ. А.С. Бутягин родился 6 апреля 1881 года в городе Ельце Орловской губернии в семье присяжного поверенного Елецкого Окружного Суда коллежского регистратора Сергея Павловича Бутягина. В 1890 г. он поступил в Елецкую гимназию, а затем перешел в 6-ю Московскую гимназию, которую окончил в 1900 г. и в том же году был принят на механико-математический факультет Московского университета, который окончил в 1906 г., удостоившись диплома первой степени.

Оставшись при Московском университете для подготовки к профессорскому званию по кафедре чистой математики, в последующие годы Бутягин вёл педагогическую деятельность в различных учебных заведениях Москвы, таких как 3-я Мужская гимназия, Московское реальное училище и Электротехнические курсы, а также проходил зарубежные стажировки, посетив Германию, Францию, Англию и другие страны.

С 1917 г. по 1920 г. Бутягин работал в Московском Совете; на Первом делегатском съезде Всероссийского Профессионального Союза Радиоспециалистов, проходившем в Москве в июле 1918 г., он выступил с предложением организовать профессиональную радиошколу, и уже в 1919 г. после объединения нескольких телеграфных и радиошкол был открыт Электротехникум народной связи. Благодаря чёткой организации учебного процесса и успешной подготовке специалистов в феврале 1921 г. Электротехникум был переименован в Московский электротехнический институт народной связи им. В.Н. Подбельского (ныне Московский технический университет связи и информатики), ректором которого А.С. Бутягин был утверждён по решению Московского комитета ВКП(б).

Когда в августе 1924 г. МЭИНС, наряду с другими московскими техническими институтами, был введён в состав Московского высшего технического училища (МВТУ), Бутягин стал первым проректором и и.о. ректора, и практически обеспечивал всю учебно-методическую работу этого учебного заведения. Затем с 1929 г. А.С. Бутягин работал заведующим кафедрой математики в Высшем инженерно-строительном училище, преобразованном в 1932 г. в Военно-инженерную академию им. В.В. Куйбышева, а в 1934 г. стал ректором МГУ, пробыв на этом посту почти десять лет. Был в числе организаторов первой Московской математической олимпиады в 1935 г.

В конце 1943 г. Бутягин вошел в коллегию Министерства высшего образования СССР в должности начальника отдела учебников, а затем – начальника методического управления; с 1951 по 1954 гг. он также был главным редактором журнала «Вестник высшей школы». Уже после выхода на пенсию Бутягин вернулся в МГУ в должности профессора исторического факультета, посвятив себя написанию монографии «История университетского образования в СССР», опубликованной в 1957 г. Остальные научные труды Бутягина являются преимущественно методическими: за время его преподавательской деятельности вышли его разработки под названием «Дополнительные главы по высшей математике», а также «Сборник прикладных задач по высшей математике».

На протяжении всего своего трудового пути Алексей Сергеевич Бутягин занимался проблемами развития высшего образования, проявляя незаурядные способности организатора и руководителя. Коллеги отзывались о нём, как о человеке интеллигентном, умевшем создавать спокойную деловую обстановку, и в то же время достаточно настойчивом в принятии нужных решений. Его деятельность на посту ректора во многом способствовала превращению МГУ в первый вуз страны и была направлена как на повышение уровня подготовки специалистов, так и на совершенствование функционирования высшей школы. Многие нововведения Бутягина не утратили своего значения и по сей день. Так, именно по его инициативе была введена проверка знаний студентов посредством экзаменов; были организованы и открыты многие новые факультеты; в 1939 г. был принят Устав, определявший роль кафедр и факультетов как основных учебных и научных подразделений, а также был создан Ученый совет во главе с ректором и Ученые советы на факультетах под председательством деканов.

Важную роль в деятельности А.С. Бутягина занимали и вопросы усиленного развития научной деятельности. Он добился укрепления связей МГУ с АН СССР и получения правительственных ассигнований на развитие углублённой, широкой по своему размаху и по своей тематике научно-исследовательской работы. В университете начали проводиться студенческие конференции, на которых представлялись результаты, имеющие самостоятельное научное значение («наследницей» этих конференций впоследствии стала международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов»). Кроме того, именно при Бутягине в 1935 г. в Московском университете прошла первая математическая олимпиада школьников, сыгравшая большую роль в отборе перспективных абитуриентов.

Проведённая под руководством А.С. Бутягина сложная и многоплановая работа по повышению статуса МГУ получила высокую государственную оценку. В год 185-летия университета (1940) Московский университет был награждён орденом Ленина «за выдающиеся заслуги в области развития науки, культуры и подготовки высококвалифицированных специалистов» и получил имя М.В. Ломоносова.

Олимпиада по математике

Задания отборочного тура олимпиады с ответами

5 класс

Отборочный тур, 5 класс, 1 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые три секунды. Всего было насчитано 13 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 18.

▷2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 500.

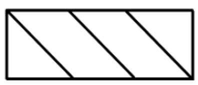
▷3. Известно, что в январе четыре понедельника и четыре пятницы. Какой по счёту день недели приходится на 1 января?

Ответ: 2.

▷4. Найдите наименьшее общее кратное чисел 270, 300 и 315.

Ответ: 18900.

▷5. Сколько различных четырёхугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 8.

▷6. Разность двух чисел равна 594. Одно из этих чисел оканчивается нулём. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найдите большее число.

Ответ: 660.

▷7. В четырёх ящиках лежит чай. Если из каждого вынуть по 9 кг, то во всех ящиках останется столько, сколько было в каждом. Сколько чаю было в каждом ящике?

Ответ: 12.

▷8. В записи $1*2*3*4*5$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наибольшее из возможных целых чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: 180.

▷9. В кассе одинаковое число рублёвых, пятирублёвых и десятирублёвых монет, всего на сумму 336 рублей. На какую сумму в кассе пятирублёвых монет?

Ответ: 105.

▷10. В отчёте о работе одного отдела научно-исследовательского института указывалось, что 10 человек знают немецкий язык, 13 – английский и французский, 2 – немецкий, английский и французский языки. Каково наименьшее возможное число работников в этом отделе?

Ответ: 21.

Отборочный тур, 5 класс, 2 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые три секунды, вторые – через каждые четыре секунды. Всего было насчитано 7 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 12.

▷2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1917 цифр. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 675.

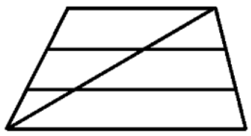
▷3. Известно, что в декабре четыре понедельника и четыре пятницы. Какой по счёту день недели приходится на 1 января нового года?

Ответ: 5.

▷4. Найдите наибольший общий делитель чисел 126, 540 и 630.

Ответ: 18.

▷5. Сколько треугольников и четырёхугольников можно увидеть на чертеже? В ответе укажите сумму всех треугольников и всех четырёхугольников.



Ответ: 18.

▷6. Сколько существует двузначных чисел, имеющих в своей записи цифру 5?

Ответ: 18.

▷7. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 рублей, а на 15 тетрадей у него не хватит 7 рублей. Сколько рублей было у школьника?

Ответ: 38.

▷8. В записи $1*2*3*4$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наибольшее из возможных целых чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: 36.

▷9. В кассе одинаковое число двухрублёвых, пятирублёвых и десятирублёвых монет, всего на сумму 1921 рублей. На какую сумму в кассе пятирублёвых монет?

Ответ: 565.

▷10. В одном башкирском селе каждый житель говорит или по-башкирски, или по-русски, или на обоих языках. 912 жителей села говорят по-башкирски, 653 – по-русски, причём 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом селе?

Ответ: 1130.

Отборочный тур, 5 класс, 3 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые три секунды. Всего было насчитано 9 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 12.

▷2. Для нумерации страниц книги потребовалась всего 1941 цифра. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 683.

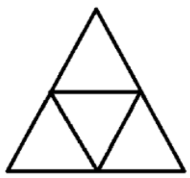
▷3. Известно, что в январе пять четвергов и пять суббот. Какой по счёту день недели приходится на 1 января?

Ответ: 4.

▷4. Известно, что число A при делении на 5 даёт остаток 2, а при делении на 3 – остаток 1. Найдите остаток от деления числа A на 15.

Ответ: 7.

▷5. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 6.

▷6. Если к двузначному числу приписать слева цифру 6, то оно увеличится в 26 раз. Найдите это двузначное число.

Ответ: 24.

▷7. Через мост за день прошло 30 автомобилей и велосипедов, а всего 100 колес. Установите, сколько прошло за день отдельно автомобилей (a) и велосипедов (b). В ответе укажите значение $3a-2b$.

Ответ: 40.

▷8. В записи $1*2*3*4*5$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наименьшее из возможных рациональных чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: $\frac{1}{120}$**.**

▷9. Имеются 12 ящиков. В некоторых из них лежат по 12 ящиков меньшего размера. В некоторых из меньших ящиков лежат ещё по 12 ящиков меньшего размера. Всего заполнено 39 ящиков. Найдите общее число ящиков.

Ответ: 480.

▷10. На занятии физического кружка, насчитывавшего 10 членов, учитель спросил, выписывают ли члены кружка журналы "Квант" (К), "Техника молодёжи" (Т) и "Юный техник" (Ю). Оказалось, что 6 человек выписывают К, 5 – Т, 5 – Ю, 3 – К и Т, 3 – К и Ю, 2 – Т и Ю, а один человек не выписывает ни одного из трёх журналов. Сколько членов кружка выписывают только один журнал?

Ответ: 4.

Отборочный тур, 5 класс, 4 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые три секунды, вторые – через каждые четыре секунды. Всего было насчитано 13 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 24.

▷2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1812 цифр. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 640.

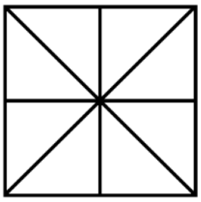
▷3. Известно, что в декабре пять четвергов и пять суббот. Какой по счёту день недели приходится на 1 января нового года?

Ответ: 7.

▷4. Если A – наибольшее целое число, которое при делении на 16 с остатком даёт частное, равное 9, то чему равно произведение его цифр?

Ответ: 45.

▷5. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 16.

▷6. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное, чтобы получить наибольшее трёхзначное число?

Ответ: 10.

▷7. В ящике лежат 70 шаров, отличающихся лишь цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные чёрные и белые. Какое наименьшее число шаров надо взять, не видя их, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

Ответ: 38.

▹8. В записи $1*2*3*4$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наименьшее из возможных рациональных чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: $\frac{1}{24}$**.**

▹9. В четырёх пакетах лежит по одинаковому числу яблок. Если бы из каждого пакета вынуть по 12 яблок, то во всех пакетах останется столько, сколько было в каждом. Сколько яблок было в каждом пакете?

Ответ: 16.

▹10. На занятии математического кружка, насчитывавшего 10 членов, учитель спросил, выписывают ли члены кружка журналы "Квант" (К), "Техника молодёжи" (Т) и "Юный техник" (Ю). Оказалось, что 6 человек выписывают К, 5 – Т, 5 – Ю, 3 – К и Т, 3 – К и Ю, 2 – Т и Ю, а один человек не выписывает ни одного из трёх журналов. Сколько членов кружка выписывают только два журнала?

Ответ: 5.

6 класс

Отборочный тур, 6 класс, 1 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 7 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 10.

▷2. В отчёте о работе одного отдела научно-исследовательского института указывалось, что 10 человек знают немецкий язык, 13 – английский и французский, 2 – немецкий, английский и французский языки. Какое наименьшее возможное число работников в этом отделе?

Ответ: 21.

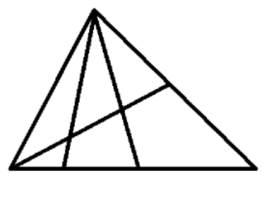
▷3. Известно, что в январе четыре вторника и четыре пятницы. Какой по счёту день недели приходится на 1 января?

Ответ: 6.

▷4. В записи $1*2*3*4*5$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наибольшее из возможных целых чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: 180.

▷5. Сколько различных отрезков изображено на чертеже?



Ответ: 22.

▷6. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если его периметр увеличится на 30%?

Ответ: 69.

▷7. Из двух деревень, находящихся на расстоянии 15 км одна от другой, одновременно навстречу друг другу вышли два мальчика. Первый идёт со скоростью 3 км/ч, второй 2 км/ч. Одновременно с одним из мальчиков выбежала собака со скоростью 10 км/ч и, добежав до другого мальчика, вернулась к первому, потом опять побежала ко второму мальчику и так поступала до тех пор, пока мальчики не встретились. Сколько километров пробежала собака?

Ответ: 30.

▷8. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 500.

▷9. Восстановить запись, где разные буквы обозначают различные цифры. В ответе укажите количество делителей числа $A \cdot C \cdot K$.

$$\begin{array}{cccc} & & & \mathrm{A} \\ + & & \mathrm{A} & \mathrm{K} \\ & \mathrm{A} & \mathrm{K} & \mathrm{C} \\ \hline & \mathrm{K} & \mathrm{C} & \mathrm{K} \end{array}$$

Ответ: 16.

▷10. Трёхзначное число A оканчивается цифрой 2. Если её перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Укажите значение $\frac{7A-214}{2A-4}$.

Ответ: 3.

Отборочный тур, 6 класс, 2 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые три секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 8 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 15.

▷2. В одном башкирском селе каждый житель говорит или по-башкирски, или по-русски, или на обоих языках. 912 жителей села говорят по-башкирски, 653 – по-русски, причём 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом селе?

Ответ: 1130.

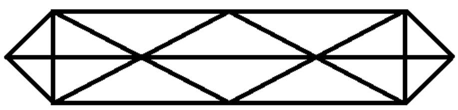
▷3. Известно, что в декабре четыре вторника и четыре пятницы. Какой по счёту день недели приходится на 1 января нового года?

Ответ: 2.

▷4. В записи $1*2*3*4$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наибольшее из возможных целых чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: 36.

▷5. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 28.

▷6. На сколько процентов увеличится полная поверхность куба, если его ребро увеличится на 40%?

Ответ: 90.

▷7. Первую половину пути мотоциклист проехал со скоростью 30 км/ч, вторую – со скоростью 60 км/ч. Какова его средняя скорость?

Ответ: 40.

▷8. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1917 цифр. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 675.

▷9. Какие цифры надо поставить вместо *a*, *b*, *c*, *d*, чтобы было верным сложение (см. рисунок). В ответе укажите число различных делителей произведения $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ +\quad a\,b\,c \\ a\,b \\ a \\ \hline 4\,3\,2\,1 \end{array}$$

Ответ: 16.

▷10. Сумма цифр двузначного числа *A* равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получается число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Укажите значение $\dfrac{7A+32}{A+1}$.

Ответ: 8.

Отборочный тур, 6 класс, 3 вариант

▹1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 13 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 20.

▹2. На занятии физического кружка, насчитывавшего 10 членов, учитель спросил, выписывают ли члены кружка журналы "Квант" (К), "Техника молодёжи" (Т) и "Юный техник" (Ю). Оказалось, что 6 человек выписывают К, 5 – Т, 5 – Ю, 3 – К и Т, 3 – К и Ю, 2 – Т и Ю, а один человек не выписывает ни одного из трёх журналов. Сколько членов кружка выписывают только один журнал?

Ответ: 4.

▹3. Известно, что в январе четыре вторника и четыре субботы. Какой по счёту день недели приходится на 1 января?

Ответ: 3.

▹4. В записи $1*2*3*4*5$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наименьшее из возможных целых чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: -119.

▹5. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?

Ответ: 20.

▹6. Имеется 1 центнер огурцов. Влажность этих огурцов составляет 99%. Пролежав на складе, огурцы высохли. Их влажность стала 98%. Каким стал вес всех этих огурцов (в кг)?

Ответ: 50.

▷7. Школьники ехали на машине из лагеря в город. Когда они проехали 3/4 пути, машина была остановлена на ремонт. Оставшуюся часть пути школьники проделали пешком, затратив на это в 4 раза больше времени, чем на езду в машине. Во сколько раз быстрее ехали школьники на машине, чем шли пешком?

Ответ: 12.

▷8. Для нумерации страниц книги потребовалась всего 1941 цифра. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 683.

▷9. Какие цифры надо поставить вместо *a*, *b*, *c*, *d*, чтобы было верным сложение (см. рисунок). В ответе укажите число различных делителей числа $\overline{abcd}$.

$$\begin{array}{r} \mathrm{a\;b\;c\;d} \\ +\quad \mathrm{a\;b\;c} \\ \mathrm{a\;b} \\ \mathrm{a} \\ \hline 1\;9\;2\;1 \end{array}$$

Ответ: 8.

▷10. При умножении двух чисел, одно из которых на 94 больше другого, цифра десятков в произведении по ошибке была уменьшена на 4. При делении же ошибочного произведения на больший из множителей получилось в частном 52, а в остатке 107. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 200.

Отборочный тур, 6 класс, 4 вариант

▷1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые три секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 15 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 30.

▷2. На занятии математического кружка, насчитывавшего 10 членов, учитель спросил, выписывают ли члены кружка журналы "Квант" (К), "Техника молодёжи" (Т) и "Юный техник" (Ю). Оказалось, что 6 человек выписывают К, 5 – Т, 5 – Ю, 3 – К и Т, 3 – К и Ю, 2 – Т и Ю, а один человек не выписывает ни одного из трёх журналов. Сколько членов кружка выписывают только два журнала?

Ответ: 5.

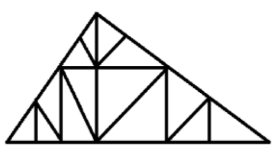
▷3. Известно, что в декабре четыре вторника и четыре субботы. Какой по счёту день недели приходится на 1 января нового года?

Ответ: 6.

▷4. В записи $1*2*3*4$ замените звёздочки знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось наименьшее из возможных целых чисел. В ответе укажите получившееся число.

Ответ: -23.

▷5. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 29.

▷6. На сколько процентов изменится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 20%, а ширину уменьшить на 10%? В ответе записать площадь измененного прямоугольника, если площадь исходного была 100.

Ответ: 108.

▷7. Я еду в трамвае и замечаю, что параллельно трамвайной линии в противоположном направлении проходит мой приятель. Через минуту я вышел из вагона и, чтобы догнать приятеля, пошёл вдвое быстрее его, но в 4 раз медленнее трамвая. Через сколько минут я догоню приятеля?

Ответ: 5.

▷8. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1812 цифр. Сколько в этой книге страниц?

Ответ: 640.

▷9. Какие цифры надо поставить вместо *a, b, c, d,* чтобы было верным сложение (см. рисунок). В ответе укажите число различных делителей числа $\overline{abcd}$.

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ +\quad a\,b\,c \\ a\,b \\ a \\ \hline 2\,0\,2\,1 \end{array}$$

▷10. Если двузначное число A разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Укажите значение $\frac{8A+16}{A-3}$.

Ответ: 10.

7 класс

Отборочный тур, 7 класс, 1 вариант

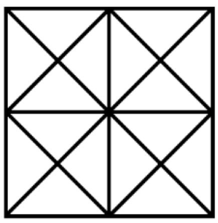
▷1. В течение некоторого времени число дождливых дней было равно 10, ветреных – 8, холодных – 6, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 4, ветреных и холодных – 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных – 1. Сколько было всего дней с плохой погодой?

Ответ: 13.

▷2. В пачке письменных работ абитуриентов – не более 75 работ. Известно, что половина работ в этой пачке имеют оценку отлично. Если убрать три верхние работы, то 48% оставшихся работ будут с оценкой отлично. Сколько работ было в пачке?

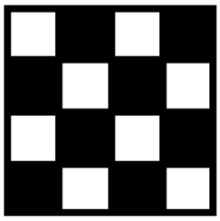
Ответ: 28.

▷3. Сколько на рисунке пар смежных углов?



Ответ: 52.

▷4. Сколько различных квадратов можно увидеть на чертеже?



Ответ: 30.

▷5. Восстановить запись, где разные буквы обозначают различные цифры. В ответе укажите количество делителей числа $A \cdot C \cdot K$.

$$\begin{array}{cccc} & & & А \\ + & & А & К \\ & А & К & С \\ \hline & К & С & К \end{array}$$

Ответ: 16.

▷6. В три часа стенные часы отбивают три удара за 12 секунд. За сколько секунд эти часы отобьют 6 ударов в 6 часов вечера?

Ответ: 30.

▷7. Если куб рассечь плоскостями на 27 равных между собой кубиков, то общий объём кубиков будет тем же, что и у большого куба. А вот общая поверхность увеличится, но во сколько раз?

Ответ: 3.

▷8. Шестизначное число $\overline{196xyz}$ делится на 7, 8 и 9. Укажите в ответе сумму всех таких чисел $\overline{xyz}$.

Ответ: 616.

▷9. В кассе одинаковое число рублёвых, пятирублёвых и десятирублёвых монет, всего на сумму 336 рублей. На какую сумму в кассе пятирублёвых монет?

Ответ: 105.

▷10. В стозначном числе 12345678901234567890123 … 7890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном пятидесятизначном числе вновь вычеркнули цифры на нечётных местах. Вычёркивание продолжалось до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была вычеркнута последней?

Ответ: 4.

Отборочный тур, 7 класс, 2 вариант

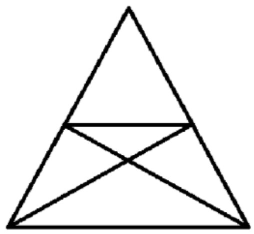
▷1. Контрольная работа по математике в пятом классе состояла из задачи, уравнения и числового примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение – 4, только пример – 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение – 5, только пример – 3. Остальные ученики выполнили всю работу правильно. Сколько таких учеников?

Ответ: 7.

▷2. В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них – белые. Если отложить 3 самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

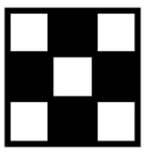
Ответ: 25.

▷3. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 12.

▷4. Сколько различных квадратов можно увидеть на чертеже?



Ответ: 14.

▷5. Какие цифры надо поставить вместо *a*, *b*, *c*, *d*, чтобы было верным сложение (см. рисунок). В ответе укажите число различных делителей произведения $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

$$
\begin{array}{r}
a\;b\;c\;d\\
+\quad a\;b\;c\\
a\;b\\
a\\
\hline
4\;3\;2\;1
\end{array}
$$

Ответ: 16.

▷6. В четыре часа стенные часы отбивают четыре удара за 12 секунд. За сколько секунд эти часы отобьют 12 ударов в 12 часов?

Ответ: 44.

▷7. Два пильщика должны распилить бревно, длина которого 5 м, на полуметровые чурки. За сколько секунд они выполнят эту работу, если распиловка бревна поперек продолжается каждый раз 2,5 мин.?

Ответ: 1350.

▷8. В трёхзначном числе цифры сотен и единиц одинаковы. Найти все числа такого вида, если известно, что каждое из них делится на 15. В ответе запишите сумму всех таких чисел.

Ответ: 1665.

▷9. В кассе одинаковое число двухрублёвых, пятирублёвых и десятирублёвых монет, всего на сумму 1921 рублей. На какую сумму в кассе пятирублёвых монет?

Ответ: 565.

▷10. На доске записали все числа от 1 до 100 подряд без пробелов – 1234567891011121314 … 9899100. Стёрли все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном числе вновь стёрли цифры на нечётных местах. Цифры стирали до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была стёрта последней?

Ответ: 6.

Отборочный тур, 7 класс, 3 вариант

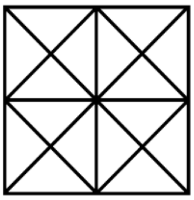
▷1. Пол комнаты площадью 18 м^2 покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра – 6 м^2, другого – 5 м^2 и третьего – 4 м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1 м^2, причём все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2. Какова площадь части пола, не покрытой коврами? Ответ дайте в дм^2.

Ответ: 550.

▷2. В урне лежали белые и черные шары, их число не более 55. Число белых относилось к числу черных как 3 : 2. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных равно 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

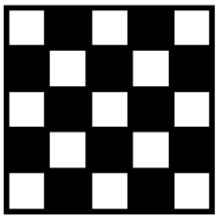
Ответ: 25.

▷3. Сколько на рисунке пар вертикальных углов?



Ответ: 20.

▷4. Сколько различных квадратов можно увидеть на чертеже?



Ответ: 55.

▷5. Какие цифры надо поставить вместо *a*, *b*, *c*, *d*, чтобы было верным сложение (см. рисунок). В ответе укажите число различных делителей числа $\overline{abcd}$.

$$
\begin{array}{r}
abcd \\
+\quad abc \\
ab \\
a \\
\hline
1921
\end{array}
$$

Ответ: 8.

▷6. Часы отстают каждые сутки на 5 минут. Через сколько суток они покажут верное время?

Ответ: 144.

▷7. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если периметр его увеличить на 20%?

Ответ: 44.

▷8. Произведение двух двузначных чисел состоит из одних четвёрок. Найти сумму этих сомножителей.

Ответ: 49.

▷9. Имеются 12 ящиков. В некоторых из них лежат по 12 ящиков меньшего размера. В некоторых из меньших ящиков лежат ещё по 12 ящиков меньшего размера. Всего заполнено 39 ящиков. Найдите общее число ящиков.

Ответ: 480.

▷10. На доске записали числа от 1 до 8 подряд 8 раз без пробелов – 123456781234567812 … 5678. Стёрли все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном числе вновь стёрли цифры на нечётных местах. Цифры стирали до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была стёрта последней?

Ответ: 8.

Отборочный тур, 7 класс, 4 вариант

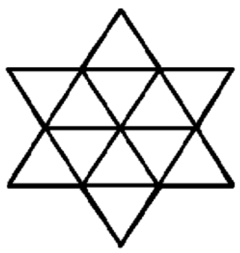
▷1. Имеется 500 различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 2, 3, 5 или 7. При этом делятся: на 2, 3, 5, 7 соответственно 320, 206, 140 и 77 чисел; на 6, 10, 14, 15, 21, 35 – соответственно 98, 69, 45, 40, 35, 21; на 30, 42, 70, 105 – 25, 18, 16 и 14 чисел соответственно. Сколько чисел из первоначальных пятисот делятся на 210?

Ответ: 8.

▷2. Рыбаки поймали *n* рыб, из них 48% окуней. Пять рыб были отпущены в озеро. После этого рыб снова пересчитали и оказалось, что среди оставшихся 50% составляют окуни. Сколько рыб поймали рыбаки, если известно, что $30 \le n \le 100$?

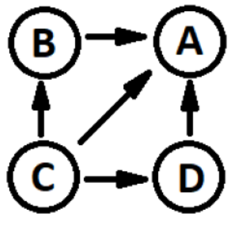
Ответ: 75.

▷3. Сколько различных треугольников можно увидеть на чертеже?



Ответ: 20.

▷4. В кружках поставлены различные числа (*A*, *B*, *C*, *D*) от 1 до 100 таким образом, что стрелки идут от каждого числа к его делителям, не равным самому числу. Какое наибольшее число может стоять в каждом из четырёх кружков? В ответе запишите сумму наибольших возможных значений *A* + *B* + *C* + *D*.



Ответ: 180.

▷5. Какие цифры надо поставить вместо a, b, c, d, чтобы было верным сложение (см. рисунок). В ответе укажите число различных делителей числа $\overline{abcd}$.

$$
\begin{array}{r}
a\;b\;c\;d\\
+\quad a\;b\;c\\
a\;b\\
a\\
\hline
2\;0\;2\;1
\end{array}
$$

Ответ: 8.

▷6. Часы отстают каждые сутки на 4 минуты. Через сколько суток они покажут верное время?

Ответ: 180.

▷7. Найти сумму всех целых чисел n, для которых дробь $\dfrac{n^3+n}{n-1}$ равна целому числу.

Ответ: 4.

▷8. Если к двузначному числу слева и справа приписать по 1, то оно увеличится в 21 раз. Найдите это двузначное число.

Ответ: 91.

▷9. В четырёх пакетах лежит по одинаковому числу яблок. Если из каждого пакета вынуть по 12 яблок, то во всех пакетах останется столько, сколько было в каждом. Сколько яблок было в каждом пакете?

Ответ: 16.

▷10. На доске записали числа от 1 до 6 подряд 20 раз без пробелов – 12345612345612345612 … 56123456. Стёрли все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном числе вновь стёрли цифры на нечётных местах. Цифры стирали до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была стёрта последней?

Ответ: 4.

8 класс

Отборочный тур, 8 класс, 1 вариант

▷1. Два натуральных числа отличаются на 2, а их квадраты на 100. Найдите сумму наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя этих чисел.

Ответ: 314.

▷2. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 100. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 16.

▷3. В стозначном числе $12345678901234567890123 \ldots 7890$ вычеркнули все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном пятидесятизначном числе вновь вычеркнули цифры на нечётных местах. Вычёркивание продолжалось до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была вычеркнута последней?

Ответ: 4.

▷4. Большая группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским – 13, немецким – 10, английским и французским – 8, английским и немецким – 6, французским и немецким – 5, всеми тремя языками – 2, а 41 человек не владеет ни одним из трёх языков. Сколько туристов в группе?

Ответ: 75.

▷5. Если A – наибольшее целое число из чисел вида $\overline{71x1y}$, делящихся на 45, то чему равно значение $2x+y$?

Ответ: 18.

▷6. Процент учеников некоторого класса, не повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 96,9% до 97,1%. Определить наименьшее возможное количество учеников в таком классе.

Ответ: 33.

▷7. Найти сумму значений параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |3x-2a+6| = 3y \\ |3y-a+6| = 3x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

▷8. Трёхзначное число A оканчивается цифрой 2. Если её перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Укажите значение $\dfrac{7A-214}{2A-4}$.

Ответ: 3.

▷9. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 7 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 10.

▷10. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60% меди?

Ответ: 13,5.

Отборочный тур, 8 класс, 2 вариант

▹1. Два натуральных числа отличаются на 3, а их квадраты на 99. Найдите сумму наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя этих чисел.

Ответ: 93.

▹2. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 50. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 12.

▹3. На доске записали все числа от 1 до 100 подряд без пробелов – 1234567891011121314 … 9899100. Стёрли все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном числе вновь стёрли цифры на нечётных местах. Цифры стирали до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была стёрта последней?

Ответ: 6.

▹4. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку "отлично" получили: по математике – 48 человек, по физике – 37, по литературе – 42, по математике или физике – 75, по математике или литературе – 76, по физике или литературе – 66, по всем трём предметам – 4. Сколько абитуриентов получили только одну оценку "отлично"?

Ответ: 65.

▹5. Каким числом нулей заканчивается произведение всех натуральных чисел от 1 до 2021 включительно?

Ответ: 503.

▷6. Группа абитуриентов сдавала экзамен по математике. Число абитуриентов, сдавших экзамен, оказалось в интервале от 96,8 до 97,6%. Каково наименьшее возможное число абитуриентов в группе?

Ответ: 32.

▷7. Найти сумму значений параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |14x + a + 14| = 14y \\ |7y + 3a - 21| = 7x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

▷8. Сумма цифр двузначного числа A равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получается число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Укажите значение $\dfrac{7A+32}{A+1}$.

Ответ: 8.

▷9. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые три секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 8 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 15.

▷10. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным раствором соляной кислоты и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов 30%-ного раствора было взято?

Ответ: 150.

Отборочный тур, 8 класс, 3 вариант

▷1. Два натуральных числа отличаются на 4, а их квадраты на 200. Найдите сумму наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя этих чисел.

Ответ: 622.

▷2. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 400. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 30.

▷3. На доске записали числа от 1 до 8 подряд 8 раз без пробелов – 123456781234567812 … 5678. Стёрли все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном числе вновь стёрли цифры на нечётных местах. Цифры стирали до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была стёрта последней?

Ответ: 8.

▷4. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку "отлично" получили: по математике – 48 человек, по физике – 37, по литературе – 42, по математике или физике – 75, по математике или литературе – 76, по физике или литературе – 66, по всем трём предметам – 4. Сколько абитуриентов получили ровно две оценки "отлично"?

Ответ: 25.

▷5. Если A – наибольшее целое число, из чисел вида $\overline{46x1y}$, делящихся на 55, то чему равно значение x^2+y^2?

Ответ: 106.

▷6. Группа студентов принимала участие в лыжном кроссе. Число студентов, выполнивших норматив, оказалось в интервале от 96,8 до 97,2%. Какое наименьшее возможное число студентов участвовало в кроссе?

Ответ: 32.

▷7. Найти сумму значений параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| x - \frac{a}{3} + \frac{2}{3} \right| = y \\ \left| y - 2a - 3 \right| = x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: -1.

▷8. При умножении двух чисел, одно из которых на 94 больше другого, цифра десятков в произведении по ошибке была уменьшена на 4. При делении же ошибочного произведения на больший из множителей получалось в частном 52, а в остатке 107. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 200.

▷9. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 13 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 20.

▷10. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%?

Ответ: 70.

Отборочный тур, 8 класс, 4 вариант

▷1. Два натуральных числа отличаются на 6, а их квадраты на 300. Найдите сумму наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя этих чисел.

Ответ: 310.

▷2. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 701. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 40.

▷3. На доске записали числа от 1 до 6 подряд 20 раз без пробелов – $123456123456123456 12 \ldots 56123456$. Стёрли все цифры, стоящие на нечётных местах. В полученном числе вновь стёрли цифры на нечётных местах. Цифры стирали до тех пор, пока ничего не осталось. Какая цифра была стёрта последней?

Ответ: 4.

▷4. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку "отлично" получили: по математике – 48 человек, по физике – 37, по литературе – 42, по математике или физике – 75, по математике или литературе – 76, по физике или литературе – 66, по всем трём предметам – 4. Сколько абитуриентов получили по меньшей мере одну оценку "отлично"?

Ответ: 94.

▷5. Если A – наибольшее трехзначное число, которое делится на 12, то чему равна сумма его цифр?

Ответ: 24.

▷6. При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5 до 93,5%. Определить наименьшее возможное число членов такой бригады.

Ответ: 14.

▷7. Найти сумму значений параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x+a+1| = y \\ \left|y+\dfrac{a}{3}+5\right| = x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 3.

▷8. Если двузначное число A разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Укажите значение $\dfrac{8A+16}{A-3}$.

Ответ: 10.

▷9. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые три секунды, вторые – через каждые пять секунд. Всего было насчитано 15 ударов (слившиеся удары воспринимать как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами?

Ответ: 30.

▷10. Известно, что 30% числа A на 10 больше, чем 20% числа B, а 30% числа B на 35 больше, чем 20% числа A. Найти сумму $A + B$ этих чисел.

Ответ: 450.

9 класс

Отборочный тур, 9 класс, 1 вариант

▷1. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 100. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 16.

▷2. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно стороне AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найти периметр четырёхугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$, $MN = 3$.

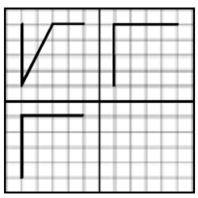
Ответ: 11.

▷3. Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – множество различных действительных чисел, $\Pi(x)$ – произведение всех элементов множества X, $S(x)$ – сумма всех элементов множества X. Известно, что $A\cap B=\{1;2\}$, $A\cap C=\{2;5\}$, $A\cup B=\{1;2;5;6;7;9\}$, $B\cup C=\{1;2;3;4;5;7;8\}$. Найдите $\Pi(A)-S(A)$. Если таких значений несколько, то в ответе укажите наименьшее.

Ответ: 517.

▷4. Решите уравнение $x^3-y^3=xy+61$, если x и y – натуральные числа. В ответе укажите $x+y$.

Ответ: 11.



▷5. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром a. В ответе запишите длину этой проволоки, если $a=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: 2.

▷6. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1, y = 1$. В ответе укажите $(a+1)^2 + (b-1)^2$.

Ответ: 8.

▷7. Поэт Золотов (З) и поэт Серебров (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву "Ю" в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги поэта С на 5% больше, чем тираж книги поэта З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв "Ю" больше или меньше, чем в текстах С?

Ответ: 50.

▷8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y \end{cases}$. В ответе запишите $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ в виде десятичной дроби.

Ответ: 1.

▷9. Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован был вырыт в действительности?

Ответ: 15.

▹10. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{54x^2-72x+144}{9x^2-12x+16}\leq a$ является верным при всех значениях x. В ответе запишите наименьшее целое a.

Ответ: 10.

Отборочный тур, 9 класс, 2 вариант

▷1. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 50. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 12.

▷2. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC, провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC, N лежит на AC). Найти длину отрезка MN, если известны периметр P = 14 четырёхугольника $ABMN$ и длина основания AB = 6.

Ответ: 4.

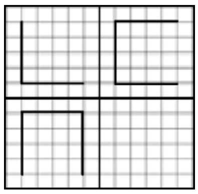
▷3. Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – множество различных действительных чисел, $\Pi(x)$ – произведение всех элементов множества X, $S(x)$ – сумма всех элементов множества X. Известно, что $A\bigcap B=\{1;2\}$, $A\bigcap C=\{2;5\}$, $A\bigcup B=\{1;2;5;6;7;9\}$, $B\bigcup C=\{1;2;3;4;5;7;8\}$. Найдите $\Pi(B)-S(B)$. Если таких значений несколько, то в ответе укажите наименьшее.

Ответ: 3.

▷4. Сумма двух чисел равна 463, а разность их квадратов – простое число. Чему равно произведение этих чисел?

Ответ: 53592.

▷5. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром a. В ответе запишите длину этой проволоки, если a = 1.



Ответ: 4.

▷6. Числа a, b и c таковы, что система

$$\begin{cases} ax - by = 2a - b \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причём $x = 1, y = 3$ – одно из этих решений. Найти числа a, b и c. В ответе укажите наибольшее возможное значение $a^2 + b^2 + c^2$.

Ответ: 6.

▷7. Поэт Золотов (З) и поэт Серебров (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву "Щ" в среднем на страницу текста на 30% чаще, чем С. Тираж книги поэта С на 4% больше, чем тираж книги поэта З. Количество страниц в книге у З на 4% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв "Щ" больше или меньше, чем в текстах С?

Ответ: 20.

▷8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 9x^2 - 6xy^2 + 1 = 0 \\ 9x^2 + y^2 + 1 = 6x + y \end{cases}$. В ответе запишите $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ в виде десятичной дроби.

Ответ: 4.

▷9. Трое рабочих должны сделать некоторое количество деталей за определённое время. Если бы первый рабочий работал половину отведённого времени, второй – $\frac{1}{3}$ часть отведённого времени, а третий – $\frac{1}{4}$ часть, то они сделали бы 30 деталей. Если бы первый работал $\frac{1}{6}$ часть, второй – $\frac{1}{10}$ часть, а третий – $\frac{1}{15}$ часть отведённого времени, то они сделали бы 10 деталей. Какое количество деталей сделали бы трое рабочих вместе, если бы работали всё отведённое время?

Ответ: 60.

▷10. Найти все значения a, при которых неравенство $\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7} \le a$ является верным при всех значениях x. В ответе запишите наименьшее целое a.

Ответ: 5.

Отборочный тур, 9 класс, 3 вариант

▷1. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 400. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 30.

▷2. В правильный треугольник со стороной, равной $4\sqrt[4]{3}$, вписана окружность, в которую вписан правильный шестиугольник. Найдите площадь шестиугольника.

Ответ: 6.

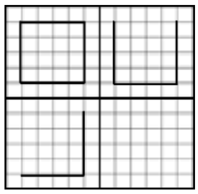
▷3. Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – множество различных действительных чисел, $\Pi(x)$ – произведение всех элементов множества X, $S(x)$ – сумма всех элементов множества X. Известно, что $A\cap B=\{1;2\}$, $A\cap C=\{2;5\}$, $A\cup B=\{1;2;5;6;7;9\}$, $B\cup C=\{1;2;3;4;5;7;8\}$. Найдите $\Pi(C)-S(C)$. Если таких значений несколько, то в ответе укажите наименьшее.

Ответ: 938.

▷4. Известно, что сумма двух натуральных чисел x и y равна 85, а их наименьшее общее кратное равно 102. Чему равно произведение чисел x и y?

Ответ: 1734.

▷5. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром a. В ответе запишите длину этой проволоки, если a = 1.



Ответ: 5.

▷6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} a^2x+(2-a)y=4+a^2 \\ ax+(2a-1)y=a^5-2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений? В ответе укажите сумму всех возможных целых значений a.

Ответ: 3.

▷7. Автор и редактор вносят исправления в рукопись. При каждом прочтении автор увеличивает объём рукописи на 10 страниц, а редактор каждый раз сокращает её на 20%. Каким был первоначальный объём рукописи, если после того как её один раз прочитал автор, а потом дважды прочитал редактор, её объём составил 800 страниц?

Ответ: 1240.

▷8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2-18xy^2+1=0 \\ x^2+9y^2+1=2x+3y \end{cases}$. В ответе запишите $1/x+1/y$ в виде десятичной дроби.

Ответ: 4.

▷9. Товары A, B, C куплены за некоторую сумму денег. Если бы товар A стоил в 5 раз дешевле, товар B – в 2 раза дешевле, товар C – в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 80 долларов. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью товар A стоил в 2 раза дешевле, товар B стоил в 4 раза дешевле, товар C – в 3 раза дешевле, то затраты составили бы 120 долларов. Сколько стоит покупка?

Ответ: 280.

▷10. Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{54x^2-18x+9}{9x^2-3x+1}\le a$ является верным при всех значениях x. В ответе запишите наименьшее целое a.

Ответ: 10.

Отборочный тур, 9 класс, 4 вариант

▷1. На доске нарисован правильный n-угольник. Из всех его вершин (кроме вершины A) Петя провёл все диагонали. Из вершины A он провёл лишь несколько диагоналей (но не все). Количество проведённых им диагоналей равно 701. Сколько вершин имеет этот правильный многоугольник?

Ответ: 40.

▷2. В круг радиусом 3 вписан прямоугольник $ABCD$; точки K, L, M, N – середины сторон этого прямоугольника. Каков периметр четырёхугольника $KLMN$?

Ответ: 12.

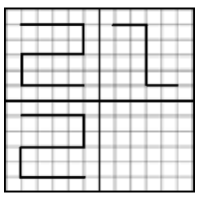
▷3. Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – множество различных действительных чисел, $\Pi(x)$ – произведение всех элементов множества X, $S(x)$ – сумма всех элементов множества X. Известно, что $A\cap B=\{1;2\}$, $A\cap C=\{2;5\}$, $A\cup B=\{1;2;5;6;7;9\}$, $B\cup C=\{1;2;3;4;5;7;8\}$. Найдите $\Pi(C)-S(C)$. Если таких значений несколько, то в ответе укажите наибольшее.

Ответ: 6691.

▷4. Найти 5 таких последовательных натуральных чисел, чтобы сумма квадратов трёх первых из них была равна сумме квадратов двух последних. В ответе укажите сумму всех чисел в такой последовательности.

Ответ: 60.

▷5. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром a. В ответе запишите длину этой проволоки, если a = 1.



Ответ: 5.

▷6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax-4y=a+1 \\ 2x+(a+6)y=a+3 \end{cases}$$

не имеет решений? В ответе укажите сумму всех возможных целых значений a.

Ответ: -4.

▷7. Автор и редактор вносят исправления в рукопись. При каждом прочтении автор увеличивает объём рукописи на 10 страниц, а редактор каждый раз сокращает её на 20%. Каким был первоначальный объём рукописи, если после прочтения автором, а затем редактором, и опять автором и редактором, её объём остался прежним?

Ответ: 40.

▷8. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x^2-9xy^2+2=0 \\ 4x^2+9y^2+4=8x+6y \end{cases}$. В ответе запишите $1/x+1/y$ в виде десятичной дроби.

Ответ: 2,5.

▷9. Имеется три типа станков различной производительности. При этом 3 станка первого типа, 4 – второго и 2 – третьего справляются со всей работой за 2 часа; 2 станка первого типа, 5 – второго и 3 – третьего справляются с работой за 3 часа. Объём работы увеличили в 3,5 раза, но взяли 21 станок первого типа, 42 – второго и 24 – третьего. За какое время они выполнили этот объём работы?

Ответ: 1.

▷10. Найти все значения a, при которых неравенство $\dfrac{88x^2-44x+33}{4x^2-2x+1}\le a$ является верным при всех значениях x. В ответе запишите наименьшее целое a.

Ответ: 37.

10 класс

Отборочный тур, 10 класс, 1 вариант

▷1. Катеты прямоугольного треугольника равны a и $2a$. Середина катета $2a$ служит центром окружности радиуса a. На какие отрезки делится этой окружностью гипотенуза треугольника? В ответе записать отношение длины большего отрезка к длине меньшего отрезка.

Ответ: 4.

▷2. Найти сумму всех целых значений d, при каждом из которых решения системы неравенств образуют на числовой оси отрезок длины 2.

$$\begin{cases} x^2+2x-4+4d\le 0 \\ x^2-4x-d-1\le 0 \end{cases}$$

Ответ: -5.

▷3. Пусть координаты вектора $\vec{a}=(x;y)$ удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{6x^2+11xy-2y^2-11}+\sin^2\frac{\pi x}{2}-\left(1+\left|\sin\frac{\pi y}{2}\right|\right)\sin\frac{\pi x}{2}+1=0.$$

Какое наибольшее значение может принимать скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{l}$, где $\vec{l}=(1;1)$?

Ответ: 6.

▷4. Найти сумму всех целых значений a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} 16bx+8y+a=0 \\ (1-b)x+by=z^2+z \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x,y,z).

Ответ: 7.

▷5. Найдите множество значений функции $y=100\cos 2x$, заданной на отрезке $[-\arcsin 0,4;\arcsin 0,4]$. В ответе укажите количество целых значений, принадлежащих этому множеству.

Ответ: 169.

▷6. Найдите сумму всех натуральных a, при каждом из которых выражение $1+\sin x(3\sin x + a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях x.

Ответ: 6.

▷7. Найдите остаток от деления $3^{1921}+3^{2021}$ на 100.

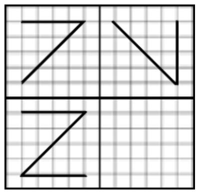
Ответ: 6.

▷8. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{ctg}\pi x \cdot \sin 4\pi x + \cos 4\pi x = 0$ на отрезке [1921; 2021].

Ответ: 400.

▷9. Трёхзначное число A оканчивается цифрой 2. Если её перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Укажите значение $\dfrac{7A-214}{2A-4}$.

Ответ: 3.



▷10. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром a. В ответе запишите длину этой проволоки, если $a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: 2.

Отборочный тур, 10 класс, 2 вариант

▷1. Стороны прямоугольника равны a и b. На стороне a, как на диаметре, построена окружность. На какие отрезки окружность делит диагональ прямоугольника? В ответе записать отношение длины большего отрезка к длине меньшего отрезка, если $a=\sqrt{600}, b=\sqrt{300}$.

Ответ: 2.

▷2. Найти сумму всех значений c, при которых решения системы неравенств образуют на числовой оси отрезок длины 1. Ответ записать в виде десятичной дроби.

$$\begin{cases} x^2-2x-c+1\le 0 \\ x^2-4x-6c\le 0 \end{cases}$$

Ответ: 0,25.

▷3. Пусть вектор $\vec{a}=(x;y)$ такой, что его координаты удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2-6xy-16y^2-11}+\mathrm{tg}^2\frac{\pi x}{4}-\left(1+|\cos\pi y|\right)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4}+1=0.$$

Какое наибольшее значение может принимать скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{l}$, где $\vec{l}=(1;1)$?

Ответ: 9.

▷4. Найти сумму всех целых значений a, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x+2y=2+a \\ x+ay=a+2a^2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0 \\ 2x^2+y^2+\left(a^2-2a-11\right)x+12+6a=0 \end{cases}$$

Ответ: 3.

▷5. Найдите множество значений функции $y = 169\sin 2x$, если $x \in \left[\arccos\frac{5}{13}; \frac{5\pi}{12}\right]$. В ответе укажите количество целых значений, принадлежащих этому множеству.

Ответ: 36.

▷6. Найдите сумму всех натуральных *a*, при которых выражение $27 + \cos x(36\sin x - a\cos x)$ не равно нулю ни при каких значениях *x*?

Ответ: 105.

▷7. Найдите остаток от деления $3^{2021} - 3^{1921}$ на 100.

Ответ: 0.

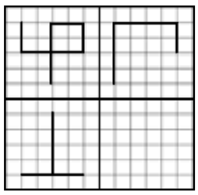
▷8. Сколько решений имеет уравнение $\operatorname{tg} 5x \cdot \cos 2\pi x = \sin 2\pi x$ на отрезке [1921; 2021]?

Ответ: 301.

▷9. Сумма цифр двузначного числа *A* равна 6. Если к этому числу прибавить 18, то получается число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Укажите значение $\frac{7A+32}{A+1}$.

Ответ: 8.

▷10. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром *a*. В ответе запишите длину этой проволоки, если *a* = 2.



Ответ: 9.

Отборочный тур, 10 класс, 3 вариант

▷1. Сторона правильного шестиугольника равна $4\sqrt[4]{3}$. Середины его сторон, взятых через одну, являются вершинами треугольника. Найдите площадь этого треугольника.

Ответ: 27.

▷2. Найти сумму всех значений *a*, при которых решения системы неравенств образуют на числовой оси отрезок длины 1. Ответ записать в виде десятичной дроби.

$$\begin{cases} x^2+6x+a\le 0 \\ x^2-2x-3-4a\le 0 \end{cases}$$

Ответ: 8,75.

▷3. Пусть вектор $\vec{a}=(x;y)$ такой, что его координаты удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{2x^2-3xy-2y^2-7}+\cos^2\pi x+(1-\cos\pi y)\cos\pi x+1=0.$$

Какое наименьшее значение может принимать скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{l}$, где $\vec{l}=(1;1)$?

Ответ: -4.

▷4. Найти сумму всех целых значений *a*, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} ax+3y=6a-4 \\ x+y=2a \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2-y^4-6x+8=0 \\ x^2+y^2+(2a+4)x+2\left(a^2+a+1\right)=0 \end{cases}$$

Ответ: 5.

▷5. Найдите множество значений функции $y = 10\cos 2x$, заданной на отрезке $\left[-\operatorname{arctg} 3; \operatorname{arctg} 0{,}5\right]$. В ответе укажите сумму целых значений, принадлежащих этому множеству.

Ответ: 19.

▷6. При каком наименьшем натуральном *a* выражение $1 + \sin x\left(a\sin x + 5\cos x\right)$ не равно нулю ни при каких значениях *x*?

Ответ: 6.

▷7. Найдите остаток от деления $7^{2021} + 7^{1921}$ на 100.

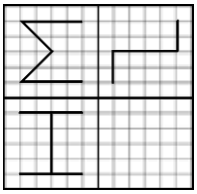
Ответ: 14.

▷8. Решите уравнение $\sin \pi x + \sin\left(3\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Укажите число корней на отрезке [0; 3].

Ответ: 9.

▷9. При умножении двух чисел, одно из которых на 94 больше другого, цифра десятков в произведении по ошибке была уменьшена на 4. При делении же ошибочного произведения на больший из множителей получилось в частном 52, а в остатке 107. Чему равна сумма этих чисел?

Ответ: 200.



▷10. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром *a*. В ответе запишите длину этой проволоки, если $a = 3 - \sqrt{2}$.

Ответ: 7.

Отборочный тур, 10 класс, 4 вариант

▷1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) через вершину A проведена прямая, которая пересекает диагональ BD в точке E и боковую сторону CD в точке K, причём $BE : ED = 1 : 2$ и $CK : KD = 1 : 4$. Найдите BC, если $AD = 12$.

Ответ: 3.

▷2. Найти сумму всех значений b, при которых решения системы неравенств образуют на числовой оси отрезок длины 2.

$$\begin{cases} x^2+4x-5b\le 0 \\ x^2-2x-4+b\le 0 \end{cases}$$

Ответ: 5.

▷3. Пусть вектор $\vec{a}=(x;y)$ такой, что его координаты удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x^2-10xy+16y^2-7}+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x}{4}+(1-\cos\pi y)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}+1=0.$$

Какое наибольшее значение может принимать скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{l}$, где $\vec{l}=(1;1)$?

Ответ: 10.

▷4. Найти среднее арифметическое всех целых значений a, при каждом из которых для любого значения b система

$$\begin{cases} az^2+12y=12bx \\ (b-6)x+2by-4z=4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение (x,y,z).

Ответ: 0,5.

▷5. Найдите множество значений функции $y=10\cos 2x$, заданной на отрезке $\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3};\operatorname{arctg}2\right]$. В ответе укажите сумму целых значений, принадлежащих этому множеству.

Ответ: 34.

▷6. Найдите наименьшее целое a, при котором выражение $3+\cos x(a\cos x+4\sin x)$ не равно нулю ни при каких значениях x?

Ответ: -1.

▷7. Найдите остаток от деления $7^{2021}-7^{1921}$ на 100.

Ответ: 0.

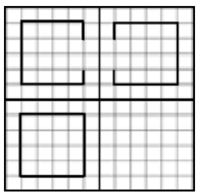
▷8. Решите уравнение $2\sin 2x\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)$. В ответе записать количество корней, принадлежащих отрезку $[1921°;2021°]$.

Ответ: 3.

▷9. Если двузначное число A разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Укажите значение $\frac{8A+16}{A-3}$.

Ответ: 10.

▷10. На рисунке даны три проекции модели, сделанной из одного куска толстой проволоки. Эта модель не имеет накладывающихся (двойных) участков и скреплённых узлов. По заданным проекциям постройте наглядное изображение фигуры, вписанное в куб с ребром a. В ответе запишите длину этой проволоки, если a = 2.

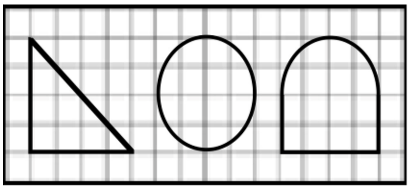


Ответ: 11.

11 класс

Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▷1. Найдите форму пробки, которая пройдёт сквозь три заданные отверстия, т.е. плотно закроет любое из заданных отверстий. В ответе запишите отношение объёма шара с радиусом 1,5*a* к объёму пробки (*a* = 4 клетки).



Ответ: 36.

▷2. На десяти одинаковых карточках написаны числа 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима. Ответ записать в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой.

Ответ: 0,311.

▷3. Последовательность (a_n) задана соотношением $\forall n > 2$: $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$; $a_1 = 1921, a_2 = 2021$. Найдите $|a_{2021} - a_{1921}|$.

Ответ: 3942.

▷4. Найдите сумму всех целых значений параметра *a*, при каждом из которых на плоскости (x, y) существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 2y - x \le 1 \\ y + 2x \le 2 \\ 7(y+1) + ax \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: 85.

▷5. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \sqrt{3}(\cos x + \sin x)} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

В ответе укажите, сколько корней находится в промежутке $[1921\pi; 2021\pi]$.

Ответ: 150.

▷6. Окружность радиуса 3 проходит через середины трёх сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны 60° и 45° соответственно. Найти S площадь треугольника. В ответе запишите $\left(S-27\right)^2$.

Ответ: 243.

▷7. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$, все рёбра которой равны b. Через точку N, делящую отрезок AD в отношении 2 : 1, считая от точки A, проведена плоскость, параллельная плоскости SCD. Вычислите площадь полученного сечения. В ответе запишите найденную площадь при $b=\sqrt[4]{243}$.

Ответ: 6.

▷8. Найдите сумму всех двузначных n, при каждом из которых 3^n+1 делится на 5.

Ответ: 1242.

▷9. Расшифровать запись, в которой: 1) разные буквы обозначают разные цифры, 2) звёздочки обозначают любые цифры. В ответе запишите сумму цифр разности $\overline{МТУСИ}-N$, где N – наибольшее возможное число из найденных $\overline{****}$.

$$\begin{array}{ccccc}
* & + & * & = & М \\
- & & \times & & : \\
* & + & * & = & Т \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
И & : & С & = & У
\end{array}$$

Ответ: 29.

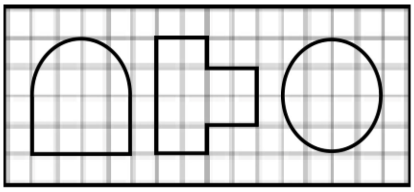
▷10. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+\left(9a^2-2\right)y=3a \\ x+y=1 \end{cases}$$

не имеет решений. В ответе запишите утроенную сумму всех значений.

Ответ: -2.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант



▷1. Найдите форму и объём пробки, которая плотно закроет любое из трёх заданных отверстий, если клетка имеет сторону длиной a. В ответе запишите разность найденного объёма и объёма шара с радиусом $2a$ в виде десятичной дроби (при $a = \cos 30°$).

Ответ: 4,5.

▷2. Средний возраст студентов-заочников одной группы университета равен их количеству. 39-летний студент этой группы забрал документы и покинул университет, после чего средний возраст оставшихся студентов снова равнялся их количеству. Сколько студентов первоначально было в группе?

Ответ: 20.

▷3. Последовательность (a_n) задана соотношением $\forall n > 3$: $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$; $a_1 = a_2 = 1, a_3 = -1$. Найдите $|a_{2021} + a_{1921}|$.

Ответ: 2.

▷4. Найдите, при каком наибольшем целом значении параметра p на плоскости (x, y) существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - y \geq px \\ x - 2y \leq 1 \\ y + 2x \leq 2 \end{cases}$$

Ответ: -1.

▷5. Решить уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}\left(\cos x - \sin x\right)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

В ответе укажите, сколько решений находятся в промежутке $(1921\pi; 2021\pi)$.

Ответ: 150.

▷6. В трапеции *ABCD* стороны *AB* и *CD* параллельны и *CD* = 2*AB*. На сторонах *AD* и *BC* выбраны соответственно точки *P* и *Q* так, что *DP* : *PA* = 2 : 1, *BQ* : *QC* = 3 : 4. Найти отношение $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) площадей четырёхугольников *ABQP* и *CDPQ*. В ответе запишите $m+n$.

Ответ: 63.

▷7. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD*, все рёбра которой равны *a*. Через точку *M*, делящую отрезок *AD* в отношении 2 : 1, считая от точки *A*, проведена плоскость, параллельная плоскости *ASB*. Вычислите площадь полученного сечения. В ответе запишите найденную площадь при $a=\sqrt[4]{3888}$.

Ответ: 15.

▷8. Найдите сумму всех двузначных *n*, при которых 3^n+1 делится на 7.

Ответ: 855.

▷9. Расшифровать запись, в которой: 1) разные буквы обозначают разные цифры, 2) звёздочки обозначают любые цифры. В ответе запишите сумму цифр разности $\overline{МТУСИ}-N$, где *N* – наибольшее возможное число из найденных $\overline{****}$.

*	+	М	=	*
+		:		:
Т	:	У	=	С
॥		॥		॥
*	−	И	=	*

Ответ: 21.

▷10. Найти все значения *a*, при которых система уравнений

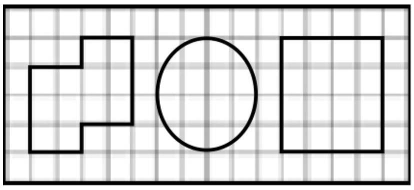
$$\begin{cases} 2x+ay=a+2 \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений. В ответе запишите сумму всех найденных значений.

Ответ: 3.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

▷1. Найдите форму пробки, которая пройдёт сквозь три заданные отверстия, т.е. плотно закроет любое из заданных отверстий. В ответе запишите отношение объёма шара с радиусом 1,5a к объёму пробки (a = 4 клетки).



Ответ: 24.

▷2. Из полного набора пятизначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что в записи этого числа цифры располагаются в порядке убывания слева направо.

Ответ: 0,0028.

▷3. Последовательность (a_n) задана соотношением $\forall n > 2:$ $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}|$; $a_1 = 1, a_2 = 2$. Найдите $a_{2021} + a_{1921}$.

Ответ: 1.

▷4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения $(a-18)x^2 + 3ax + 18 = 0$ и $ax^2 - 36x + 36 = 0$ имеют общий корень. В ответе укажите сумму всех найденных значений a.

Ответ: -19.

▷5. Найдите все решения уравнения

$$\cos\left(\pi(1-x)\right) + \cos\left(2\pi(2-x)\right) + \cos\left(3\pi(3-x)\right) = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. В ответе запишите разность между наибольшим и наименьшим найденными значениями.

Ответ: 1.

▷6. Окружность радиуса 2 проходит через середины трёх сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны 30° и 45° соответственно. Найти h длину высоты, проведённой из вершины A. В ответе запишите значение $(h-2)^2$.

Ответ: 12.

▷7. В правильном тетраэдре *SABC* с ребром *a* через вершину *A* проведена плоскость, перпендикулярная грани *SBC* и параллельная прямой *BC*. Вычислите площадь полученного сечения. В ответе запишите найденную площадь при $a = \sqrt[4]{486}$.

Ответ: 6.

▷8. Найдите сумму всех двузначных *n*, при которых $5^n + 1$ делится на 7.

Ответ: 867.

▷9. Решите ребус. В ответе запишите сумму цифр суммы сомножителей.

```
 x    ????
      ?2??
     523??
 +  ????4
   ?9641
  ?1002???
```

Ответ: 26.

▷10. Числа *a* и *b* таковы, что система уравнений

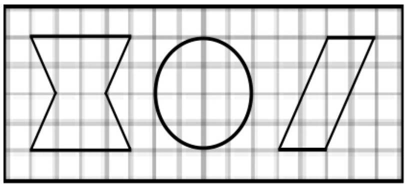
$$\begin{cases} a^2x - ay = 1 - a \\ bx + (3 - 2b)y = 3 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = 1, y = 1$. Найдите $a + b$.

Ответ: 0.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▷1. Найдите форму пробки, которая пройдёт сквозь три заданных отверстия, т.е. плотно закроет любое из заданных отверстий. В ответе запишите отношение объёма шара с радиусом 1,5a к объёму пробки (a = 4 клетки).



Ответ: 54.

▷2. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них независимо от остальных может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найдите вероятность следующих событий: A – все пассажиры выйдут на четвёртом этаже; B – все пассажиры выйдут на одном и том же этаже; C – все пассажиры выйдут на разных этажах. В ответе запишите число в виде десятичной дроби $\dfrac{P(A)}{P(B)\cdot P(C)}$.

Ответ: 0,3.

▷3. Последовательность (a_n) задана соотношением $\forall n > 3$: $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$; $a_1 = 1, a_2 = a_3 = -1$. Найдите $a_{2021} + a_{1921}$.

Ответ: 0.

▷4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнения $(a+18)x^2 + 3ax - 18 = 0$ и $ax^2 + 36x - 36 = 0$ имеют общий корень. В ответе укажите сумму всех найденных значений a.

Ответ: 19.

▷5. Найдите сумму всех решений уравнения

$$\sin\big(\pi(1+x)\big) - \sin\big(2\pi(2+x)\big) + \sin\big(3\pi(3+x)\big) = 0,$$

принадлежащих интервалу $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: 5.

▷6. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q так, что

$DP : PA = 3 : 4$, $BQ : QC = 1 : 2$. Найти отношение $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$. В ответе запишите $m + n$.

Ответ: 67.

▷7. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы при вершине A прямые, каждое ребро, исходящее из точки A, равно b. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, походящей через точку A перпендикулярно плоскости SBC и параллельно ребру BC. В ответе запишите найденную площадь при $b = \sqrt[4]{7776}$.

Ответ: 24.

▷8. Найдите сумму всех двузначных n, при которых $7^n + 1$ делится на 5.

Ответ: 1265.

▷9. Решите ребус. В ответе запишите сумму цифр суммы делимого и частного.

```
-1??? |?7
 ??5  |??
 -???
  ??1
    0
```

Ответ: 7.

▷10. При каких натуральных a точки с координатами $(-1, -3 - a)$, $(4 - a, 2a + 2)$ лежат на одной прямой? В ответе запишите сумму всех найденных значений.

Ответ: 1.

Задания заключительного тура Олимпиады с решениями

5 класс

▹**Задача 1.** Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 2021 и не делящихся ни на 17, ни на 113?

Решение:

Подсчитаем, сколько натуральных чисел от 1 до 2021 делится на 17, на 113 и на оба эти числа одновременно:

$$2021 = 17\cdot\mathbf{118} + 15$$

$$2021 = 113\cdot\mathbf{17} + 100$$

$$2021 = 1921\cdot\mathbf{1} + 100$$

Таким образом, 118 чисел делятся на 17, 17 чисел делятся на 113 и 1 число делится на $117\cdot 13=1921$ (чтобы оно не посчиталось дважды, его необходимо вычесть из общего количества). Тогда чисел, которые не делятся ни на 17, ни на 113, получится

$$2021-\left(17+118-1\right)=1887.$$

Ответ: 1887.

▹**Задача 2.** Средний возраст членов гимнастической секции – 11 лет; старосте секции 17 лет, а средний возраст остальных членов секции – 10 лет. Сколько детей занимается в секции?

Решение:

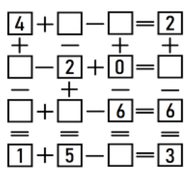
Пусть всего в секции занимается n детей, тогда их суммарный возраст $S=11n$. С другой стороны, суммарный возраст всех членов без старосты секции равен $10\left(n-1\right)$, значит $S=17+10\left(n-1\right)$. Приравняем эти значения:

$$11n=18+10\left(n-1\right)$$

$$n=7$$

Ответ: 7 членов.

▹**Задача 3.** В пустых клетках на рисунке проставить такие числа, чтобы все 4 горизонтальных и 4 вертикальных равенства были верны.



Решение:

Начнём последовательно заполнять таблицу со строки или столбца, в которых имеется всего одна пустая клетка. Например:

1) четвёртая строка: в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 3;

2) третий столбец: в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 9;

3) четвертый столбец: 7;

4) первая строка: 7;

5) вторая строка: 9;

6) первый столбец: 12;

7) третья строка: 0.

Ответ: $\begin{array}{ccccccc} \boxed{4} & + & \boxed{7} & - & \boxed{9} & = & \boxed{2} \\ + & & - & & + & & + \\ \boxed{9} & - & \boxed{2} & + & \boxed{0} & = & \boxed{7} \\ - & & + & & - & & - \\ \boxed{12} & + & \boxed{0} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\ = & & = & & = & & = \\ \boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & \boxed{3} \end{array}$.*

▹**Задача 4.** Сколько всего спичек может быть получено из деревянного куба, ребро которого равно 1 м? Размер спички $50 \times 2 \times 2$ мм.

Решение:

1 метр = 100 см = 1000 мм, тогда объем одной спички будет равен $50 \cdot 2 \cdot 2 = 200\,\text{мм}^3$, в то время как объем всего деревянного куба равен 1000^3мм^3. Тогда искомое количество равно:

$$h = \frac{1000000000}{200} = 5000000.$$

Ответ: 5000000.

▹**Задача 5.** Замените в выражении

$$* \,(* \,(* \,(* - 20) - 21) - 19) = 21$$

звёздочки различными делителями числа 28 так, чтобы получилось верное равенство.

Решение: $28 = 2^2 \cdot 7$.

Всего делителей числа 28 шесть: 1, 2, 4, 7, 4, 28. Заметим, что внутренняя звездочка может быть равна только 28, иначе разность во внутренней скобке (а значит, и во всех остальных) окажется отрицательной.

Перепишем для удобства наше равенство в следующем виде:

$$z_1\left(z_2\left(z_3\cdot 8-21\right)-19\right)=21.$$

Первая звездочка может быть равна 7 или 1. Допустим $z_1=7$, тогда

$$z_2\left(z_3\cdot 8-21\right)=22.$$

Вторая звездочка может быть равна 2 или 1. Если $z_2=2$, то $8z_3=32$, откуда $z_3=4$.

Если же $z_2=1$, то $8z_3=43$, что не имеет решений в натуральных числах.

Вернёмся теперь к нашему предположению о первой звёздочке. Пусть теперь $z_1=1$, тогда

$$z_2\left(z_3\cdot 8-21\right)=40,$$

и для второй звёздочки возможны значения 2 и 4.

$$z_2=2;\ 8z_3=41$$

$$z_2=4;\ 8z_3=31.$$

Ни одно из этих соотношений также не разрешимо в натуральных числах.

Ответ: 7(2(4(28 – 20) – 21) – 19) = 21.

▹**Задача 6.** Решить уравнение $x+S(x)=1921$, где $S(x)$ – сумма цифр натурального числа *x*.

Решение:

С одной стороны, очевидно, что $x < 1921$. В этом случае сумма цифр искомого числа $S(x)\le 27$ (значение достигается при $x = 1899$). С другой стороны,

$$1921=x+S(x)\le x+27\Rightarrow x\ge 1894.$$

Таким образом, для первых двух цифр числа возможно всего два варианта. Рассмотрим их:

1) $x = \overline{19ab}$, $S(x) = 10 + a + b$. Уравнение принимает вид:

$$1900 + 10a + b + 10 + a + b = 1921$$

$$11a + 2b = 11$$

$$a = 1, b = 0$$

$$x = 1910.$$

2) $x = \overline{18ab}$, $S(x) = 9 + a + b$. Тогда

$$1800 + 10a + b + 9 + a + b = 1921$$

$$11a = 112 - 2b.$$

Из этого равенства видно, что a должно быть чётным; полагая $a = 2k$, ($0 \le k \le 4$), получаем:

$$11k = 56 - b$$

$$b - 1 = 11(5 - k).$$

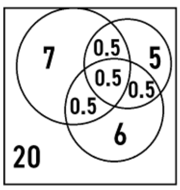
То есть $(b-1) \vdots 11$, откуда, с учетом того, что $0 \le b \le 9$, получаем $b = 1$. Но тогда $k = 5$, что невозможно.

Ответ: 1910.

▹**Задача 7.** Пол комнаты площадью 20 м^2 покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра – 7 м^2, другого – 6 м^2 и третьего – 5 м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1 м^2, причём все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2. Какова площадь части пола, не покрытой коврами?

Решение:

Воспользуемся формулой включений-исключений для нахождения площади пола, покрытой коврами:



$$7 + 6 + 5 - 4 - 4 - 4 + 0,5 = 15,5.$$

Тогда оставшаяся часть пола имеет площадь

$$20 - 15,5 = 4,5.$$

P.S. Если формула включений-исключений неизвестна, то можно рассуждать следующим образом. Раз все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2, то на части, покрытые ровно двумя коврами, также остаётся по 0,5 м^2. Значит, площадь, покрытая только первым ковром, равна $7-3\cdot 0{,}5=5{,}5$м^2, только вторым ковром – $6-3\cdot 0{,}5=4{,}5$ м^2, только третьим ковром – $5-3\cdot 0{,}5=3{,}5$ м^2, и тогда площадь, покрытая коврами, равна

$$5{,}5+4{,}5+3{,}5+4\cdot 0{,}5=15{,}5.$$

Ответ: 4,5 м^2.

▹**Задача 8.** Сумма двух натуральных чисел равна 1921. Если у одного из слагаемых зачеркнуть: а) последние две цифры; б) первые две цифры, то получится второе слагаемое. Найдите эти числа и объясните, почему других нет.

Решение:

$$x+y=1921.$$

Если большее число – трехзначное, а меньшее, соответственно, однозначное, то

$$x+y\le 999+9=1008<1921,$$

то есть не удовлетворяет условиям задачи. Пусть y – четырехзначное число, а x – двухзначное.

а) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y=100x+z,$$

где z – двузначное или однозначное. Подставим его в наше уравнение:

$$100x+z+x=1921$$

$$101x+z=1921=19\cdot 101+2$$

$$x=19, z=02.$$

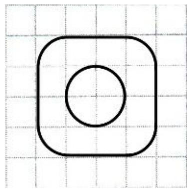
Это решение единственно, поскольку при других x число z окажется трехзначным.

б) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y = 100z + x$$

$$2x + 100z = 1921.$$

Но левая часть этого равенства чётная, а правая – нечётная, значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

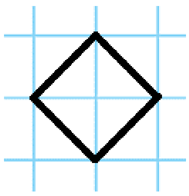


Ответ: а) 1902; б) нет решений.

▹**Задача 9.** На клетчатой бумаге нарисована фигура, граница которой состоит из прямолинейных отрезков и дуг окружностей. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого в шесть раз меньше площади нарисованной фигуры.

Решение:

Площадь нарисованной фигуры равна $S = 8 + 4 = 12$ клеток (8 полноценных и 4 собранных из четверти окружности и "лунки"), значит, площадь искомого квадрата равна $12/6 = 2$. На клетчатой бумаге такой квадрат изображается следующим образом.

Ответ: 

▹**Задача 10.** Сколько единиц в записи числа $9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{1921}$?

Решение:

$$9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{1921} = 10 - 1 + 10^2 - 1 + \ldots + 10^{1921} - 1 =$$

$$= \left(10 + 10^2 + \ldots + 10^{1921}\right) - 1921 = \underbrace{11\ldots10}_{1922} - 1921.$$

Ясно, что при вычитании могут измениться только последние пять цифр числа:

$$\underbrace{11\ldots1}_{1917}11110 - 1921 = \underbrace{11\ldots1}_{1917}09189.$$

В этом числе, очевидно, 1918 единиц.

Ответ: 1918.

6 класс

▹**Задача 1.** Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 20210 и не делящихся ни на 17, ни на 113.

Решение:

Подсчитаем, сколько натуральных чисел от 1 до 2021 делится на 17, на 113 и на оба эти числа одновременно:

$$20210 = \mathbf{1188}\cdot 17 + 14$$

$$20210 = \mathbf{178}\cdot 113 + 96$$

$$20210 = \mathbf{10}\cdot 1921 + 1000.$$

Таким образом, 1188 чисел делятся на 17, 178 чисел делятся на 113, и 10 чисел делятся на 17·117 = 1921 (чтобы оно не посчиталось дважды, его необходимо вычесть из общего количества). Тогда чисел, которые не делятся ни на 17, ни на 113, получится

$$20210-(1188+178-10)=18854.$$

Ответ: 18854.

▹**Задача 2.** Средний возраст 11 игроков футбольной команды на 1 год больше, чем средний возраст 10 футболистов без капитана. На сколько лет возраст капитана больше среднего возраста команды?

Решение:

Пусть m – средний возраст 10 футболистов без капитана, $m+1$ – средний возраст 11 футболистов. Тогда возраст капитана будет равен

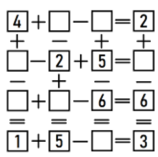
$$11(m+1)-10m=m+11,$$

а разница между возрастом капитана и средним возрастом остальной команды равна

$$m+11-m=11 \text{ лет}.$$

Ответ: 11 лет.

▹**Задача 3.** В пустых клетках на рисунке проставить такие числа, чтобы все 4 горизонтальных и 4 вертикальных равенства были верны.



Решение:

Начнём последовательно заполнять таблицу со строки или столбца, в которых имеется всего одна пустая клетка. Например:

1) четвёртый столбец: в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 7;

2) вторая строка: в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 4;

3) первый столбец: 7;

4) третья строка: 5;

5) четвёртая строка: 3;

6) второй столбец: 2;

7) первая строка: 4.

Ответ:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{2} & - & \boxed{4} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{4} & - & \boxed{2} & + & \boxed{5} & = & \boxed{7} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{7} & + & \boxed{5} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}.$$

▹**Задача 4.** Решить уравнение $x+S(x)=2021$, где $S(x)$ – сумма цифр натурального числа *x*.

Решение:

С одной стороны, очевидно, что $x < 2021$. В этом случае сумма цифр искомого числа $S(x) \le 28$ (значение достигается при $x = 1999$). С другой стороны,

$$2021 = x + S(x) \le x + 28 \Rightarrow x \ge 1993.$$

Таким образом, для первых двух цифр числа возможно всего два варианта. Рассмотрим их:

а) $x = \overline{20ab}$, $S(x) = 2 + a + b$. Уравнение принимает вид:

$$2000 + 10a + b + 2 + a + b = 2021$$

$$11a + 2b = 19$$

$$a = 1, b = 4.$$

Отсюда $x = 2014$.

б) $x=\overline{19ab}$, $S(x)=10+a+b$. Уравнение принимает вид

$$1900+10a+b+10+a+b=2021$$

$$11a+2b=111$$

$$a=9, b=6.$$

Это единственное решение, т.к. $a\le 9$, а при меньших a число b окажется больше 9. Отсюда $x=1996$.

Ответ: x = 2014, x = 1996.

▹**Задача 5.** Сумма двух натуральных чисел равна 2021. Если у одного из слагаемых зачеркнуть

а) последние две цифры;

б) первые две цифры,

то получится второе слагаемое. Найдите эти числа в обоих случаях.

Решение:

$$x+y=2021.$$

Если большее число – трехзначное, а меньшее, соответственно, однозначное, то

$$x+y\le 999+9<2021,$$

то есть не удовлетворяет условиям задачи. Пусть y – четырехзначное число, а x – двухзначное.

а) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y=100x+z,$$

где z – двузначное или однозначное. Подставим его в наше уравнение:

$$10x+z+x=2021$$

$$101x+z=2021=101\cdot 20+1$$

$$x=20, z=01.$$

Это решение единственно, поскольку при других x число z окажется трехзначным. Таким образом, $y=2001, x=20$.

б) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

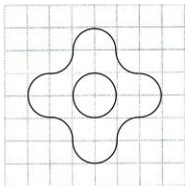
$$y = 100z + x$$

$$2x + 100z = 2021.$$

Но левая часть этого равенства чётная, а правая – нечётная, значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.

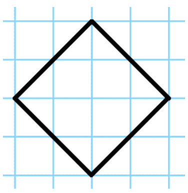
Ответ: а) 2001; б) нет решений.

▹**Задача 6.** На клетчатой бумаге нарисована фигура, граница которой состоит из дуг окружностей одного радиуса. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого составляет 50% площади нарисованной фигуры.



Решение:

Площадь нарисованной фигуры равна $S = 8 + 8 = 16$ клеток (8 полноценных и 4 собранных из четверти окружности и "лунки"), значит, площадь искомого квадрата равна $16/2 = 8$. На клетчатой бумаге такой квадрат изображается следующим образом.

Ответ: 

▹**Задача 7.** Длина удава в «попугаях» составила 48, а его же длина в «слоненках» – только 3. Чему равна длина удава в «мартышках», если известно, что длина слоненка в «мартышках» равна длине мартышки в «попугаях»?

Решение:

Обозначим длину удава как u, попугая – p, слонёнка – s, мартышки – m. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$u = 48p = 3s$$

$$u = x \cdot m, m = x \cdot p.$$

Тогда

$$s = x^2 p \Rightarrow u = 3x^2 \cdot p = 48p\,.$$

Отсюда получаем

$$x = 4 \Rightarrow u = 3s = 3x \cdot m = 12m\,,$$

то есть длина удава в мартышках равна 12.

Ответ: 12 мартышек.

▹**Задача 8.** Сколько единиц в записи следующего числа

$$\underbrace{99..9}_{1921} + \underbrace{99..9}_{1922} + \ldots + \underbrace{99..9}_{2021}?$$

Решение:

$$\underbrace{99..9}_{1921} + \underbrace{99..9}_{1922} + \ldots + \underbrace{99..9}_{2021} = 10^{1921} - 1 + 10^{1922} - 1 + \ldots 10^{2021} - 1 =$$

$$= 10^{1921} + 10^{1922} + \ldots 10^{2021} - 101 =$$

$$= 10^{1921}\left(1 + 10 + \ldots 10^{100}\right) - 101 =$$

$$= \underbrace{11...1}_{101}\underbrace{00...0}_{1921} = \underbrace{11...1}_{100}\underbrace{9...9899}_{1922}$$

Ответ: 100.

▹**Задача 9.** Контрольная работа по математике в шестом классе состояла из задачи, уравнения и численного примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение – 4, только пример – 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение – 5, только пример – 3. Остальные выполнили работу правильно. Сколько таких учеников?

Решение:

Ученики, не решившие только задачу, решили верно и пример, и уравнение; не решившие только уравнение решили верно и пример, и задачу; не решившие только пример решили верно и задачу, и уравнение. На рисунке показано распределение учеников в классе по решённым заданиям, из которого видно, что

$$n+2+5+7+3+8+4=36$$

$$n=36-29=7.$$

Ответ: 7 учеников.

▹**Задача 10.** Треть книжной полки занимают словари толщиной 19 мм, а оставшуюся часть – энциклопедии толщиной 23 мм. Какова наименьшая возможная длина полки и сколько книг на ней стоит?

Решение:

Пусть m – количество словарей, n – количество томов энциклопедии, тогда все словари занимают $19m$ мм, а энциклопедии – $23n$ мм, причём энциклопедии занимают на полке места в два раза больше, чем словари, то есть

$$2\cdot 19m=23n.$$

Поскольку m и n – натуральные числа, а 38 и 23 взаимно просты, получаем, что

$$m=23, n=38$$

наименьшее возможное количество книг. Тогда длина полки

$$l=3\cdot 19m=1311 \text{ мм}=131{,}1 \text{ см},$$

а количество томов $m + n = 61$.

Ответ: 61 том на полке длиной 131,1 см.

7 класс

▹**Задача 1.** Найти все четырёхзначные числа, которые одновременно делятся на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15.

Решение:

Для того чтобы число удовлетворяло условию задачи, достаточно, чтобы оно делилось на 5, 7, 8 и 9, а поскольку эти числа уже взаимно просты, то наше число должно делиться на $5\cdot 7\cdot 8\cdot 9=2520$. Подобных четырёхзначных чисел ровно три:

$$N_1=2520, N_2=2\cdot 2520=5040, N_3=3\cdot 2520=7560.$$

Ответ: 2520, 5040, 7560.

▹**Задача 2.** В седьмом классе каждый мальчик дружит с пятью девочками и шестью мальчиками, а каждая девочка дружит с шестью мальчиками и пятью девочками. Сколько школьников учится в седьмом классе, если известно, что их не больше 30?

Решение:

Пусть в классе учится m мальчиков и n девочек. Подсчитаем, сколько можно составить дружеских пар "мальчик-девочка". Так как каждый мальчик дружит с 5-ю девочками, то число пар равно $5m$. С другой стороны, так как каждая из n девочек дружит с 6-ю мальчиками, то таких пар – $6n$. Имеем $5m = 6n$, откуда $n = 5k$, $m = 6k$, где k – некоторое натуральное число. Тогда число школьников в 7-м классе $n + m = 11k$ делится на 11. Согласно условию, каждый пятиклассник имеет 11 друзей в классе. Поэтому число учеников больше 11. А так как по условию их не больше 30, то это число 22.

Ответ: 22.

▹**Задача 3.** Про числа a, b, c, d известно, что $a = bcd$, $a + b = cd$, $a + b + c = d$, $a + b + c + d = 1$. Чему равно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

Решение:

$$\begin{cases} a + b + c - d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}.$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим $d = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2}c \\ a + b + c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}c + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{3}.$$

Подставляя в оставшиеся уравнения, получим окончательно

$$\begin{cases} a = \frac{1}{6}b \\ a + b = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{7}, a = \frac{1}{42}.$$

Тогда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=42+7+3+2=54.$$

Ответ: 54.

▹**Задача 4.** Шестую часть книжной полки занимают книги толщиной 12 мм, треть – книги толщиной 15 мм, а оставшуюся часть – книги толщиной 18 мм. Все книги разные. Иван меньше чем за месяц прочёл их все, читая по одной книге в день. Сколько книг стоит на полке, и какова длина полки?

Решение:

Пусть n – количество книг толщиной 12 мм, m – 15 мм, k – 18 мм. Книги первого типа занимают на полке в два раза меньше места, чем книги второго типа, значит

$$2\cdot 12n=15m.$$

Книги третьего типа занимают половину полки, значит

$$3\cdot 15m=2\cdot 18k.$$

При этом известно, что Иван прочёл их все меньше чем за месяц, читая по одной в день, значит $m+n+k<31$.

$$\begin{cases}8n=5m\\5m=4k\end{cases}.$$

С учетом того, что все числа – натуральные, видим, что m должно делиться на 8.

Если m = 8, то n = 5, k = 10 и $m+n+k=23<31$. Если же m = 8k, k > 1, то неравенство уже не выполняется, а значит, решение единственно.

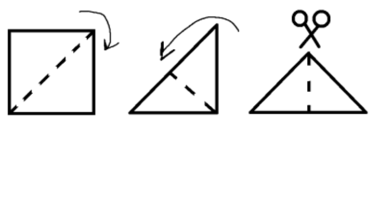
Длина полки при этом равна

$$l=6\cdot 12n=360\text{ мм }=36\text{ см.}$$

Ответ: 23 книги на полке длиной 36 см.

▹**Задача 5.** Как квадратный кусок бумаги сложить так, чтобы после одного прямолинейного разреза получилось четыре квадрата?

Решение:



▹**Задача 6.** Не более 100, но не менее 50 натуральных чисел записаны по кругу. Известно, что сумма любых трех подряд идущих чисел одна и та же. Каково наибольшее из всех возможных значений написанных чисел, если известно, что сумма всех чисел равна 1921.

Решение:

Поскольку все суммы подряд идущих чисел равны, т.е.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_5 = \ldots = a_{n+1} + a_n + a_1 = a_n + a_1 + a_2$$

получаем

$$a_1 = a_4 = a_7 = \ldots$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \ldots$$

$$a_3 = a_6 = a_9 = \ldots$$

Если количество чисел не кратно трём, то это будет означать, что все числа равны между собой; если же $n = 3k$, то значения для каждой цепочки могут быть различными.

В случае, если по кругу записаны равные числа, сумма которых равна 1921, для того чтобы эти числа были натуральными, их количество должно равняться 17 или 113 (или 1921), что не удовлетворяет условию. Поэтому рассмотрим случай $n = 3k$ и обозначим

$$a_1 = a_4 = a_7 = \ldots = a$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = b$$

$$a_3 = a_6 = a_9 = \ldots = c,$$

а количество троек этих чисел – через k $(17 \le k \le 33)$. Тогда

$$1921 = 17 \cdot 113 = a_1 + \ldots + a_n = (a + b + c) \cdot k.$$

Единственное возможное значение для $k = 17$, откуда

$$n = 51, a + b + c = 113.$$

Числа a, b, c, вообще говоря, необязательно различные, и если мы хотим найти наибольшее возможное значение числа, встречающегося в записи, следует взять $a = 1$, $b = 1$, $c = 111$.

Ответ: 111.

▹**Задача 7.** В квадрате 3×3 заполните 9 клеток различными целыми неотрицательными числами так, чтобы суммы чисел по каждой строке, каждому столбцу и диагоналям квадрата были одинаковыми и равнялись 456.

Решение:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Обозначим суммы по строкам, столбцам и диагоналям как l, тогда сумма всех элементов таблицы будет равна $3l$. Если теперь сложить все строки, все столбцы, две диагонали и повторно вторую строку и второй столбец, то каждый элемент таблицы встретится в этой сумме три раза, а средний элемент – ещё три сверх того:

$$\left(a_1+a_2+a_3\right)+2\cdot\left(a_4+a_5+a_6\right)+\left(a_7+a_8+a_9\right)+\left(a_1+a_4+a_7\right)+2\cdot\left(a_2+a_5+a_8\right)+$$
$$+\left(a_3+a_6+a_9\right)+\left(a_1+a_5+a_9\right)+\left(a_3+a_5+a_7\right)=3S+3a_5.$$

Поскольку суммы во всех скобках равны, получаем

$$10l=3\cdot3l+3a_5\Rightarrow a_5=\frac{l}{3}.$$

Если теперь оставить первые два элемента произвольными, а остальные найти из условий задачи, мы получим следующую таблицу:

a_1	a_2	$l-a_1-a_2$
$\frac{4l}{3}-2a_1-a_2$	$\frac{l}{3}$	$2a_1+a_2-\frac{2l}{3}$
$a_1+a_2-\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}-a_2$	$\frac{2l}{3}-a_1$

Теперь можно придать первым двум элементам любые значения при условии, что остальные элементы таблицы останутся неотрицательными.

Ответ:

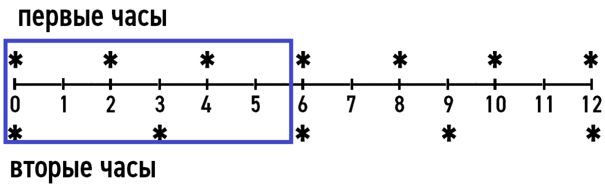
Например,

114	304	38
76	152	228
266	0	190

▹**Задача 8.** Двое часов начали бить одновременно. Первые бьют через каждые 2 секунды, вторые через каждые 3 секунды. Всего был насчитан 1921 удар (слившиеся удары воспринимаются как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами? Удар считать мгновенным.

Решение:

Проиллюстрируем удары часов:



Видно, что общая картина ударов повторяется с периодичностью в 6 секунд, причём за каждый промежуток слышно четыре удара.

$$1921 = 480 \cdot 4 + 1,$$

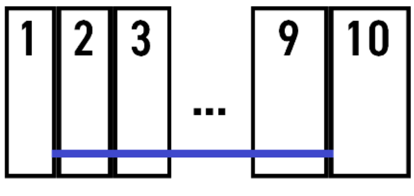
значит, за всё время, что били часы, прошло 480 периодов, и остался ещё один сдвоенный удар, пришедшийся на начало следующего периода, но поскольку удар считается мгновенным, новых секунд он не добавил. Отсюда получаем

$$t = 6 \cdot 480 \text{ сек} = 48 \text{ мин}.$$

Ответ: 48 минут.

▹**Задача 9.** На книжной полке у Знайки стоит история Цветочного города в 10 томах, тома идут по порядку слева направо. Толщина первого тома – 2,1 см, второго – 2,2 см, третьего – 2,3 см и т.д., десятого – 3 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы десятого тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщина обложки – 2 мм.

Решение:



С учетом расположения книг путь червяка пролегал через одну обложку первого тома, все тома со второго по девятый, и одну обложку десятого тома. Итого, на пути червяка встретилось 2 обложки и $2,2+2,3+...+2,9=\frac{2,2+2,9}{2}\cdot 8=20,4$ см книг.

Длина пути червяка составила

$$l=20,4+0,4=20,8 \text{ см.}$$

Ответ: 20,8 см.

▹**Задача 10.** Для участников олимпиады по математике «ТИИМ–2021» было приготовлено конфет столько же, сколько вместе булочек и стаканов чая. Каждый участник съел по конфете и выпил по стакану чая, после чего осталось стаканов чая и конфет вместе столько же, сколько булочек. Остался ли ещё чай?

Решение:

Пусть x – количество конфет, y – количество стаканов чая, z – количество булочек, n – количество участников. Тогда

$$\begin{cases} x=y+z \\ (x-n)+(y-n)=z \end{cases}$$

$$y+z-n+y-n=z$$

$$2y=2n \Rightarrow y=n,$$

то есть количество участников равно количеству стаканов чая. Значит, чай закончился.

Ответ: нет, чай закончился.

8 класс

▹**Задача 1.** Представить число 1921 в виде суммы двух натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых максимально.

Решение:

$$a + b = 1921 \Rightarrow b = 1921 - a.$$

Наименьшее общее кратное чисел не превосходит их произведения:

$$НОК(a,b) \le a \cdot b = a \cdot (1921 - a) = \left(\frac{1921}{2}\right)^2 - \left(\frac{1921}{2} - a\right)^2.$$

Максимальное значение правой части достигается при $a = \dfrac{1921}{2} \notin \mathbb{N}$, поэтому рассмотрим ближайшее натуральное число: $a = 960$ (для $a = 961$ результат будет такой же). В этом случае

$$НОК(a,b) = НОК(960,961) = 960 \cdot 961,$$

т.к. числа взаимно просты, а значит, именно у этих чисел наименьшее кратное достигает своего наибольшего значения.

Ответ: 960 + 961.

▹**Задача 2.** Во всех клетках поставить натуральные числа так, чтобы выполнялись все 8 равенств. Сколько решений имеет эта задача?

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{} & - & \boxed{2} & + & \boxed{} & = & \boxed{} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{} & + & \boxed{} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Решение:

Сначала заполним клетки, в которых значение определяется однозначно, после чего во вторую клетку первой строки подставим переменную *x* и подсчитаем относительно неё остальные значения. Получим следующую картину:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{x} & - & \boxed{x+2} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{x+2} & - & \boxed{2} & + & \boxed{7-x} & = & \boxed{7} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{x+5} & + & \boxed{7-x} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Т.к. все числа, стоящие в клетках, натуральные, получим следующие ограничения на *x*:

$$x \geq 1, 7 - x \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 6,$$

откуда получаем, что задача имеет 6 различных решений.

Ответ: 6.

▹**Задача 3.** Найдите наименьшее число, которое имеет ровно 2021 делитель.

Решение:

Рассмотрим разложение произвольного числа на простые делители:

$$N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}.$$

Поскольку все делители числа N состоят из тех же простых чисел и степень каждого из них может принимать любое значение от 0 до β_i, общее количество делителей выражается формулой:

$$D = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)\dots(\beta_n + 1).$$

По условию задачи

$$D = 2021 = 43 \cdot 47,$$

откуда следует, что искомое число имеет не более двух различных простых делителей. Поскольку нам требуется найти наименьшее такое число, в качестве этих простых делителей мы будем брать наименьшие: 2 и 3.

Если делитель один, то $\beta_1 = 2021$, а само число $N = 2^{2020}$. Если же делителей два, то $\beta_1 = 42$, $\beta_2 = 46$, а число имеет вид $N = 2^{42} \cdot 3^{46}$ или $N = 2^{46} \cdot 3^{42}$. Сравнив значения этих трёх чисел, окончательно находим, что наименьшее из них равно $2^{46} \cdot 3^{42}$.

Ответ: $2^{46} \cdot 3^{42}$.

▹**Задача 4.** Расшифруйте ребус, в котором разным буквам соответствуют разные цифры:

$$\begin{array}{l|l}
-\text{ШЕСТЬ} & \text{ДВА} \\
\;\;\underline{\text{ТИС}} & \text{ТРИ} \\
\;\;-\text{АВТ} & \\
\;\;\;\;\underline{\text{РЬЕ}} & \\
\;\;\;\;-\text{ИЕЬ} & \\
\;\;\;\;\;\;\underline{\text{ИЕЬ}} & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;0 &
\end{array}$$

Решение:

Во-первых, обратим внимание на то, что при умножении числа ДВА на Т, Р и И первые цифры произведения всегда равны множителям; отсюда можно заключить, что Д = 1. Кроме того, ШЕС – ТИС = АВ, и поскольку числа единиц здесь совпадают, В = 0.

Чтобы разобраться, чему равно А, посмотрим на следующие правила умножения: 10А * Р = РЬЕ, 10А * И = ИЕЬ. Из них можно заключить, что А*Р = ЬЕ и А*И = ЕЬ. Если перебрать все варианты из таблицы умножения, дающие числа, в которых цифры стоят в разном порядке, то получим следующие варианты: 12 и 21 при А = 3, 24 и 42 при А = 6, а также любую пару при А = 9.

Далее остаётся аккуратно проверить все эти варианты, помня о том, что разным буквам всегда должны соответствовать разные цифры, чтобы убедиться, что единственный подходящий вариант – это 72 и 27 при А = 9, и ребус окончательно принимает вид 52647:109 = 483.

Ответ: 52647:109 = 483.

▹**Задача 5.** 48 кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову 5 мин? (Учтите, что лошадь не может стоять на двух ногах).

Решение:

Ясно, что затраченное время не меньше чем $60 \cdot 4 : 48 = 5$, т.е. 25 мин. Разобьем кузнецов и лошадей на 12 групп, по 4 кузнеца и 5 лошадей в каждой, и распределение работы в каждой группе представим таблицей, в которой, например, цифра 3, стоящая на пересечении строки 2 со столбцом 4, означает, что в течение 3-й пятиминутки кузнец подковывает 4-ю лошадь

к\л	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3
4	3	4	5	1	2

Так как числа, стоящие в каждой строке и в каждом столбце, различны, то в течение каждой пятиминутки каждый кузнец работает ровно с одной лошадью. Из таблицы видно, что вся работа будет выполнена за 25 минут.

Ответ: 25 минут

▹**Задача 6.** Даны отрезки длиной $|a|=\sqrt{19}, |b|=\sqrt{21}$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок $l:|l|=\sqrt{2021}$.

Решение:

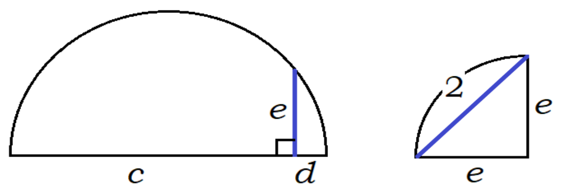
Построим отрезки длиной

$$|c|=\sqrt{19}+\sqrt{21} \text{ и } |d|=\sqrt{21}-\sqrt{19},$$

тогда

$$\sqrt{|c|\cdot|d|}=\sqrt{21-19}=\sqrt{2}.$$

Чтобы построить отрезок такой длины, возьмём окружность с диаметром $|c|+|d|$ и восстановим перпендикуляр к нему в точке "стыковки" отрезков:



Имея в распоряжении отрезок длины $|e|=\sqrt{2}$, нетрудно построить отрезок длины 2 и, поделив его пополам, получить единичный отрезок. Далее искомый отрезок можно построить, например, тем же методом, который мы использовали для получения отрезка $|e|=\sqrt{2}$, только взяв окружность диаметром 2022 и разбив его на части 2021 и 1.

▹**Задача 7.** Найдите натуральные числа m и n, если из четырёх утверждений

1) $m-n$ делится на 3;

2) $m+2n$ – простое число;

3) $m=4n-1$;

4) $m+7$ делится на n;

три истинны, а одно ложно.

Решение:

Заметим, что условия 1) и 3) не могут выполняться одновременно. На самом деле,

$$4n-m=3n+\left(n-m\right)=1,$$

и если условие 1) выполняется, то левая часть делится на 3, а правая – нет. С другой стороны, если выполнено условие 3), то

$$m-n=3n-1,$$

то есть не делится на 3.

Т.к. среди условий есть всего одно ложное, можно заключить, что условия 2) и 4) должны быть истинными. Рассмотрим два варианта:

а) Ложно условие 1).

Проверим, существуют ли такие m и n, для которых будут истинны остальные условия. Поставим условие 3) в условие 4):

$$m+7=4n+6\vdots n\Rightarrow 6\vdots n,$$

т.е. n = 1, 2, 3, 6. Нам осталось проверить истинность условия 2):

$$n=1, m=3\Rightarrow m+2n=5;$$

$$n=2, m=7\Rightarrow m+2n=11;$$

$$n=3, m=11\Rightarrow m+2n=17;$$

$$n=6, m=23\Rightarrow m+2n=35.$$

Нам подходят все случаи, кроме последнего.

б) Ложно условие 3).

Из условия 1) $m = n + 3k$. Подставляя в условие 2), получим

$$m+2n=3n+3k\vdots 3.$$

Единственная ситуация, когда это число всё же будет простым, реализуется при $m = n = 1$. Очевидно, что в этом случае условие 4) также истинно.

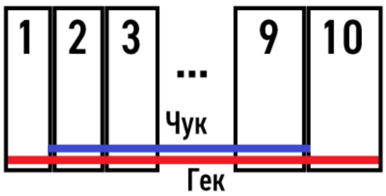
Таким образом, мы получили в общей сложности четыре решения.

Ответ: (1;1),(3;1),(7;2),(11;3).

▹**Задача 8.** На книжной полке у Знайки стоит история Цветочного города в 10 томах, тома идут по порядку слева направо. Толщина первого тома – 2,1 см, второго – 2,2 см, третьего – 2,3 см и т.д., десятого – 3 см. Книжный червяк Чук прогрыз путь от первой страницы первого тома до последней страницы десятого тома (по прямой линии, перпендикулярно обложке), а его брат Гек прогрыз путь от первой страницы последнего тома до последней страницы первого тома (по прямой линии, перпендикулярно обложке). Какой червяк проделал больший путь и на сколько? Толщина обложки – 2 мм.

Решение:

С учетом расположения книг путь Чука пролегал через одну обложку первого тома, все тома со второго по девятый, и одну обложку десятого тома. Итого, на пути червяка встретилось 2 обложки и восемь полных томов, то есть



$$2,2+2,3+...+2,9=\frac{2,2+2,9}{2}\cdot 8=20,4 \text{ см книг.}$$

Длина пути Чука составила

$$l=20,4+0,4=20,8 \text{ см.}$$

Гек, в свою очередь, прогрыз все десять томов, не считая двух крайних обложек, а значит, его путь составил

$$\frac{2,1+3}{2}\cdot 10-2\cdot 0,2=25,1 \text{ см.}$$

Как видим, путь Гека на 4,7 см больше пути Чука.

Ответ: путь Гека оказался на 4,7 см больше пути Чука.

▹**Задача 9.** В квадрате 3×3 заполните 9 клеток различными целыми неотрицательными числами так, чтобы суммы чисел по каждой строке, каждому столбцу и диагоналям квадрата были одинаковыми и равнялись 885.

Решение:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Обозначим суммы по строкам, столбцам и диагоналям как l, тогда сумма всех элементов таблицы будет равна $3l$. Если теперь сложить все строки, все столбцы, две диагонали и повторно вторую строку и второй столбец, то каждый элемент таблицы встретится в этой сумме три раза, а средний элемент – ещё три сверх того:

$$\left(a_1+a_2+a_3\right)+2\cdot\left(a_4+a_5+a_6\right)+\left(a_7+a_8+a_9\right)+\left(a_1+a_4+a_7\right)+2\cdot\left(a_2+a_5+a_8\right)+$$
$$+\left(a_3+a_6+a_9\right)+\left(a_1+a_5+a_9\right)+\left(a_3+a_5+a_7\right)=3S+3a_5.$$

Поскольку суммы во всех скобках равны, получаем

$$10l=3\cdot 3l+3a_5 \Rightarrow a_5=\frac{l}{3}.$$

Если теперь оставить первые два элемента произвольными, а остальные найти из условий задачи, мы получим следующую таблицу:

a_1	a_2	$l-a_1-a_2$
$\frac{4l}{3}-2a_1-a_2$	$\frac{l}{3}$	$2a_1+a_2-\frac{2l}{3}$
$a_1+a_2-\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}-a_2$	$\frac{2l}{3}-a_1$

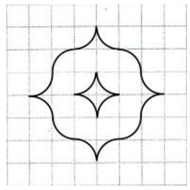
Теперь можно придать первым двум элементам любые значения при условии, что остальные элементы таблицы останутся неотрицательными.

Ответ:

Например,

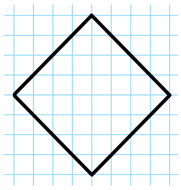
250	100	535
580	295	10
55	490	340

▹**Задача 10.** На клетчатой бумаге нарисована фигура, граница которой состоит из дуг окружностей радиуса 1. На этой клетчатой бумаге укажите вершины квадрата, площадь которого в 2 раза больше площади указанной фигуры.



Решение:

Площадь нарисованной фигуры равна $S=8+8=16$ клеток (8 полноценных и 4 собранных из четверти окружности и "лунки"), значит, площадь искомого квадрата равна $16\cdot 2=32$. На клетчатой бумаге такой квадрат изображается следующим образом.

Ответ: 

9 класс

▹**Задача 1.** Решите уравнение

$$\sqrt{x+20\sqrt{x+20\sqrt{x+\ldots+20\sqrt{x+20\sqrt{21x}}}}}=x,$$

если известно, что в записи левой части корень квадратный встречается 1921 раз.

Решение:

Сравним значения левой и правой частей уравнения:

Если $0 < x < 21$:

$$x<\sqrt{21x}$$

$$21x=x+20x<x+20\sqrt{21x}\Rightarrow\sqrt{21x}<\sqrt{x+20\sqrt{21x}}$$

$$\sqrt{x+20\sqrt{21x}}<\sqrt{x+20\sqrt{x+20\sqrt{21x}}}<\ldots<\sqrt{x+20\sqrt{x+\ldots+20\sqrt{x+20\sqrt{21}}}},$$

т.е. правая часть меньше левой, и решений на этом интервале нет. Аналогично, при $x > 21$:

$$x>\sqrt{21x}>\sqrt{x+20\sqrt{21x}}>\ldots>\sqrt{x+20\sqrt{x+\ldots+20\sqrt{x+20\sqrt{21x}}}}.$$

Осталось проверить $x = 0$ и $x = 21$ и убедиться, что при этих значениях равенство верно.

Ответ: $x = 0$, $x = 21$.

▹**Задача 2.** Найдите приведенный многочлен с целыми коэффициентами наименьшей степени, имеющий корень

$$a = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{125}}}.$$

Решение:

Обозначим для удобства $\alpha = \sqrt[4]{5}$ и преобразуем следующую дробь, умножая, где требуется, на сопряжённые выражения и помня о том, что $\alpha^4 = 5$:

$$b = \frac{1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4} = \frac{1}{\left(\alpha^3 + 3\alpha\right) - \left(2\alpha^2 + 4\right)} = \frac{\left(\alpha^3 + 3\alpha\right) + \left(2\alpha^2 + 4\right)}{\alpha^6 + 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 4\alpha^4 - 16\alpha^2 - 16} =$$

$$= \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^6 + 2\alpha^4 - 7\alpha^2 - 16} = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{5\alpha^2 + 10 - 7\alpha^2 - 16} = \frac{\left(\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4\right)\left(\alpha^2 - 3\right)}{\left(-2\alpha^2 - 6\right)\left(\alpha^2 - 3\right)} =$$

$$= \frac{\alpha^5 - 3\alpha^3 + 2\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3\alpha^3 - 9\alpha + 4\alpha^2 - 12}{-2\left(\alpha^4 - 9\right)} = \frac{\alpha^5 + 2\alpha^4 - 2\alpha^2 - 9\alpha - 12}{8} =$$

$$= \frac{-2\alpha^2 - 4\alpha - 2}{8} = -\frac{\left(\alpha + 1\right)^2}{4} = -\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2.$$

Искомый корень

$$a = 2\sqrt{-\frac{1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4}} = 2\sqrt{-b} = \alpha + 1 = 1 + \sqrt[4]{5}.$$

Построение многочлена начнём с квадратного трехчлена, для чего воспользуемся теоремой Виета:

$$x_1 = 1 + \sqrt[4]{5}, x_2 = 1 - \sqrt[4]{5} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$p_1\left(x\right) = x^2 - 2x + 1 - \sqrt{5}.$$

Чтобы окончательно избавиться от иррациональности в коэффициентах, осталось домножить этот многочлен на многочлен

$$p_2(x) = x^2 - 2x + 1 + \sqrt{5}:$$

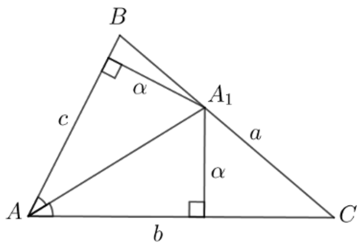
$$p_1(x)\,p_2(x) = (x-1)^4 - 5 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 4.$$

Ответ: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 4$.

▹**Задача 3.** Дан ΔABC: h_a, h_b, h_c – высоты треугольника, опущенные из вершин *A*, *B*, *C*; α, β, γ – расстояния от оснований биссектрис углов *A*, *B*, *C* до его сторон. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{\alpha}{h_a} + \dfrac{\beta}{h_b} + \dfrac{\gamma}{h_c}$.

Решение:

AA_1 – биссектриса угла *A*, α – расстояние от A_1 до сторон *AB* и *AC*. Тогда площадь треугольника можно представить как



$$S_{ABC} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$$

и вычислить каждую из площадей как полупроизведение соответствующих основания и высоты:

$$\frac{ah_a}{2} = \frac{c\alpha}{2} + \frac{b\alpha}{2},$$

откуда получаем

$$\frac{\alpha}{h_a} = \frac{a}{b+c}.$$

Аналогично

$$\frac{\beta}{h_b} = \frac{b}{a+c}, \frac{\gamma}{h_c} = \frac{c}{a+b}.$$

Докажем теперь, что

$$\frac{\alpha}{h_a} + \frac{\beta}{h_b} + \frac{\gamma}{h_c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Действительно, если ввести новые переменные

$$\begin{cases} x = b + c, \\ y = a + c, \\ z = a + b, \end{cases}$$

левая часть неравенства перепишется в виде

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left[\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)-3\right]\geq\frac{1}{2}[2+2+2-3]=\frac{3}{2}.$$

Равенство здесь, очевидно, достигается при $a = b = c$, а значит,

$$\min\left(\frac{\alpha}{h_a}+\frac{\beta}{h_b}+\frac{\gamma}{h_c}\right)=\frac{3}{2}.$$

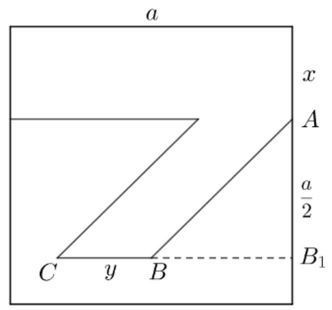
Ответ: $\frac{3}{2}$.

▹**Задача 4.** Данный квадрат разделить ломаной на две части одинаковой площади таким образом, чтобы каждое звено ломаной было параллельно стороне или диагонали квадрата, причём сумма длин звеньев, параллельных сторонам, равнялась бы длине стороны, а сумма длин звеньев, параллельных диагоналям, равнялась бы длине диагонали. Какое наименьшее число звеньев может иметь такая ломаная?

Решение:

У любой ломаной, удовлетворяющей условию задачи, звеньев каждого типа (параллельных сторонам и параллельных диагоналям) должно быть как минимум два. На самом деле, если, например, у ломаной ровно одно звено параллельно стороне, это означает, что длина этого звена равна длине стороны и его концы лежат на противоположных сторонах квадрата, то есть он уже разделён на две части, и у ломаной нет звеньев, параллельных диагоналям.

Осталось продемонстрировать, что по два звена каждого типа будет достаточно. Это иллюстрирует, например, такое разбиение:



Здесь площадь верхней части равна $ax+\dfrac{ay}{2}$, а площадь нижней части равна $a(a-x)-\dfrac{ay}{2}$. Значения x и y следует подобрать таким образом, чтобы эти площади были равны, т.е.

$$ax+\frac{ay}{2}=a^2-ax-\frac{ay}{2}\Rightarrow 2x+y=a.$$

▹**Задача 5.** Найдите сумму несократимых дробей со знаменателем 401, заключенных между натуральными числами 1921 и 2021.

Решение:

Распишем искомую сумму, выделив целую часть каждой дроби:

$$\left(1921+\frac{1}{401}\right)+\left(1921+\frac{2}{401}\right)+\ldots+\left(1921+\frac{400}{401}\right)+$$

$$+\left(1922+\frac{1}{401}\right)+\left(1922+\frac{2}{401}\right)+\ldots+\left(1922+\frac{400}{401}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(2020+\frac{1}{401}\right)+\left(2020+\frac{2}{401}\right)+\ldots+\left(2020+\frac{400}{401}\right)=$$

$$=(1921+1922+\ldots+2020)\cdot 400+\left(\frac{1}{401}+\frac{2}{401}+\ldots+\frac{400}{401}\right)\cdot 100=$$

$$=\frac{1921+2020}{2}\cdot 100\cdot 400+\frac{100}{401}\cdot\frac{401}{2}\cdot 400=$$

$$=3941\cdot 20000+20000=3942\cdot 20000=78840000.$$

Ответ: 78840000.

▹**Задача 6.** В первой коробке находились красные шары, а во второй – синие, причем число красных шаров составляло $\dfrac{15}{19}$ от числа синих шаров.

Когда из коробок удалили $\frac{3}{7}$ красных шаров и $\frac{2}{5}$ синих, то в первой коробке осталось менее 1921 шаров, а во второй – более 2021 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

Решение:

Пусть x и y – число соответственно красных и синих шаров, тогда по условию,

$$x = \frac{15}{19}y,\ \frac{4}{7}x = \frac{15 \cdot 4}{19 \cdot 7}y < 1921,\ \frac{3}{5}y > 2021.$$

Решая эти неравенства с учетом того, что y – натуральное число, получаем

$$3369 \le y \le 4257.$$

При этом, поскольку дробного количества шаров ни в какой момент получиться не может, необходимо, чтобы y делилось на 5, 7 и 19, т.е. $y \vdots 665$. В указанных пределах есть ровно одно такое число $y = 6 \cdot 665 = 3990$, откуда находим $x = 3150$.

Ответ: 3150 красных и 3990 синих шаров.

▹**Задача 7.** Найдите наименьшее число, которое имеет ровно 1921 делитель.

Решение:

Рассмотрим разложение произвольного числа на простые делители:

$$N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}.$$

Поскольку все делители числа N состоят из тех же простых чисел и степень каждого из них может принимать любое значение от 0 до β_i, общее количество делителей выражается формулой:

$$D = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)\ldots(\beta_n + 1).$$

По условию задачи

$$D = 1921 = 17 \cdot 113,$$

откуда следует, что искомое число имеет не более двух различных простых делителей. Поскольку нам требуется найти наименьшее такое число, в качестве этих простых делителей мы будем брать наименьшие: 2 и 3.

Если делитель один, то $\beta_1 = 1921$, а само число $N = 2^{1920}$. Если же делителей два, то $\beta_1 = 16$, $\beta_2 = 112$, а число имеет вид $N = 2^{16} \cdot 3^{112}$ или $N = 2^{112} \cdot 3^{16}$. Сравнив значения этих трёх чисел, окончательно находим, что наименьшее из них равно $2^{112} \cdot 3^{16}$.

Ответ: $2^{112} \cdot 3^{16}$.

▹**Задача 8.** Найдите наименьшее число *n* такое, что в любом множестве из *n* натуральных чисел найдутся по крайней мере два числа, сумма или разность которых делится на 7.

Решение:

Рассмотрим множество {4;5;6;7}

$$4+5=9,\ 5+6=11,\ 5-4=1,\ 6-5=1$$

$$4+6=10,\ 5+7=12,\ 6-4=2,\ 7-5=2$$

$$4+7=11,\ 6+7=13,\ 7-4=3,\ 7-6=1.$$

Сумма и разность любых двух чисел не делится на 7. Искомое число $n > 4$. Докажем, что число 5 удовлетворяет условию задачи.

Пусть множество *A* состоит из 5 натуральных чисел. Если хотя бы два из этих чисел дают одинаковые остатки при делении на 7, то разность этих чисел делится на 7, и поэтому остается рассмотреть случай, когда все числа из множества *A* дают при делении на 7 различные остатки. Поскольку делимость суммы двух чисел на 7 зависит только от остатков, которые дают эти числа при делении на 7, то каждое число в множестве *A* можно заменить его остатком и считать, таким образом, что *A* состоит из 5 чисел, взятых из множества {-3;-2;-1;0;1;2;3}. Любое подмножество из 5 элементов этого множества содержит по крайней мере два элемента с суммой равной нулю. Таким образом, и в исходном множестве *A* существуют два числа, сумма которых делится на 7.

Ответ: ***n* = 5.**

▹**Задача 9.** Найдите сумму всех целых решений неравенства:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2} \le 6\sqrt{x}.$$

Решение:

Т.к. $x \ge 0$, то $x + 2 > 0$, и в неравенстве

$$\frac{x^2+12x-6\sqrt{x}\left(x+2\right)+4}{x+2} \le 0$$

можно отбросить знаменатель. Свернём полный квадрат и разложим на множители:

$$\left(x+2\right)^2+8x-6\left(x+2\right)\sqrt{x} \le 0$$

$$\left(x+2-2\sqrt{x}\right)\left(x+2-4\sqrt{x}\right) \le 0$$

$$\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^2+1\right)\left(\left(\sqrt{x}-2\right)^2-2\right) \le 0.$$

Здесь первая скобка всегда положительна, поэтому её также можно отбросить.

$$\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \le 2 \Rightarrow \left|\sqrt{x}-2\right| \le \sqrt{2}$$

$$2-\sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 2+\sqrt{2}$$

$$6-4\sqrt{2} \le x \le 6+4\sqrt{2}.$$

Т.к.

$$0 < 6-4\sqrt{2} < 1,\ 11 < 6+4\sqrt{2} < 12,$$

все целые решения неравенства находятся между числами 1 и 11, а их сумма

$$1+2+3+\ldots+11 = \frac{12}{2}\cdot 11 = 66.$$

Ответ: 66.

▹**Задача 10.** Пусть $A_n^2 = 1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n\left(3n-1\right)$. Известно, что A_n есть натуральное трехзначное число. Найдите сумму всех таких A_n.

Решение:

Каждое слагаемое в представлении A_n^2 имеет вид $k(3k-1)=3k^2-k$, поэтому

$$A_n^2=3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)-\left(1+2+\ldots+n\right).$$

Нетрудно доказать (например, с помощью метода математической индукции), что

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

поэтому

$$A_n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2n=n^2(n+1).$$

$$A_n=n\sqrt{n+1}.$$

Осталось найти все такие *n*, что число *n* + 1 является квадратом, и $100\le A_n\le 999$.

Выпишем все подходящие *n* и найдём сумму соответствующих A_n:

n	15	24	35	48	63	80	99	120
$n+1$	16	25	36	49	64	81	100	121
$\sqrt{n+1}$	4	5	6	7	8	9	10	11
A_n	60	120	210	336	504	720	990	1320

120 + 210 + 336 + 504 + 720 + 990 = 2880.

Ответ: 2880.

10 класс

▹**Задача 1.** На какую цифру оканчивается сумма 2021-х степеней всех четырёхзначных чисел, получающихся из числа 1921 перестановкой его цифр?

Решение:

Таких чисел 12: 1921, 1291, 1192, 1129, 1912, 1219, 9211, 9121, 9112, 2911, 2191, 2119. На 1 оканчивается 6 чисел, на 2 – 3 числа, на 9 – 3 числа.

Рассмотрим остатки по модулю 10 для 2021-х степеней этих чисел. Для двойки имеем:

$$2 \equiv 2(\mathrm{mod} 10), 2^2 \equiv 4(\mathrm{mod} 10), 2^3 \equiv 8(\mathrm{mod} 10), 2^4 \equiv 6(\mathrm{mod} 10),$$
$$2^5 \equiv 2(\mathrm{mod} 10), 2^6 \equiv 4(\mathrm{mod} 10), \ldots$$

т.е. остатки повторяются с периодом 4, и $2^{2021} \equiv 2(\mathrm{mod} 10)$.

$$9^2 \equiv 1(\mathrm{mod} 10) \Rightarrow 9^{2021} \equiv 9^{2 \cdot 1010} \cdot 9 \equiv 9(\mathrm{mod} 10).$$

Тогда сумма всех чисел

$$1921^{2021} + \ldots + 2119^{2021} = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 6 + 6 + 27 = 39 = 9(\mathrm{mod} 10).$$

Ответ: 9.

▹**Задача 2.** Пусть $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $B = \{1, 2, \ldots, k\}$. Сколько существует подмножеств $C \subset A$ таких, что $C \bigcap B \neq \varnothing$?

Решение:

Множество, состоящее из m элементов, имеет 2^m подмножеств, так как для каждого из m элементов есть только две возможности – входить или не входить в подмножество. Отсюда следует, что при $n \leq k$ любое непустое подмножество множества A удовлетворяет условию, и таких подмножеств $2^n - 1$. При $n > k$ удобно сначала подсчитать число подмножеств $C \subset A$, таких, что $C \bigcap B = \varnothing$. Такие подмножества C состоят из элементов $k + 1$, $k + 2$, …, n, и поэтому их имеется 2^{n-k} (включая пустое подмножество). Поскольку A имеет всего 2^n подмножеств, то условию задачи удовлетворяют остальные $2^n - 2^{n-k}$ подмножеств.

Итак, если $n \leq k$, то число искомых подмножеств равно $2^n - 1$, а при $n > k$ равно $2^n - 2^{n-k}$.

Ответ: $2^n - 2^{n-k}$ при $n > k$, $2^n - 1$ при $n \leq k$

▹**Задача 3.** Дан отрезок длиной 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$.

Решение:

Представим длину отрезка в виде

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = a + b\sqrt{5},$$

где a и b – рациональные числа. Тогда

$$a^3+3\sqrt{5}a^2b+15ab^2+5\sqrt{5}b^3=2+\sqrt{5}$$

$$\begin{cases}a^3+15b^2a=2\\3a^2b+5b^3=1\end{cases}.$$

Умножим вторую строку на 2 и вычтем из первой:

$$a^3+15b^2a-6a^2b-10b^3=0.$$

Разделим всё уравнение на b^3 и заменим $\frac{a}{b}=t$:

$$t^3-6t^2+15t-10=0.$$

Заметим, что у этого уравнения есть корень $t = 1$, поэтому подставим в систему $a = b$. Получим

$$8a^3=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}=b.$$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Построить отрезок длиной $\sqrt{5}$ можно, например, с помощью прямоугольного треугольника с длиной катетов 1 и 2. После этого останется прибавить к нему отрезок длины 1 и построить середину полученного отрезка. Все эти построения, очевидно, несложно провести с помощью циркуля и линейки.

▹**Задача 4.** Сколько натуральных решений имеет система неравенств

$$1921\le a_{2000}\le 2021,$$

где $a_k=\frac{n}{2+a_{k-1}}$, $a_1=\frac{n}{1+\sqrt{1+n}}$?

Решение:

Рассмотрим члены заданной последовательности a_k:

$$a_2=\frac{n}{2+a_1}=\frac{n}{2+\frac{n}{1+\sqrt{1+n}}}=\frac{n\left(1+\sqrt{1+n}\right)}{2+2\sqrt{1+n}+n}=$$

$$=\frac{n\left(1+\sqrt{1+n}\right)}{1+2\sqrt{1+n}+n+1}=\frac{n\left(1+\sqrt{1+n}\right)}{\left(1+\sqrt{1+n}\right)^2}=a_1.$$

Тогда $a_1=a_2=a_3=...=a_{2020}$. Преобразуем эту дробь:

$$\frac{n}{1+\sqrt{1+n}}=\frac{n+1-1}{1+\sqrt{1+n}}=\frac{\left(1+\sqrt{1+n}\right)\left(\sqrt{1+n}-1\right)}{1+\sqrt{1+n}}=\sqrt{n+1}-1,$$

и нам необходимо решить двойное неравенство

$$1921\le\sqrt{n+1}-1\le 2021$$

$$1922\le\sqrt{n+1}\le 2022$$

$$1922^2-1\le n\le 2022^2-1.$$

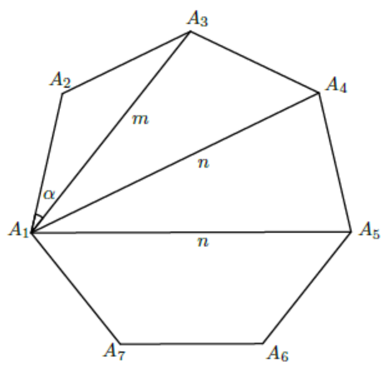
Количество натуральных чисел, удовлетворяющих этому неравенству, равно

$$2022^2-1-\left(1922^2-1\right)+1=2022^2-1922^2+1=100\cdot 3944+1=394401.$$

Ответ: 394401.

▹**Задача 5.** Дан правильный семиугольник с последовательными вершинами $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Вычислить, чему равно выражение $\cos\alpha\left(\cos\alpha-1\right)\left(2\cos\alpha+1\right)$, где $\alpha=\angle A_2A_1A_3$.

Решение:



Без ограничения общности можем считать, что $|A_1A_2|=1$. Введём обозначения: $|A_1A_3|=m$, $|A_1A_4|=n$.

Применим теорему Птолемея к четырёхугольнику $A_1A_2A_3A_4$:

$$|A_1A_3|\cdot|A_2A_4|=|A_1A_2|\cdot|A_3A_4|+|A_1A_4|\cdot|A_2A_3|.$$

Отсюда

$$m^2=n+1, \tag{1}$$

т.к. $|A_2A_4|=|A_1A_3|=m$.

Применим теорему Птолемея к четырёхугольнику $A_1A_3A_4A_5$:

$$|A_1A_4|\cdot|A_3A_5|=|A_3A_4|\cdot|A_1A_5|+|A_1A_3|\cdot|A_4A_5|.$$

Т.к. $|A_1A_5|=|A_1A_4|=n$, $|A_3A_5|=|A_1A_3|=m$, имеем:

$$mn=m+n. \qquad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получаем окончательно:

$$m^3-m=m^2+m-1$$

$$m^3-m^2-2m+1=0$$

$$m\left(m^2-m-2\right)=-1$$

$$m(m-2)(m+1)=-1\ . \qquad (3)$$

Из треугольника $A_1A_2A_3$ находим

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}|A_1A_3|}{|A_1A_2|}=\frac{m}{2}.$$

Подставляя это соотношение в (3), получим:

$$2\cos\alpha(2\cos\alpha-2)(2\cos\alpha+1)=-1$$

$$\cos\alpha(\cos\alpha-1)(2\cos\alpha+1)=-\frac{1}{4}.$$

А это и есть искомая величина.

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

▹**Задача 6.** Последовательность a_n имеет вид

1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25,...

где за единицей следуют два последовательных чётных числа, потом три последовательных нечётных, потом четыре чётных и т.д. Найдите $a_{2021}-a_{1921}$.

Первое решение:

Данная последовательность получается последовательным приписыванием конечных прогрессий из 1, 2, 3 и т.д. членов с разностью 2, в которых первый член каждой прогрессии (начиная со второй) на 1 больше последнего члена предыдущей прогрессии. Докажем по индукции, что последний член k-й прогрессии равен k^2: для $k = 1$ это очевидно, а прогрессия с номером $k + 1$ начинается, по предположению индукции, с числа $k^2 + 1$, и поэтому её член с номером k + 1 равен $k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2$.

Если k – номер прогрессии, в которой находится n-й член последовательности, то в предыдущих прогрессиях содержится вместе $1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{k \cdot (k-1)}{2}$ членов, так что k – наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $\frac{k \cdot (k-1)}{2} \le n$.

Найдём номера прогрессий, в которых находятся a_{1921} и a_{2021}.

Для $n = 1921$ $k = 62$, при этом первый член 62-й прогрессии имеет «сквозной» номер $\frac{62 \cdot 61}{2} + 1 = 1892$, а сам он равен $a_{1892} = 61^2 + 1 = 3722$.

В пределах этой прогрессии 1921-й член будет 30-м по порядку, а значит, будет равен

$$a_{2021} = 3722 + 2 \cdot 29 = 3780.$$

Для $n = 2021$ $k = 64$, при этом первый член 64-й прогрессии имеет «сквозной» номер $\frac{64 \cdot 63}{2} + 1 = 2017$, а сам он равен $a_{2017} = 63^2 + 1 = 3970$.

В пределах этой прогрессии 2021-й член будет 5-м по порядку, а значит, будет равен

$$a_{2021} = 3970 + 2 \cdot 4 = 3978.$$

Наконец, находим искомую разность:

$$a_{2021} - a_{1921} = 3978 - 3780 = 198.$$

Второе решение:

Можно заметить, что для поиска разности членов последовательности необязательно знать их значения, достаточно определить, в какой прогрессии находится каждый из них.

В нашей последовательности следующий член больше предыдущего на 2 всегда кроме тех случаев, когда происходит смена прогрессий (здесь следующий член больше предыдущего на 1). Тогда для любых двух членов последовательности можно сказать, что

$$a_n - a_m = 2(n-m) - (k_n - k_m),$$

где k_n и k_m – номера прогрессий, которым принадлежат соответствующие члены. Тогда для нашей задачи

$$a_{2021} - a_{1921} = 2(2021-1921) - (64-62) = 200 - 2 = 198.$$

Ответ: 198.

▹**Задача 7.** Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\left(\sqrt{8}\cos 25^\circ - 1\right)\operatorname{tg} x^\circ = \left(\sqrt{8}\sin 25^\circ - 1\right)\operatorname{tg} 3x^\circ,$$

принадлежащих отрезку $[-1921^\circ; 2021^\circ]$.

Решение:

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1}.$$

Подставив это соотношение в исходное уравнение, сразу получим одно решение:

$$\operatorname{tg} x = 0, x = 180^\circ n, n \in \mathbb{Z}.$$

Сократив $\operatorname{tg} x$, получим:

$$\frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1} = \frac{\sqrt{8}\cos 25^\circ - 1}{\sqrt{8}\sin 25^\circ - 1}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}\left(\cos 25^\circ + \sin 25^\circ\right) - 1}{2\sqrt{2}\left(\cos 25^\circ - \sin 25^\circ\right)}.$$

Т.к.

$$\cos 25^\circ + \sin 25^\circ = \cos 25^\circ + \cos 65^\circ = 2\cos 45^\circ \cos 20^\circ,$$

$$\cos 25^\circ - \sin 25^\circ = \cos 25^\circ - \cos 65^\circ = 2\sin 45^\circ \sin 20^\circ,$$

имеем

$$\cos 2x = \frac{2\cos 20^\circ - 1}{4\sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ \sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ} = \cos 50^\circ.$$

Откуда окончательно получаем

$$x = \pm 25^\circ + 180^\circ k, \in \mathbb{Z}.$$

Выберем среди всех корней те, которые принадлежат указанному в условии отрезку:

$$-1921° \le 180°n \le 2021° \Rightarrow -10 \le n \le 11.$$

При сложении корней останется, фактически, только тот, который соответствует $n = 11$, т.е. $S_1 = 1980$.

$$-1921° \le \pm 25° + 180°k \le 2021° \Rightarrow -10 \le k \le 11,$$

значит, $S_2 = S_3 = 1980$. Общая сумма корней равна $3S_1 = 5940$.

Ответ: 5940.

▹**Задача 8.** Пусть m_a, m_b – длины медиан, проведённых к катетам прямоугольного треугольника, а r – радиус вписанного круга. Найдите все значения, которые может принимать отношение $d = \dfrac{r^2}{m_a^2 + m_b^2}$.

Решение:

Известно, что

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},\ m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

поэтому

$$m_a^2 + m_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{4} = \frac{5c^2}{4}.$$

Легко показать, что для прямоугольного треугольника $r = p - c$, где p – его полупериметр. Тогда

$$\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} = \frac{4r^2}{5c^2} = \frac{4\left(p - c\right)^2}{5c^2} = \frac{\left(a + b - c\right)^2}{5c^2}.$$

Оценим частное $\dfrac{a + b - c}{c}$. На основании неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным $\dfrac{a + b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$ имеем $\dfrac{a + b}{2} \le \dfrac{c}{\sqrt{2}}$, или $a + b \le c\sqrt{2}$.

Значит,

$$\frac{a+b-c}{c} \le \frac{c\sqrt{2}-c}{c} = \sqrt{2}-1.$$

Поскольку левая и правая части последнего неравенства положительны, то $\frac{(a+b-c)^2}{c^2} \le 3-\sqrt{8}$, откуда и следует, что

$$d = \frac{r^2}{m_a^2+m_b^2} \le \frac{3-\sqrt{8}}{5} \Rightarrow d \in \left(0;\frac{3-\sqrt{8}}{5}\right].$$

Ответ: $\left(0;\frac{3-\sqrt{8}}{5}\right]$.

▹**Задача 9.** Найдите все натуральные решения уравнения

$$19x^2y^2 + 21\left(x^2y+1\right) = 19x\left(x^2y+1\right).$$

Решение:

Преобразуем исходное равенство к следующему виду:

$$\frac{21}{19} = \frac{x^3y+x-x^2y^2}{x^2y+1} = \frac{x\left(x^2y+1\right)-y\left(x^2y+1\right)+y}{x^2y+1} = x-y+\frac{1}{x^2+\frac{1}{y}}.$$

Поскольку $x^2+\frac{1}{y}>1$, а x и y – натуральные числа, $x-y$ является целой частью дроби $\frac{21}{19}$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+\frac{1}{y}=\frac{19}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ y^3+2y^2+y+1=\frac{19}{2}y \end{cases}$$

$$y^3-15y^2+2y+2=0$$

$$(y-2)\left(2y^2+8y-1\right)=0.$$

Оставшийся квадратный трехчлен не имеет целых корней, поэтому получаем единственное решение $x = 3$, $y = 2$.

Ответ: (3; 2).

▹**Задача 10.** Робот записывает квадраты всех натуральных чисел и промежутка $[a,b]$ последовательно в случайном порядке. Какова вероятность того, что полученное многозначное число является точным квадратом, если: 1) $a = 3$, $b = 4$; 2) $a = 1921$, $b = 2021$.

Решение:

а) При $a = 3$, $b = 4$ робот может записать всего два числа: 916 и 169, одно из которых является точным квадратом. Значит, вероятность благоприятного исхода

$$P(A)=\frac{1}{2}.$$

б) Число, которое получается после совершённой роботом операции, можно записать в виде

$$N = k_1^2 + k_2^2 \cdot 10^{t_1} + k_3^2 \cdot 10^{t_2} + \ldots + k_{1001}^2 \cdot 10^{t_{1000}},$$

где k_i пробегает всё множество чисел от 1921 до 2021.

$$10^t \equiv 1 (\operatorname{mod} 3)\ \ \forall t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$
$$N \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \ldots + k_{1001}^2 (\operatorname{mod} 3).$$

Определим, какие остатки при делении на 3 может давать квадрат натурального числа:

$$(3k)^2 \equiv 0 (\operatorname{mod} 3),\ (3k \pm 1)^2 \equiv 9k^2 \pm 6k + 1 \equiv 1 (\operatorname{mod} 3).$$

Из чисел, принадлежащих отрезку $[1921;2021]$, ровно 33 числа делятся на 3. Значит, продолжая сравнение для числа N, получим:

$$N = 33 \cdot 0 + 68 \cdot 1 \equiv 2 (\operatorname{mod} 3).$$

Но, как мы показали выше, полный квадрат не может иметь остаток 2 при делении на 3, значит, записанное роботом число не может быть полным квадратом. Таким образом, вероятность благоприятного исхода

$$P(A)=\frac{0}{101!}=0,$$

т.к. количество всевозможных случаев 101! – конечное число.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) 0.

11 класс

▷**Задача 1.** Найдите среднее арифметическое всех корней уравнения

$$2\log_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3} = \log_2 \cos\frac{\pi x}{3},$$

принадлежащих отрезку $[1921;2021]$.

Решение:

Перенесём всё в левую часть и рассмотрим функцию

$$f(t) = 2\log_3 \operatorname{ctg} t - \log_2 \cos t,$$

где $t = \dfrac{\pi x}{3}$. С учётом ограничений, мы рассматриваем только значения $t \in \left[2\pi n; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$. Найдём её производную и сравним с нулём:

$$f' = -\frac{2}{\ln 3 \operatorname{ctg} t} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \frac{\sin t}{\ln 2 \cos t} = \frac{\ln 3 \sin^2 t - 2\ln 2}{\ln 2 \ln 3 \sin t \cos t} < 0,$$

т.к. на области определения знаменатель положителен, а $\ln 3 < 2\ln 2 = \ln 4$. Значит, функция $f(t)$ убывает и уравнение $f(t) = 0$ имеет не более одного решения.

Нетрудно убедиться, что искомое $t = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, и тогда

$$x = 1 + 6n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдём корни, которые попадают в указанный в условии промежуток:

$$1921 \le 1 + 6n \le 2021$$

$$320 \le n \le 336$$

$$k = 320, 321, \ldots, 336$$

$$x = 1921, 1927, \ldots, 2017.$$

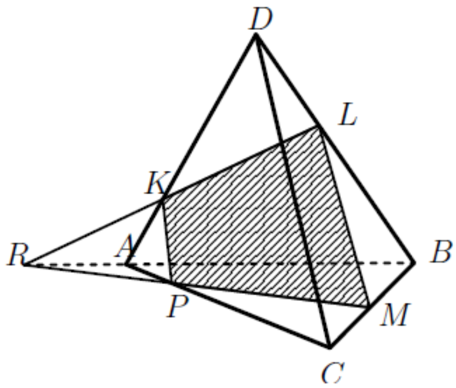
Т.к. решения образуют арифметическую прогрессию, а для нахождения среднего арифметического их сумму необходимо поделить на количество членов, нам достаточно найти среднее арифметическое первого и последнего:

$$S=\frac{1921+2017}{2}=1969.$$

Ответ: 1969.

▹**Задача 2.** В тетраэдре *ABCD* точки *K*, *L*, *M* принадлежат рёбрам *AD*, *DB* и *BC* соответственно, причём $|AK|:|KD|=2:3$, $|DL|:|LB|=3:4$, $|BM|:|MC|=4:5$. Через точки *KLM* проведена плоскость, которая делит тетраэдр на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

Первое решение:



Построим точку *P* пересечения плоскости $\alpha=(KLM)$ с ребром *AC*. Для этого продолжим прямую *KL* до пересечения с прямой *AB* в точке *R*, после чего соединим точки *R* и *M*. Далее воспользуемся теоремой Менелая, чтобы определить, в каком отношении точка *P* разбивает отрезок *AC*.

Для треугольника *ADB* и секущей *KL* имеем:

$$1=\frac{AK}{KD}\cdot\frac{DL}{LB}\cdot\frac{BR}{RA}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{BR}{RA}\Rightarrow\frac{BR}{AR}=2.$$

Для треугольника *ACB* и секущей *PM* имеем:

$$1=\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BR}{RA}=\frac{AP}{PC}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{1}\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{2}{5}.$$

Плоскость α делит тетраэдр на многогранники *ABKLMP* и *CDKLMP*. Найдём отношение объёма первого многогранника к объёму тетраэдра, который для краткости обозначим как *V*.

Имеем:

$$V_{ABKLMP}=V_{LABMP}+V_{LAKP}.$$

Найдём сначала отношение объёма четырёхугольной пирамиды *LABMP* к объёму исходного тетраэдра. Их основания лежат в одной плоскости и относятся как $\frac{38}{63}$. На самом деле,

$$\frac{S_{\Delta CPM}}{S_{\Delta CAB}} == \frac{5}{7}\cdot\frac{5}{9} = \frac{25}{63},$$

и тогда

$$\frac{S_{ABMP}}{S_{\Delta CAB}} = 1 - \frac{S_{\Delta CPM}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{38}{63}.$$

Высоты пирамиды *LABMP* и тетраэдра *DABC* относятся как $\frac{LB}{DB} = \frac{4}{7}$, а значит, отношение их объемов равно:

$$\frac{V_{LABMP}}{V} = \frac{38}{63}\cdot\frac{4}{7} = \frac{152}{441}.$$

Аналогично для тетраэдра *LAKP*, рассматривая фигуры относительно грани *ACD* как основания, находим, что

$$\frac{S_{\Delta AKP}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{4}{35},$$

высоты тетраэдров относятся как $\frac{3}{7}$, и, значит,

$$\frac{V_{LAKP}}{V} = \frac{4}{35}\cdot\frac{3}{7} = \frac{12}{245}.$$

Окончательно получаем

$$V_{KLABMP} = \left(\frac{152}{441} + \frac{12}{245}\right)V = \frac{124}{315}V.$$

Объем оставшейся части равен

$$V_{CDKLMP} = \left(1 - \frac{124}{315}\right)V = \frac{191}{315}V$$

и

$$\frac{V_{KLABMP}}{V_{CDKLMP}} = \frac{124}{191}.$$

Второе решение:

Для решения нам потребуется следующая формула:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right),$$

т.е. объем тетраэдра можно найти через смешанное произведение векторов, исходящих из общей вершины. Эта формула позволяет легко находить соотношение объемов тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, если известны отношения их соответствующих сторон.

Воспользуемся ранее приведёнными рассуждениями относительно площадей оснований и отношения высот, чтобы определить объем тетраэдра *RLMB*:

$$\frac{V_{RLMB}}{V}=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{1}=\frac{32}{63}.$$

А теперь найдём отношение объёмов тетраэдров *RKPA* и *RLMB*:

$$\frac{V_{RKPA}}{V_{RLMB}}=\frac{RA}{RB}\cdot\frac{RK}{RL}\cdot\frac{RP}{RM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{14}=\frac{9}{40}.$$

Здесь, как и раньше, все недостающие отношения отрезков определяются из теоремы Менелая. Тогда

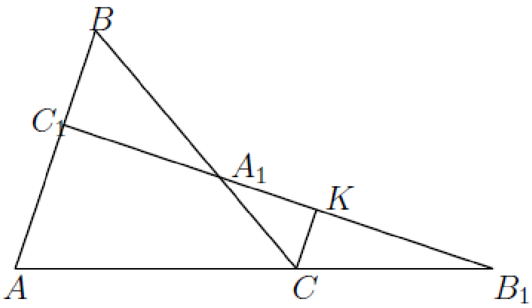
$$V_{KLABMP}=V_{RLMB}-V_{RKPA}=\frac{31}{40}V_{RLMB}=\frac{124}{315}V.$$

Справка:

Теорема Менелая

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

$$CK \parallel AB.$$



Из

$$\Delta AC_1B_1\sim\Delta CKB_1\Rightarrow\frac{AC_1}{CK}=\frac{B_1A}{B_1C}\Rightarrow CK=\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}$$

$$\Delta BC_1A_1\sim\Delta CKA_1\Rightarrow\frac{C_1B}{CK}=\frac{BA_1}{A_1C}\Rightarrow CK=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1}\Rightarrow$$

$$\frac{AC_1\cdot B_1C}{B_1A}=\frac{C_1B\cdot A_1C}{BA_1}\Rightarrow\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Ответ: $\frac{124}{191}$.

▹**Задача 3.** В последовательности цифр 19213... каждая цифра начиная с пятой равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:

а) набор цифр 2021,

б) вторично набор 1921,

в) набор 6391?

Решение:

В данной последовательности каждую чётную цифру заменим нулём, а нечётную единицей

$$19213510 \to \underbrace{11011}\underbrace{11011}\underbrace{11011}...$$

а) в последовательности набор первых пять цифр 11011 повторяется периодически. Набор 2021 соответствует набору 0001, но три нуля в данном наборе не встречается.

б) имеется лишь конечное число наборов четырёхзначных чисел, поэтому если разбить цифры нашей бесконечной последовательности на группы по четыре, обязательно встретятся два набора из одинаковых четырёх подряд идущих цифр:

$$1921\cdots\cdots\underbrace{abcd}_{M}\cdots\cdots\underbrace{abcd}_{N}.$$

Но поскольку следующая цифра определяется по четырём предыдущим однозначно, правее набора N начнётся повторение значений, т.е. как минимум начиная с набора M последовательность цифр является периодической с периодом, равным длине промежутка от M до N.

С другой стороны, по условию задачи для каждого набора $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ следующая цифра определятся формулой $x_5 + 10m = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, а значит, по x_2, x_3, x_4, x_5 однозначно восстанавливается x_1. Поэтому данную последовательность, пользуясь тем же правилом, можно неограниченно продлевать влево. Значит, слева от набора M записаны те же цифры, что и слева от набора N. Это означает, что наша последовательность целиком является периодической. Отсюда можно заключить, что если 1921 не встретится на $[M,N]$, то оно не встретилось бы вообще. Что противоречит условию.

в) Воспользуемся вышеописанным соображением о восстановлении предыдущих цифр, чтобы посмотреть, какие цифры предшествуют набору 1921 (как было только что доказано, он встретится в нашей последовательности бесконечно много раз).

$$\underbrace{6391}92135109\ .$$

Ответ: а) нет, б) да, в) да.

▹**Задача 4.** Какие значения может принимать выражение $\sin 1921\beta+\cos 2021\alpha$, если известно, что

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\geq\frac{3}{2}?$$

Решение:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1$$

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1\geq\frac{3}{2}$$

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}\leq 0$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 0$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leq 0.$$

Это возможно, только если оба квадрата равны нулю:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\\ 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=2\pi n, n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\beta=\alpha-2\pi n\\ 2\cos(\alpha-\pi n)-\cos\pi n=0\end{cases}.$$

Т.к. $\cos\pi n = (-1)^n$, $\cos(\alpha - \pi n) = (-1)^n \cos\alpha$, получаем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi(k-n) = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

Определим, чему равны 1921β и 1921α (при этом все слагаемые, кратные 2π, будем отбрасывать, поскольку они не влияют на значение тригонометрических функций).

$$1921\beta \to \pm 1921\cdot\frac{\pi}{3} \to \pm\frac{\pi}{3} + 640\pi \to \pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin 1921\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2021\alpha \to \pm 2021\cdot\frac{\pi}{3} \to \pm\frac{5\pi}{3} + 672\pi \to \pm\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \cos 2021\alpha = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\sin 1921\beta + \cos 2021\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

▹**Задача 5.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg}, \\ \{a;b\} \cup \{c;d\} = \{e;f;g\}, \end{cases}$$

(здесь $\overline{abc}$ означает позиционную запись числа, т.е. $\overline{xy} = x\cdot 10 + y\cdot 1$, $\overline{xyz} = x\cdot 10^2 + y\cdot 10 + z\cdot 1$)

Решение:

Очевидно, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* – цифры. Чтобы не запутаться в решении, стоит чётко помнить, что означает данная система: в записи нашего равенства встречается не более трёх различных цифр, при этом любая цифра, написанная в правой части, должна встретиться и в левой, и наоборот.

Сумма двух двузначных чисел меньше 200, поэтому $e = 1$, а следовательно, и одна из цифр *a*, *b*, *c*, *d* тоже равна 1.

Пусть a = 1, тогда из равенства $\overline{1b}+\overline{cd}=\overline{1fg}$ видно, что c = 8 или c = 9.

Если c = 8, то $\overline{1b}+\overline{8d}=\overline{18g}$ или $\overline{1b}+\overline{8d}=\overline{1f8}$, так как $8\in\{1,f,g\}$; но первое равенство невозможно, поскольку правая часть больше левой, а из второго равенства следует, что f = 0, и тогда либо b = 0, либо d = 0, так как $0\in\{1;b\}\cup\{1;d\}$; но тогда $\overline{1b}+\overline{8d}=90+b+d\le 99$, т.е. равенство невозможно.

Если $c=9$, аналогично предыдущему получаем $\overline{1b}+\overline{9d}=\overline{19g}$ или $\overline{1b}+\overline{9d}=\overline{1f9}$. Первое равенство невозможно, так как правая часть снова больше левой. Из второго равенства следует, что $f=0$ (т.к. $\overline{1b}+\overline{9d}=100+b+d\le 118$) и мы получаем два решения 10 + 99 = 109 и 19 + 90 = 109.

Пусть теперь $a\ne 1, b=1$. Тогда из равенства $\overline{a1}+\overline{cd}=\overline{1fg}$ видно, что $d\ne 9$, так как в противном случае g = 0, а следовательно, a = 0 или c = 0 в силу второго равенства данной системы.

Кроме того, $d\ne 1$; в противном случае $\overline{a1}+\overline{c1}=\overline{1f2}$, значит a = 2 или c = 2, но тогда $21+10c+1=100+10f+2\Rightarrow c=f+8$, и наборы цифр в левой и правой части не совпадают.

Поскольку $d<$ 9, то $\overline{a1}+\overline{cd}=\overline{1d(d+1)}$, так как $d\in\{1;f,d+1\}$ и $d\ne 1$, но $\{a;1\}\cup\{c;d\}=\{1;d;d+1\}$ и $a\ne 1$, поэтому либо $\overline{d1}+\overline{(d+1)d}=\overline{1d(d+1)}$, либо $\overline{(d+1)1}+\overline{dd}=\overline{1d(d+1)}$, либо $\overline{(d+1)1}+\overline{(d+1)d}=\overline{1d(d+1)}$, причём первые два равенства выполняются при условии, что $d+(d+1)=10+d$, т.е. при d = 9; но у нас d < 9, а третье равенство выполняется при d = 8, и мы получаем ещё одно решение: 91 + 98 = 189.

В случае c = 1 или d = 1 мы получаем симметричные решения.

Итак, данная система имеет 6 решений: 10 + 99 = 109, 99 + 10 = 109, 19 + 90 = 109, 90 + 19 = 109, 91 + 98 = 189, 98 + 91 = 189.

Ответ: 6.

▹**Задача 6.** Два игрока поочередно в произвольном порядке заменяют коэффициенты многочлена

$$a_1x^{1920}+a_2x^{1919}+\ldots+a_kx^{1921-k}+\ldots+a_{1920}x+a_{1921}$$

целыми числами (каждый коэффициент можно заменить ровно один раз). Начинающий игрок побеждает, если все значения многочлена, полученного в конце игры, при целых значениях переменной дают одинаковые остатки при делении на 6; если же это условие не выполнено, побеждает второй игрок. Кто победит при правильной игре?

Решение:

Заметим сначала, что для любого целого k

$$k^3-k=k\left(k^2-1\right)=\left(k-1\right)k\left(k+1\right)$$

представляет собой произведение трех последовательных чисел, а значит, делится на 6. То же верно и для k^4-k^2. Поэтому для делимости многочлена

$$ax+bx^2+cx^3+dx^4 \qquad (1)$$

на 6 при любом $x\in\mathbb{Z}$ достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$a+c=0, b+d=0. \qquad (2)$$

Объединяя в данном многочлене слагаемые с 1-го по 4-е, с 5-го по 8-е и т.д., мы представим его в виде суммы a_{1921} и слагаемых вида $x^{4k}f_k\left(x\right)$ (k = 0, ... , 249), в которых $f_k\left(x\right)$ имеет вид (1).

Поэтому начинающий игрок может придерживаться следующей стратегии: положить a_{1921} равным желаемому остатку, и затем на любом шагу, если его партнёр выбирает коэффициент, входящий в состав $f_k\left(x\right)$, то он выбирает свой коэффициент так, чтобы выполнялось соответствующее равенство (2). Тогда многочлен с числовыми коэффициентами, получающийся на каждом шагу, будет отличаться от a_{1921} на слагаемое, делящееся на 6, поэтому при любом $x\in\mathbb{Z}$ результирующий многочлен при делении на 6 будет давать остаток a_{1921}.

Ответ: победит начинающий игрок.

▹**Задача 7.** Найти все функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, являющиеся решениями функционального уравнения

$$f(a+x)-f(a-x)=4ax, \qquad (1)$$

где $a\in\mathbb{R}$ – фиксированное число.

Решение:

Тождество

$$(a+x)^2-(a-x)^2=4ax$$

показывает, что одним из решений уравнения (1) является функция $f(x)=x^2$.

Если теперь f – произвольное решение уравнения (1), то, обозначив через $g(x)$ выражение $f(x)-x^2$, будем иметь равенство

$$g(a+x)-g(a-x)=f(a+x)-(a+x)^2-f(a-x)+(a-x)^2=4ax-4ax=0,$$

т.е. $g(a+x)=g(a-x)$. Из этого равенства следует, что если ввести обозначение $h(x)=g(x+a)$, то $h(x)$ окажется чётной функцией, и, следовательно, всякое решение f уравнения (1) имеет вид

$$f(x)=x^2+h(x-a), \qquad (2)$$

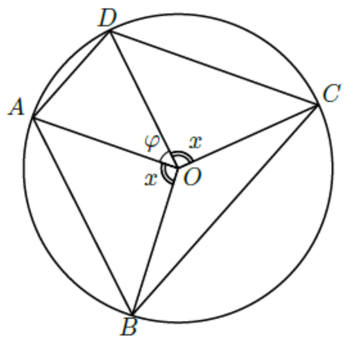
где h – некоторая чётная функция.

Легко проверить, что и обратно, всякая функция, определённая формулой (2), при чётной функции h удовлетворяет уравнению (1), так что формула (2) и описывает общий вид решения уравнения (1). Пример:

$f(x)=x^2+b(|x-a|+|x+a|)$, b – произвольная постоянная.

▹**Задача 8.** В круге радиуса R проведена хорда AD длиной единица. С помощью циркуля и линейки постройте параллельную ей хорду BC так, чтобы трапеция $ABCD$ имела наибольшую площадь. Рассмотреть случаи: а) $R = 1$; б) $R=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Решение:



Пусть *ABCD* – искомая трапеция, вписанная в данный круг с центром *O* и радиусом *R*. Концы искомой хорды *BC* принадлежат большей из дуг с концами *A* и *D*. В самом деле, если допустить противное, то можно построить на большей дуге точки B_1 и C_1 такие, что $(BC)\parallel(B_1C_1)$, $|BC|=|B_1C_1|$. В этом случае высота трапеции AB_1C_1D больше высоты трапеции *ABCD*, что противоречит допущению.

Обозначим $\angle AOD=\varphi(\varphi\le 180°)$, $\angle AOB=\angle COD=x$. Тогда

$$\angle BOC=360°-(2x+\varphi);$$

$$S_{ABCD}=S_{AOD}+2S_{AOB}+S_{BOC}=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi+R^2\sin x-\frac{1}{2}R^2\sin(2x+\varphi).$$

Исследуем на экстремум функцию $S(x)=\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)$. Из того, что $S'(x)=\cos x-\cos(2x+\varphi)=0$, $2x+\varphi=\pm x+360°k$, т.е. при $x_1=360°k-\varphi$ и $x_2=\frac{360°k-\varphi}{3}$ функция $S(x)$ имеет экстремум. Так как, согласно условию задачи, $0°<x<\frac{360°k-\varphi}{2}$, то трапеция *ABCD* имеет наибольшую площадь при $x=\frac{360°k-\varphi}{3}$. Следовательно, точки *B* и *C* делят большую из дуг *AD* на три равные части.

Построение хорды *BC* в общем случае нельзя выполнить циркулем и линейкой, так как построение точки *B* сводится к трисекции дуги *AD*, а эта задача неразрешима циркулем и линейкой. В частности, разделить угол $\varphi=60°$, который получается при $R=1$, на три части невозможно, что означает невозможность построения исходной трапеции.

Однако, если рассмотреть $R=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$ и найти из теоремы косинусов соответствующий ему угол φ, получим

$$1=2\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}(1-\cos\varphi)$$

$$\cos\varphi=1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\frac{2-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $x=\frac{360°k-\varphi}{3}=105°$ и $AB^2=2R^2(1-\cos 105°)=2R^2(1+\sin 15°)$.

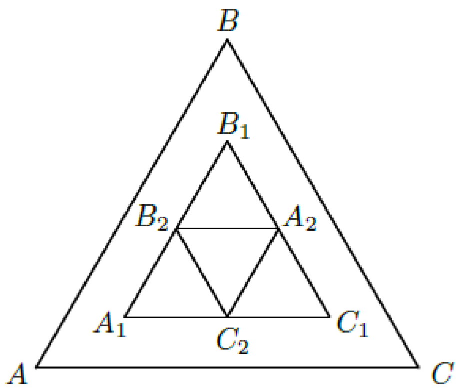
Поскольку в задаче изначально дан единичный отрезок, а

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos^2 30°}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

все необходимые построения можно совершить с помощью циркуля и линейки.

N.B. Для построения отрезка длиной $\sqrt{x}$ необходимо построить окружность диаметра $x+1$, восставить перпендикуляр из точки, находящейся на расстоянии 1 от конца диаметра, и продолжить его до пересечения с окружностью. Отрезок перпендикуляра и даст искомую длину.

▹**Задача 9.** Внутри правильного треугольника со стороной $4+2\sqrt{3}$ находятся 5 непересекающихся окружностей радиуса 1 (допускаются касания окружностей между собой и со сторонами треугольника). Доказать, что, не меняя положение данных окружностей, в этот треугольник можно поместить ещё одну единичную окружность, не пересекающуюся с данными.



Решение:

На рисунке ABC – правильный треугольник со стороной $4+2\sqrt{3}$. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны сторонам треугольника ABC и удалены от соответствующих сторон на расстояние, равное 1. Легко подсчитать, что сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 4. A_2, B_2 и C_2 – середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Докажем, что центр каждой из пяти окружностей должен совпадать с одной из шести точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Рассмотрим четыре правильных треугольника $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_2$, $A_2B_2C_1$. Сторона каждого треугольника равна 2 (каждый треугольник рассматривается вместе с его границей). Найдётся, по крайней мере, один треугольник, содержащий центры не менее чем двух окружностей, поскольку центры всех пяти окружностей принадлежат треугольнику $A_1B_1C_1$. Но расстояние между центрами любых двух окружностей не меньше 2. Если же в правильном треугольнике со стороной, равной 2, расположены две точки, расстояние между которыми не меньше 2, то они должны совпадать с двумя вершинами этого треугольника. Значит, хотя бы одна из точек A_2, B_2, C_2 должна являться центром окружности. Пусть это будет точка A_2.

Центр любой окружности, отличный от A_2 и принадлежащий одному из трёх треугольников $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$, $A_2B_2C_2$, должен совпадать с какой-либо вершиной соответствующего треугольника, поскольку всем этим треугольниками принадлежит точка A_2. Если таких окружностей 4, то их центры будут находиться в точках B_1, C_1, B_2, C_2; если таких окружностей 3, то их центры окажутся в трёх из перечисленных четырёх точек, а центр пятой будет в точке A_1, так как хотя бы в одной из точек B_2 или C_2 должен быть центр окружности. Этим исчерпываются все возможные варианты.

Таким образом, мы доказали, что центры пяти данных окружностей должны совпадать с пятью из шести точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Значит, можно поместить в треугольник ABC ещё одну, шестую окружность, не пересекающуюся с пятью данными, взяв её центр в соответствующей свободной точке.

▹**Задача 10.** Робот случайно выбирает натуральное число из отрезка $[1921;2021]$. Какова вероятность того, что выражение $2^x - x^2$ делится на 7?

Решение:

Чтобы число $2^x - x^2$ делилось на 7, необходимо, чтобы числа 2^x и x^2 имели при делении на 7 равные остатки.

Нетрудно проверить, что остатки числа 2^x при делении на 7 меняются циклично с периодом 3, в то время как остатки числа x^2 так же цикличны, но с периодом 7. Значит, чтобы рассмотреть все возможные ситуации для разности этих чисел, нам достаточно проверить 21 последовательное число. Для наглядности внесём результаты в таблицу:

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
остаток 2^x	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4
остаток x^2	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1
$\vdots 7$	✓					✓					

x	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
остаток 2^x	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1
остаток x^2	0	1	4	2	2	4	1	0	1	4
$\vdots 7$			✓		✓	✓	✓			

Здесь мы начали запись с 10, т.к. $1921 = 21 \cdot 91 + 10$. Как видно, на периоде встречается 6 совпадений остатков, а в интервал $[1921;2021]$ укладывается четыре полных периода и ещё 17 чисел. Значит, всего значений, при которых $2^x - x^2 \vdots 7$ будет $6 \cdot 4 + 5 = 29$, и вероятность благоприятного исхода равна

$$P(A) = \frac{29}{101}.$$

Ответ: $\frac{29}{101}$.

Критерии определения призеров отборочного тура олимпиады по математике

Каждое верно решенное задание отборочного тура оценивалось в 1 балл. Прошли в заключительный тур олимпиады участники, набравшие:

4-5 класс 6 и более баллов

6-8 класс 5 и более баллов

9 класс 4 и более баллов

10-11 класс 3 и более баллов

Победителями отборочного тура считаются участники, набравшие 8 и более баллов.

Статистика отборочного тура олимпиады по математике

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	543	97	80
6	379	93	25
7	329	82	19
8	438	10	29
9	488	94	15
10	372	66	0
11	319	92	13
Итого	2772	629	182

В отборочном туре приняли участие 2366 школьников из 58 регионов Российской Федерации и 406 участников из 7 стран ближнего зарубежья.

Призеры отборочного тура получили сертификаты призера и прошли в заключительный тур.

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура олимпиады

Максимальная оценка за каждую из задач заключительного тура – 10 баллов. Призовые места определялись в соответствии со следующими критериями:

Класс	Проходной балл		
	1 место	2 место	3 место
5 класс и младше	62	53	44
6 класс	73	59	44
7 класс	72	60	48
8 класс	62	57	44
9 класс	44	36	28
10 класс	—	—	28
11 класс	48	36	24

Статистика заключительного тура

В финале олимпиады приняли участие 360 школьников, из них 50 – иностранцы, остальные проживают в 32 различных регионах России.

Количество участников, призеров и победителей заключительного тура представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5 класс и младше	76	18	5
6	62	11	5
7	45	7	4
8	73	14	5
9	41	5	3
10	31	1	0
11	30	3	2
Итого	360	60	24

Олимпиада по информатике

Задания отборочного тура Олимпиады с решениями

Олимпиада ТИИМ по информатике проводилась дистанционно, с применением системы автоматического тестирования решений учащихся на наборах тестовых данных. Каждая из 6 задач максимально оценивалась в 10 баллов, в соответствии с количеством успешно пройденных тестов. Задания были рассчитаны на учащихся 8-11 классов, все учащиеся решали один вариант. На решение отводилось 5 часов, как для отборочного, так и для заключительного тура.

Задача 1. Буратино идет к успеху

Буратино продал букварь и решил выгодно инвестировать вырученные средства.

Он что-то слышал про поле чудес, но не знал, как туда попасть.

После долгих поисков в интернете он нашел два объявления:

Поле чудесных кубов

Закопайте свои денежки на нашем поле и каждый день каждая цифра суммы на счете будет умножаться сама на себя дважды, после чего полученные числа будут сложены.

*Например, если вы положите на счет всего 99 монет, уже на второй день сумма будет равна 9*9*9+9*9*9=1458 монетам!*

Приходите к нам! С уважением, Алиса

Поле чудесных разностей

Передайте свои монеты к нам в доверительное управление и каждый день мы будем формировать из цифр вашего счета два числа – максимальное и минимальное. И на следующий день Вы получите разность этих двух чисел.

Например, у Вас было 1279 монет – на следующий день Вы получаете 9721 – 1279 = 8442 монеты.

Откройте вклад у нас! С уважением, Базилио

Подскажите Буратино, куда лучше инвестировать.

Входные данные

стоимость букваря, количество дней для инвестиций\\

выходные данные:

Один из трех вариантов:

"Поле чудесных кубов выгоднее на (сумма)"
"Поле чудесных разностей выгоднее на (сумма)"
"Буратино, не делай этого", если оба варианта не принесут прибыли

Примечание:

Буратино планирует жить вечно, поэтому срок инвестиций в днях может быть большим, до 10^7.

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда.

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
1 1000000	Буратино, не делай этого
99 1	Поле чудесных кубов выгоднее на 1458
1000 2	Буратино, не делай этого
1001 2	Поле чудесных разностей выгоднее на 9613
2 10	Поле чудесных кубов выгоднее на 371
7896 500	Буратино, не делай этого
2322 4	Буратино, не делай этого
2792 100	Поле чудесных разностей выгоднее на 5803
1921 999999	Поле чудесных разностей выгоднее на 4715
1921 1000000	Поле чудесных разностей выгоднее на 5255

Решение задачи на языке Python

```
#Функция для вычисления суммы кубов цифр
def cube(n):
num_list = map(int,list(str(n)))
    n = list(map(lambda a:a*a*a, num_list))
returnsum(n)

#Функция для вычисления разности чисел – наибольшего,
#составленного из цифр этого числа, и наименьшего,
#составленного из цифр этого числа
defdiff(n):
num_list = list(str(n))
    n = int(''.join(sorted(num_list,reverse = True)))
 – int(''.join(sorted(num_list)))
return n

#Функция, вычисляющая результат поля чудесных кубов
#за days дней
def cubes(n,days):
for i in range(0,days):
n1 = cube(n)
          #Если предыдущее число совпадает с вычисленным
          #на этом этапе – дальше можно не вычислять
if n1==n:
return n
else:
n=n1
return n
#Функция, вычисляющая результат поля чудесных
#разностей за days дней
defdiffs(n,days):
```

```
for i in range(0,days):
n1 = diff(n)
        #Если предыдущее число совпадает с вычисленным
        #на этом этапе – дальше можно не вычислять
if n1==n:
return n
else:
n=n1
return n

#Функция, проверяющая выгоду Буратино
def solve(money,days):

money_cube = cubes(money,days)
money_diff = diffs(money,days)

if(money_cube>money_diff and money_cube>money):
return 'Поле чудесных кубов выгоднее на '
+str(money_cube-money_diff)

if(money_diff>money_cube and money_diff>money):
return 'Поле чудесных разностей выгоднее на '
+str(money_diff-money_cube)

return 'Буратино, не делай этого'

money =  int(input())
days = int(input())

print(solve(money,days))
```

Задача 2. Рождение Смауга

Дракон Смауг, охраняющий золото гномов, решил установить в Одинокой Горе систему "умный дом" для защиты от несанкционированного проникновения.

Смауг решил не делать сложный код доступа, потому что он никогда не покидает пещеру.

Легенда гласит, что пароль доступа в сокровищницу меняется раз в год, на день рождения дракона, ровно в 0 часов 0 минут и генерируется следующим образом: день, на который выпал день рождения Смауга в текущем году (Mon,Tue, Wed, Thu, Fri, Sat,Sun), за ним идут цифры – количество раз, которое он отмечал свой день рождения в этот день.

Кроме того, Смауг очень гордится своим возрастом и опытностью и любит большие числа. Поэтому у главного входа в Одинокую Гору он повесил огромное световое табло, которое может показывать до 12 цифр, чтобы показывать на нем свой текущий возраст в секундах.

Бильбо Беггинсу очень нужно попасть в пещеру. Помогите Бильбо подобрать код.

Входные данные:

день рождения Смауга в формате дд.мм.гггг

Число на табло

Выходные данные:

код доступа

Ограничение времени выполнения программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
02.01.1921 3162240000	Sat15
15.01.2021 30000000	Fri1
09.05.2000 1000	Tue1
29.02.2000 9999999999	Tue11
29.02.2000 30000000	Tue1
01.01.0001 31622400000	Sat141
01.01.2001 316224000000	Fri1453
09.05.1050 2000000	Thu1
01.01.0001 9999999999	Mon45
08.03.9999 1000000000	Fri5

Решение задачи на языке Python

```
importdatetime

defcount_birthdays(last_birth_wd, d,m,start_year,end_year):
    c = 0
for y in range(start_year, end_year):
try:
ifdatetime.datetime(y,m,d).weekday() == last_birth_wd:
```

```
            c += 1
except:
         c += 0

return c

def main():
birth_date = input()
seconds = int(input())

   (d,m,birth_year) = map(int,birth_date.split('.'))
"""Грегорианский календарь образует цикл в 400 лет, а 12-значное число секунд может быть более 30 тыс лет. """

   """Год рождения берем равным остатку от деления года рождения на 400 лет, чтобы не было шансов при вычислении перевалить за 9999 год"""
birth_year %= 400
fourhundredyears = int((datetime.datetime(2400,1,1)–
datetime.datetime(2000,1,1)).total_seconds())
repeats = seconds // fourhundredyears

days = ['Mon','Tue', 'Wed', 'Thu', 'Fri', 'Sat','Sun']
birth_date = datetime.datetime(birth_year,m,d)

cur_date = birth_date + datetime.timedelta(0,seconds%fourhundredyears)


this_year = cur_date.year

try:
this_year_birth_date = datetime.datetime(this_year,m,d)
except:
this_year_birth_date = datetime.datetime(this_year–1,m,d)
```

```
ifthis_year_birth_date<= cur_date:
last_birth_date = this_year_birth_date
else:
last_birth_date = datetime.datetime(this_year–1,m,d)

last_birth_wd = last_birth_date.weekday()

count = count_birthdays(last_birth_wd,d,m,birth_year,this_year)
count_repeated = count_birthdays(last_birth_wd,d,m,birth_year,birth_year+400)

print(days[last_birth_wd]+str(1+count+count_repeated*repeats))

main()
```

Задача 3. Препятствие для королевы

Гермиона и Гарри решили сбежать к Хагриду, чтобы поиграть с Пушком, и придумали для Рона отвлекающую задачу.

Гермиона выбирает размер шахматного поля n, Гарри располагает на нем вымышленную фигуру “Философский камень”. Задача Рона – найти все возможные расположения n ферзей на поле, таких, чтобы ни один ферзь не атаковал другого.

Фигура “Философский камень” не ходит, не атакует, но через нее ферзь не может атаковать другого ферзя, и на его месте не может стоять другая фигура.
На какое время Рон будет занят этой задачей, если на одну расстановку ферзей на поле, удовлетворяющую условиям, у него уходит 1 минута?

Входные данные:

Размер доски, $3 \le n \le 10$

координаты философского камня(c,r) $0 \le r < n$, $0 \le c < n$

Выходные данные:

количество минут, на которые Рон будет занят

Ограничение времени работы программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
3 1 0	1
3 0 0	1
4 0 1	2
5 2 1	10
6 3 3	30
6 2 3	30
5 3 2	10
7 0 0	36
8 0 0	88
8 6 1	206

Решение задачи на языке C++. Автор решения – победитель ТИИМ по информатике, Иван Захаров, 10 класс, г. Москва

```
#include <bits/stdc++.h>

#define all(a) (a).begin(), (a).end()
#define rall(a) (a).rbegin(), (a).rend()
#define sz(a) (int)(a).size()

using namespace std;

constint MAXN = 10;

int x, y, n;
int used[MAXN][MAXN];

longlongcnt;

inline void go(intind, intcnt, int flag, int start) {
if (ind> y && n – ind< n –cnt) {
return;
    }

if (n – ind< n –cnt– 1) {
return;
    }

if (ind == n || cnt == n) {
if (cnt == n) {
           /* cout<< "used = \n";
for (int i = 0; i < n; i++) {
for (int j = 0; j < n; j++)  {
cout<< used[i][j] << " ";
               }
```

```
cout<< "\n";
            }
cout<< "\n"; */

            ::cnt++;
        }
return;
    }

if (!flag) {
go(ind + 1, cnt, 0, 0);
    }

for (int k = start; k < n; k++) {
if (used[k][ind] || (k == x &&ind == y)) {
continue;
        }

used[k][ind] = 10;

for (int i = ind + 1; i < n && !(k == x && i == y); i++) {
used[k][i]++;
        }
for (int i = ind – 1; i >= 0 && !(k == x && i == y); i--) {
used[k][i]++;
        }
for (int i = k + 1; i < n && !(i == x &&ind == y); i++) {
used[i][ind]++;
        }
for (int i = k – 1; i >= 0 && !(i == x &&ind == y); i--) {
used[i][ind]++;
        }
```

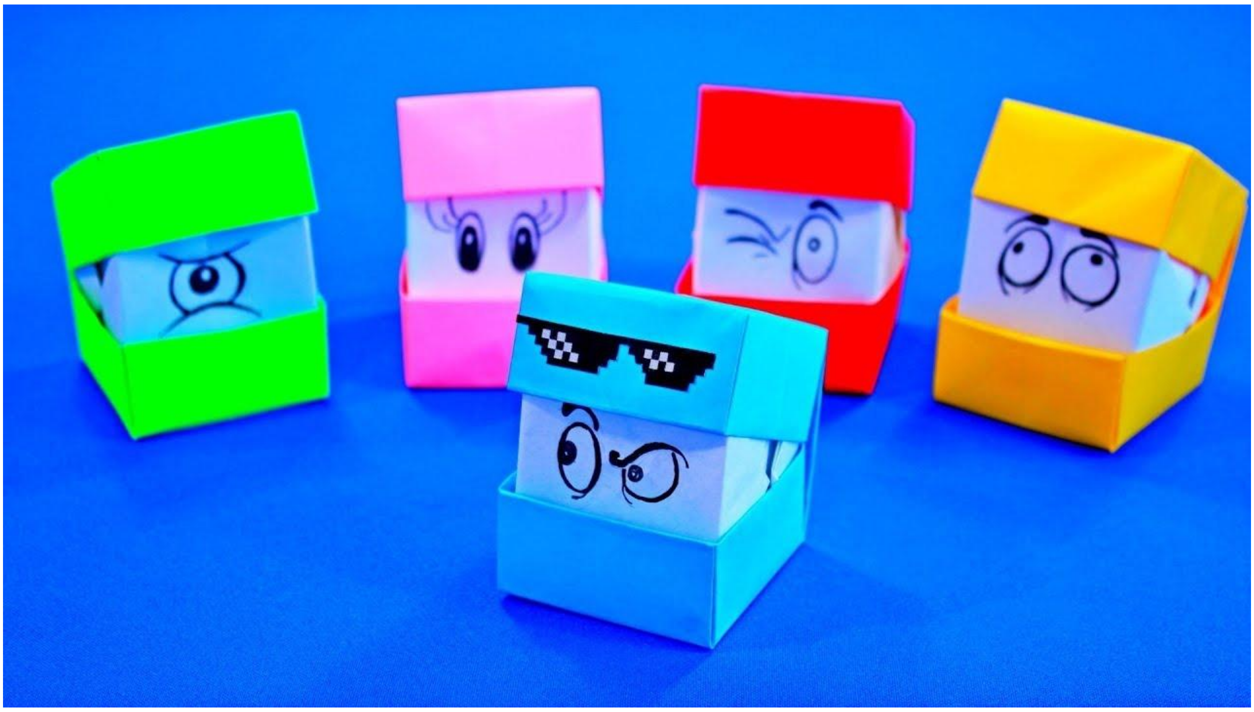
```
for (int i = 1; k + i < n &&ind + i < n &&
        !(k + i == x &&ind + i == y); i++) {
used[k + i][ind + i]++;
    }
for (int i = 1; k – i >= 0 &&ind– i >= 0 &&
        !(k – i == x &&ind– i == y); i++) {
used[k – i][ind– i]++;
    }

for (int i = 1; k + i < n &&ind– i >= 0 &&
        !(k + i == x &&ind– i == y); i++) {
used[k + i][ind– i]++;
    }
for (int i = 1; k – i >= 0 &&ind + i < n &&
        !(k – i == x &&ind + i == y); i++) {
used[k – i][ind + i]++;
    }

if (ind == y && flag == 0 && k < x &&cnt + 1 < n) {
go(ind, cnt + 1, 1, k + 1);
    }

go(ind + 1, cnt + 1, 0, 0);

used[k][ind] = 0;

for (int i = ind + 1; i < n && !(k == x && i == y); i++) {
used[k][i]--;
    }
for (int i = ind – 1; i >= 0 && !(k == x && i == y); i--) {
used[k][i]--;
    }
```

```
for (int i = k + 1; i < n && !(i == x &&ind == y); i++) {
used[i][ind]--;
        }
for (int i = k – 1; i >= 0 && !(i == x &&ind == y); i--) {
used[i][ind]--;
        }

for (int i = 1; k + i < n &&ind + i < n &&
          !(k + i == x &&ind + i == y); i++) {
used[k + i][ind + i]--;
        }
for (int i = 1; k – i >= 0 &&ind – i >= 0 &&
          !(k – i == x &&ind – i == y); i++) {
used[k – i][ind – i]--;
        }

for (int i = 1; k + i < n &&ind – i >= 0 &&
          !(k + i == x &&ind – i == y); i++) {
used[k + i][ind – i]--;
        }
for (int i = 1; k – i >= 0 &&ind + i < n &&
          !(k – i == x &&ind + i == y); i++) {
used[k – i][ind + i]--;
        }
    }
}

signed main() {
ios_base::sync_with_stdio(false);
cin.tie(0), cout.tie(0);
memset(used, 0, sizeof(used));
```

```
cin>> n >> x >> y;
cnt = 0;
go(0, 0, 0, 0);

cout<<cnt<< "\n";
return 0;
}
```

Задача 4. Детские забавы

У Пети есть младший брат, Лёва. Лёве три года, он очень смышленый, умеет считать до четырех, говорит, что мечтает стать программистом, как Петя, и его любимая игра – собирать квадрат 4*4 из своего бесконечного набора деталей. Он может заниматься этим часами.



Набор состоит из деталей размером 1*1, 1*2, 1*3 и 1*4, каждой детали неограниченное количество.

Детали могут размещаться горизонтально, но не вертикально, т.е. вариант AAABAAABAAABAAAB, где BBBB – деталь 1*4, а AAA – детали 1*3, недопустим.

Лёва придумал новую игру. Он говорит Пете, какие детали из набора взял, а Петя угадывает, сколько квадратов Лёва из них собрал.

Составьте программу, которая будет на основе списка, сообщенного Лёвой, выдавать количество собранных квадратов

Входные данные:

Список размеров деталей, разделенный пробелами, например 1 4 2 3 4 2

Выходные данные:

количество квадратов, которые можно собрать

Ограничение времени работы программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
4 4 4 4 4 4 4 4	2
3 1 2 2 4 3 1 4 2 3 1 2 4 3 1 2 2 4 3 1 4 2 3 1 2 4	4
1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4	4
3 3 3 3 3 1 1 1 2 2	1
3 3 3 3 3 3	0
4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 44 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 44 44 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 44 4 4 4 4	70
4 4 4 4 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 1 1 1 1 1	3
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 11 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2	4
1 1 2 3 4	0

Решение задачи на языке Python:

```
def main():
details = input().split()
sets=[0,0,0,0,0]
for i in range(1,5):
for detail in details:
ifint(detail) == i:
sets[i] +=1

    """Количество строк, заполненных деталями 1*4"""
rows = sets[4]

    """Количество строк, заполненных деталями 1*3 и 1*1"""
if sets[3]>0:
if sets[1]>=sets[3] :
rows+=sets[3]
sets[1] –= sets[3]
else:
rows+=sets[1]
sets[1] = 0

    """Количество строк, заполненных деталями 2*1 и 2*1"""
if sets[2]>0 :
rows+=sets[2]//2
sets[2] = sets[2] % 2
"""Количество строк, заполненных деталями 2*1 1*1 и 1*1"""
if sets[2]>0 :
if sets[1]>1:
rows+=1
sets[1]–=2
```

```
    """Количество строк, заполненных деталями 1*1"""
if sets[1]>0 :
rows+=sets[1]//4

print (rows // 4)

main()
```

Задача 5. Помогите Даше найти выход

Даша-следопыт пришла в себя в очень странном черно-белом месте. Вокруг нее были только стены и какой-то слабо освещенный коридор.

В кармане она нашла кнопочный телефон с одним странным и очень длинным сообщением. Сообщение содержало подозрительно большое количество пробелов в неожиданных местах и точки на одинаковом расстоянии друг от друга:

DearDasha!Iknowyo.@   u   a.rescar e d,bute.very t   h i.n g w i llbef i n.e   j
u   s t.fol l owmyins t r.u   c t   i o n.sbes t re g ar *.dsyourmonkey#####

Даша поняла: это зашифрованная карта лабиринта!

```
DearDasha!Iknowyo
@       u       a
r escar e d,but e
v   ery t     h i
n g w i llbef i n
e   j u       s t
fol l owmyins t r
u   c t    i  o n
s bes t re g ar *
dsyourmonkey#####
```

```
#################
@       #       #
# ##### # ##### #
#   # # #     # #
# # # # ##### # #
#   # #       # #
### # ####### # #
#   # #    #  # #
# ### # ## # ## *
#################
```

Поможем Даше-следопыту найти путь из лабиринта!

Входные данные:

Текстовая строка

Пробел – проход в лабиринте

Точка – перенос строки

@ – начальное положение Даши

* – место, куда надо прийти

Любой другой символ – стены

Выходные данные:

путь Даши по шагам в виде строки из символов > | < ^ (вправо вниз влево вверх)

Ограничение времени работы программы: 1 секунда

Пример тестовых данных:

```
#################.@        #        #.# ##### # ##### #.#    # # #      # #.# # # #
##### # #.#    # #         # #.### # ####### # #.#    # #     #   # #.# ### # ## # ##
*.#################
```

Результат работы программы:

```
> > > > > > >| | | |> > > > > > ^ ^ < < < < ^ ^ > > > > > > > | | | | | | | >
```

Решение задачи на языке Python:

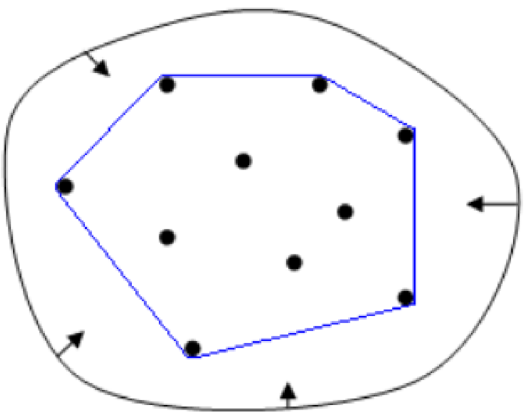
Автор решения – победитель заключительного тура олимпиады по информатике, Артем Шмараев, 10 класс, г. Белгород

```
def found(pathArr, finPoint):
weight = 1
for i in range(len(pathArr) * len(pathArr[0])):
weight += 1
for y in range(len(pathArr)):
for x in range(len(pathArr[y])):
ifpathArr[y][x] == (weight – 1):
if y > 0 and pathArr[y – 1][x] == 0:
pathArr[y – 1][x] = weight
if y < (len(pathArr) – 1) and pathArr[y + 1][x] == 0:
pathArr[y + 1][x] = weight
if x > 0 and pathArr[y][x – 1] == 0:
pathArr[y][x – 1] = weight
if x < (len(pathArr[y]) – 1) and pathArr[y][x + 1] == 0:
pathArr[y][x + 1] = weight

if (abs(y – finPoint[0]) + abs(x – finPoint[1])) == 1:
pathArr[finPoint[0]][finPoint[1]] = weight
return True
return False
defprintPath(pathArr, finPoint):
```

```
    y = finPoint[0]
    x = finPoint[1]
weight = pathArr[y][x]
result = list(range(weight))
while (weight):
weight–= 1
if y > 0 and pathArr[y – 1][x] == weight:
        y –= 1
result[weight] = '|'
elif y < (len(pathArr) – 1) and pathArr[y + 1][x] == weight:
result[weight] = '^'
        y += 1
elif x > 0 and pathArr[y][x – 1] == weight:
result[weight] = '>'
        x –= 1
elif x < (len(pathArr[y]) – 1) and pathArr[y][x + 1] == weight:
result[weight] = '<'
        x += 1

return result[1:]

a = input().split(".")
for i in range(len(a)):
a[i] = list(a[i])
for j in range(len(a[i])):
if a[i][j] == " ":
a[i][j] = 0
elif a[i][j] == "@":
pozIn = (i, j)
a[i][j] = 0
elif a[i][j] == "*":
```

```
pozOut = (i, j)
a[i][j] = 0
else:
a[i][j] = 1

labirint = a
path = [[x if x == 0 else -1 for x in y] for y in labirint]
path[pozIn[0]][pozIn[1]] = 1;

if not found(path, pozOut):
print("Путьненайден!")

result = printPath(path, pozOut)
print("".join(result))
```

Задача 6. Захват территории



После длительного пути кочевое племя наконец пришло к осознанию, что им нужно поменять образ жизни на более оседлый. Они нашли подходящий для постоянной жизни участок. Чтобы быстрее разбить лагерь, решено было использовать в качестве опор ограждения уже стоящие на участке деревья, а сами ограждения располагать по прямой линии между опорами.

Какова максимальная площадь, которая может получиться в результате, и сколько метров ограждений требуется поставить?

Расположение деревьев задано их координатами на плоскости

Входные данные:

Координаты деревьев

Выходные данные:

Площадь и периметр в метрах, разделенные пробелом. С точностью до 4 знаков после запятой

Ограничение времени работы программы:1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
0 0 –1 –1 0 –1 –1 0	1.0 4.0
–0.5 –0.5 –0.5 1 1 –0.5 0 0 –0.3 –0.3 0 0.1	1.125 5.1213
0 0 1 1 –1 0	0.5 4.6503
–10 –10 2 2 1 3 7 8 –5 –3 –2 4 –3 2 3 –5 0 0 4 7 10 10 10 –10 –10 10	400.0 80.0
2 2 1 3 7 8 –5 –3 –2 4 –3 2 3 –5 0 0 4 7	83.5 39.3394

Решение задачи на языке Python:

Автор решения – призер отборочного тура олимпиады по информатике, Артём Севидов, 10 класс, г. Реутов

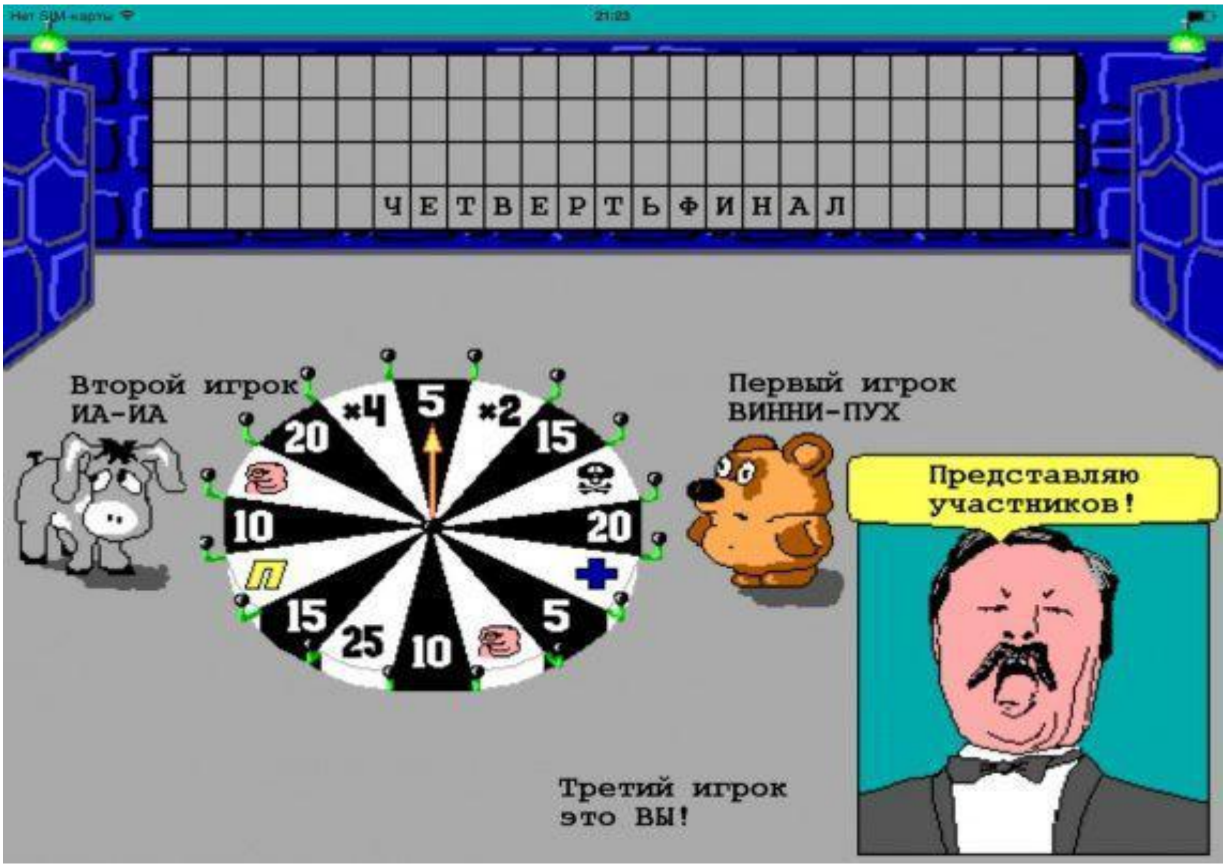
```
m=[]
while True:
try:
b,c=map(float,input().split())
m.append((b,c))
except:
break
m=list(set(m))
n=len(m)
if n<3:
print(0,0)
else:
    t=0
for i in range(n):
if m[t][0]>m[i][0]:
            t=i
    s=[]
for i in range(n):
if i!=t:
s.append(i)
def g(h,k,l):
return (k[0]-h[0])*(l[1]-k[1])-(k[1]-h[1])*(l[0]-k[0])
def q(a,b):
global m
        h=[]
        i=0
        j=0
```

```
while i<len(a) and j<len(b):
if g(m[t],m[a[i]],m[b[j]])>0:
h.append(a[i])
                i+=1
else:
h.append(b[j])
               j+=1
h.extend(a[i:])
h.extend(b[j:])
return h
def f(a):
global m
iflen(a)<=1:
return a
        k=len(a)//2
return q(f(a[:k]),f(a[k:]))
    s=f(s)
    y=[t,s[0]]
for i in range(1,len(s)):
        while g(m[y[-2]],m[y[-1]],m[s[i]])<0:
del y[-1]
y.append(s[i])
    s=0
for i in range(len(y)-1):
        s+=m[y[i]][0]*m[y[i+1]][1]
for i in range(1,len(y)):
s–=m[y[i]][0]*m[y[i-1]][1]
    s+=m[y[-1]][0]*m[y[0]][1]
s–=m[y[0]][0]*m[y[-1]][1]
    p=0
```

```
for i in range(len(y)-1):
        p+=((m[y[i]][0]-m[y[i+1]][0])**2+(m[y[i]][1]-m[y[i+1]][1])**2)**0.5
    p+=((m[y[0]][0]-m[y[-1]][0])**2+(m[y[0]][1]-m[y[-1]][1])**2)**0.5
print(round(abs(s/2),4),round(p,4))
```

Задания заключительного тура Олимпиады с решениями

Задача 1. Вращайте барабан



Два друга играют в игру: вращают барабан, пока не выпадет сектор "Деньги". Если выпадает сектор "Приз", его никто не хочет забирать и игра продолжается: барабан вращает следующий игрок.

Сектора барабана заданы входной строкой, например "ДПДПДДД".

Если на барабане все сектора заняты буквой "П", вероятность выигрыша равна 0%.

Если все сектора заняты буквой "Д", то первый игрок выигрывает с вероятностью 100%.

Входные данные:

Строка длиной >=3 символов, состоящая из букв "П" и "Д".

Выходные данные:

Вероятность выигрыша первого игрока в процентах, только число, без символа %, округленное до ближайшего целого.

Время работы программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
ДДДДД	100
ДПП	60
ДПД	75
ПППП	0

Решение задачи на языке Python:

Если n – количество секторов, а m – количество секторов с призом, искомая вероятность вычисляется как сумма бесконечной геометрической прогрессии с первым членом, равным $(n - m)/n$, и знаменателем, равным m^2/n^2.

```
def main():
    s = input()
    n = len(s)
    m = len(s.replace('Д',''))
if m == n:
res = 0
else:
res = round(n/(n+m)*100)
print(res)

main()
```

Задача 2. Новый шифр Одинокой горы

После того, как пещера Смауга была взломана хоббитами, он решил пересмотреть свои взгляды на безопасность.

В новой системе безопасности шифр состоит из 4 цифр, меняется каждую секунду, и вычисляется следующим образом:

1-я цифра – последняя цифра числа Фибоначчи fib(date), где date=год*10000+месяц*100+день,

2-я цифра – последняя цифра числа Фибоначчи fib(hours), где hours – часы,

3-я цифра – последняя цифра числа Фибоначчи fib(minutes), где minutes – минуты,

4-я цифра – последняя цифра числа Фибоначчи fib(seconds), где seconds-секунды,

Числа Фибоначчи — элементы числовой последовательности 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... ,

в которой F(0) = 0, F(1) = 1, а каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

Входные данные:

Текущие дата и время в формате дд.мм.гггг чч:мм:сс

Выходные данные:

код доступа

Время работы программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
02.01.1921 09:01:01	1411
04.04.2021 10:00:00	3500
09.03.2004 15:30:00	4000
15.01.2021 10:00:00	500
14.06.1999 11:12:13	2943

Решение задачи на языке Python:

Основная идея быстрого вычисления шифра – найти период, с которым повторяются последние цифры чисел Фибоначчи.

После того как этот период получен, мы можем быстро вычислить последнюю цифру числа Фибоначчи, не вычисляя его непосредственно.

```
deflast_fib_digit(n):
return
[0,1,1,2,3,5,8,3,1,4,5,9,4,3,7,0,7,7,4,1,5,6,1,7,8,5,3,8,1,9,0,9,9,8,7,5,2,7,9,6,5,1,6,7,
3,0,3,3,6,9,5,4,9,3,2,5,7,2,9,1][n%60]

def main():
    (the_date,the_time) = input().split()
    (d,m,y) = map(int,the_date.split('.'))
the_date_num = 10000*y+100*m+d
    (h,min,sec) =  map(int,the_time.split(':'))

    print
(int(str(last_fib_digit(the_date_num))+str(last_fib_digit(h))+str(last_fib_digit(min)
)+str(last_fib_digit(sec))))

main()
```

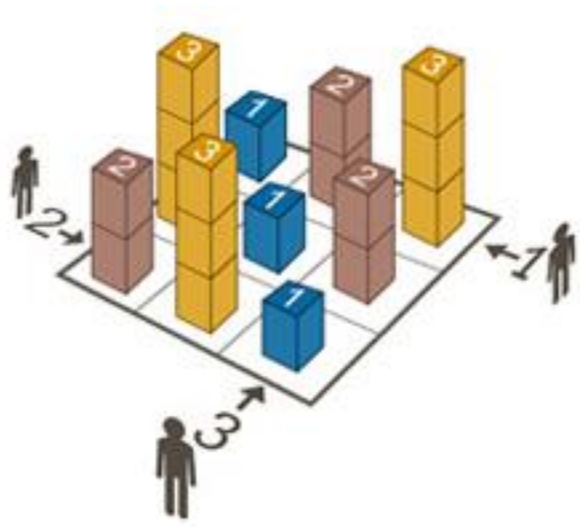
Задача 3. Небоскребы

Небоскребы (Башни) – японская головоломка, впервые представленная на WorldPuzzleChampionship в 1992 г.

На поле 4*4 нужно расположить 4 небоскреба так, чтобы выполнялись следующие условия:

- Высота каждого небоскреба – целое число от 1 до 4.
- В каждой строке и каждом столбце не может быть двух зданий одной высоты.
- В некоторых строках и некоторых столбцах задано количество зданий, которые можно увидеть. Числа расположены по периметру квадрата.
- Высокое здание закрывает более низкие, и их увидеть нельзя.
- Головоломка имеет только одно решение.

Пример



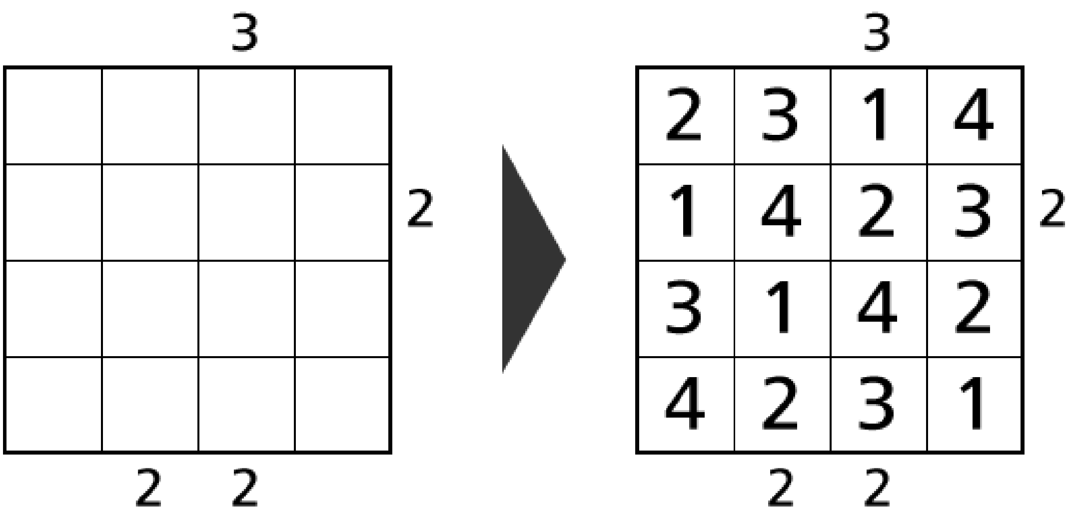
Рассмотрим строку ниже. Задано, что слева видны 4 небоскреба, а справа 1

4					1

Есть только один способ расположить небоскребы так, чтобы это условие выполнялось

4	1	2	3	4	1

Пример головоломки 4*4



Входные данные:

Строка из 16 чисел, обозначающих количество видимых зданий.

Числа расположены по часовой стрелке. Если стоит 0, значит количество видимых зданий для этой строки/столбца не задано.

	0	1	2	3	
14					5
13					6
12					7
	11	10	9	8	

Выходные данные:

Решение головоломки – 4 строки по 4 числа

Ограничение времени работы программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
2 2 1 3 2 2 3 1 1 2 2 3 3 2 1 3	1 3 4 2 4 2 1 3 3 4 2 1 2 1 3 4
0 0 1 2 0 2 0 0 0 3 0 0 0 1 0 0	2 1 4 3 3 4 1 2 4 2 3 1 1 3 2 4
1 2 4 2 2 1 3 2 3 1 2 3 3 2 2 1	4 2 1 3 3 1 2 4 1 4 3 2 2 3 4 1

Решение задачи на языке Python:

```
fromitertools import permutations, chain


defsolve_puzzle (clues):
size = 4
forposs in permutations(permutations(range(1, size+1), size), size):
for i in range(size):
iflen(set(row[i] for row in poss)) < size:
break
else:
cols_top = [[row[i] for row in poss] for i in range(size)]
rows_right = [list(reversed(row)) for row in poss]
cols_btm = [[row[i] for row in reversed(poss)] for i in reversed(range(size))]
```

```
rows_left = list(reversed(poss))
for i, row in enumerate(chain(cols_top, rows_right, cols_btm, rows_left)):
if not clues[i]:
continue
visible = 0
for j, v in enumerate(row):
visible += v >= max(row[:j+1])
if visible != clues[i]:
break
else:
returnposs

clues =  list(map(int, input().split()) )
res = solve_puzzle(clues)

for r in res:
print(' '.join(map(str,r)))
```

Задача 4. Игра в пирамидку

Младший брат Пети, Лева, учит цифры и восторгается египетскими пирамидами, а Петя учится писать программы.

Их новое развлечение – Лева складывает из карточек с цифрами число, а Петя должен через секунду сказать, сколько кубов потребуется, чтобы собрать пирамидку такого объема.

Пирамида собирается следующим образом: в основании лежит куб с длиной ребра, равной n, объемом n^3, следом идет куб объемом $(n - 1)^3$ и так далее. Самый верхний – куб с ребром 1.

Входные данные:

Объем пирамиды (сумма объемов всех кубов) – набор цифр, не более 15.

Выходные данные:

Количество кубов, использованных для пирамидки, если такое построение возможно, –1, если невозможно.

Время работы программы:1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
1071225	45
9	2
16	–1
36	3
20864367469009	2
135440716410000	4824
3408015058561	1921

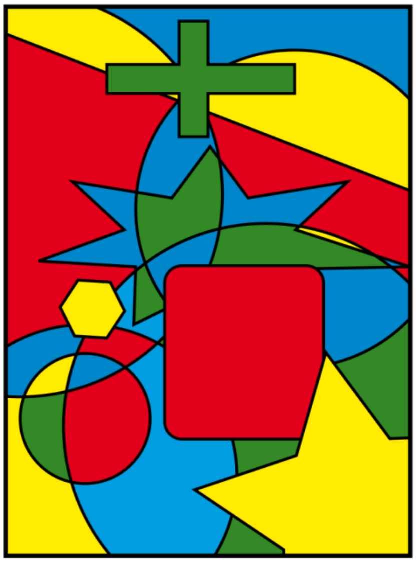
Решение задачи на языке Python:

Для решения задачи можно использовать известную формулу суммы первых *n* кубов:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 .$$

```
defsolve_faster(m):
    n = ( m**0.5*2 + 0.25 )**0.5 – 0.5
ifn.is_integer() :
returnint(n)
else:
return–1

m = int(input())
print(solve_faster(m))
```

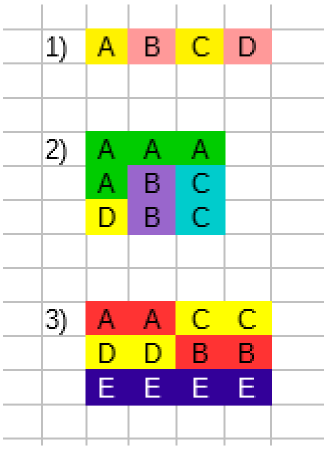
Задача 5. Помогите Даше раскрасить карту



Даша выучила теорему о четырех красках и практикуется в раскрашивании различных карт.

Теорема о четырёх красках — теорема, которая утверждает, что всякую расположенную на плоскости или на сфере карту можно раскрасить не более чем четырьмя разными цветами (красками) так, чтобы любые две области с общим участком границы были раскрашены в разные цвета. При этом области должны быть односвязными, а под общим участком границы понимается часть линии, то есть стыки нескольких областей в одной точке не считаются общей границей для них.

Карты, которые раскрашивает Даша, заданы в виде массива символов. Каждой области соответствует свой символ, и раскраска может выглядеть следующим образом:



Входные данные:

Набор строк, представляющих собой карту. Метки областей регистрозависимы, т.е. A и a означают разные области

Выходные данные:

Количество цветов, необходимое для раскраски

Время работы программы: 1 секунда

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
abcd eeee klmn	3
AAAA AAAA AAAA AAAA	1
KKKK Kkkk Kkkk KKKK	

Входные данные	Результат работы программы

`~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~`
`~!!!!!!!!!!!!!!!!!!~`
`~#################!~`
`~#&&&&&&&&&&&&&&&#!~`
`~#&(((((((((((((&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&($$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#&()$$$$$$$$$$(&#!~`
`~#%()))))(((((((&#!~`
`~#%(((&&&&&&&&&&&#!~`
`~#%%%%%%%%%#######!~`
`~######!!!!!!!!!!!!~`
`~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~`
	3

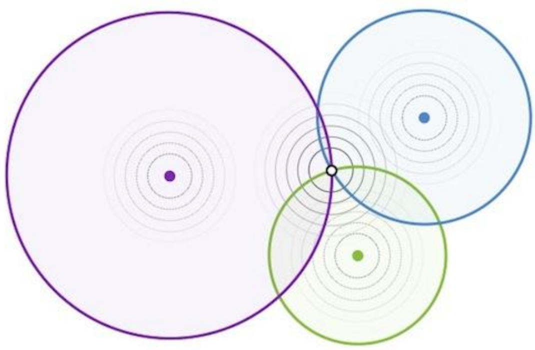
ABCD ABCD ABCD ABCD	2

Решение задачи на языке Python:

```
fromitertools import product


def color(testmap):
    m = {r:i for i,r in enumerate(set(testmap.replace('\n','')))}
    g = testmap.strip().split('\n')
h,w = len(g),len(g[0])
```

```
adj = set()
fory,x in product(range(h),range(w)):
if y+1<h and g[y][x] != g[y+1][x]: adj.add((g[y][x],g[y+1][x]))
if x+1<w and g[y][x] != g[y][x+1]: adj.add((g[y][x],g[y][x+1]))
for s in range(4):
for p in product(range(s),repeat=len(m)):
if all(p[m[a]] != p[m[b]] for a,b in adj):
return s
return 4

test = ''

while True:
try:
test += input()+"\n"
except:
break

print(color(test))
```

Задача 6. Оборона территории



Горожане построили для обороны поселения башни. На каждой башне расположен наблюдатель с известным радиусом обзора. Расположение башен задано их координатами на плоскости.

Найти площадь территории, обозреваемой наблюдателями.

Входные данные:

Список башен вида

$x_1 y_1 r_1$

$x_2 y_2 r_2$

...

$x_n y_n r_n$

где x_k – первая координата башни, y_k – вторая координата башни, r_k – радиус обзора башни.

Максимальное расстояние между башнями для любого из наборов тестовых данных ≤ 1500 м.

10 ≤ Радиус обзора каждой башни ≤ 500 м

1 ≤ Количество башен ≤ 20

Выходные данные:

Площадь обозреваемой территории, округленная до тысяч.

Время работы программы:

Время выполнения программы на сервере ограничено 10 секундами.

Набор тестовых данных:

Входные данные	Результат работы программы
0 0 50 –100 –100 50 0 –100 50 –100 0 50	31000
0 0 500 0 100 400 0 200 300 0300200	785000
0 100 200 100 100 200	165000

Входные данные	Результат работы программы
–500 –500 400 –500 500 400 500 –500 400 500 500 400	2011000
0 0 100 0 200 100 0 400 100 0 600 100 0 800 100 200 0 100 200 200 100 200 400 100 200 600 100 200 800 100 400 0 100 400 200 100 400 400 100 400 600 100 400800100	471000

Решение задачи на языке Python с использованием метода Монте-Карло:

Автор решения – призер заключительного тура олимпиады по информатике, Алексей Ингеройнен, 9 класс, г. Кострома

```
import sys
import random

def main():
check = sys.stdin.read()
    O = [list(map(int, i.strip().split())) for i in check.split('\n')]
```

```
xmin = ymin =  10**9
xmax = ymax = – 10**9
    z = []
for _ in O:
if _ == []:
continue
z.append(_)
if _[0]- _[2]<xmin: xmin = _[0]-_[2]
if _[1]-_[2]<ymin: ymin = _[1]-_[2]
if _[0]+_[2]>xmax: xmax = _[0]+_[2]
if _[1]+_[2]>ymax: ymax = _[1]+_[2]
    n = len(z)
dx = xmax – xmin
dy = ymax – ymin
insie_points = 0
    d = 1180000
for i in range(d):
        x = xmin + int(dx * random.random())
        y = ymin + int(dy * random.random())
inside = False
for j in range(n):
if (x-z[j][0])**2 + (y-z[j][1])**2 <= z[j][2]**2:
inside = True
break
if inside:
insie_points += 1

print(round(dx * dy / d * insie_points / 1000) * 1000)
return -1
main()
```

Критерии определения победителей и призеров отборочного тура

Каждое из решений участника по каждой из задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 10 баллов. Прошедшими в заключительный тур считались участники, набравшие в сумме 8 и более баллов.

Статистика отборочного тура

В отборочном туре приняли участие 540 школьников из 49 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья. Количество иностранных участников — 35 человек. Количество участников, победителей и призеров отборочного тура представлено в таблице

Класс	Количество участников	Количество призеров
5 класс и младше	24	18
6	21	11
7	34	7
8	112	14
9	100	5
10	137	1
11	112	3
Итого	540	60

Критерии определения победителей и призеров заключительного тура

Каждое из решений участника по каждой из задач проходило серию тестов. В зависимости от работы решения на наборе тестовых данных за каждую из задач можно было получить от 0 до 10 баллов.

Дипломы победителя получили участники, набравшие 40 и более баллов. Дипломы призера (2 место) — 35 баллов. Участники, набравшие 30 баллов, заняли 3 место.

Статистика заключительного тура

В отборочном туре приняли участие 40 школьников из 19 регионов Российской Федерации и ближнего зарубежья.

Призовые места заняли 9 человек. Количество участников, победителей и призеров представлено в таблице:

Класс	Количество участников	Количество призеров	Количество победителей
5	1	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0
8	3	1	0
9	6	1	0
10	14	2	2
11	16	1	1
Итого	40	6	3

План УМД на 2021/22 уч.г.

С. 4, п. 67

Александр Анатольевич Андреев

Мария Игоревна Карпухина

Екатерина Алексеевна Максимова

Елена Александровна Скородумова

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ТИИМ-ТЕХНОЛОГИИ. ИНТЕЛЛЕКТ. ИНФОРМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Задания, решения, статистика. 2020/2021 учебный год

Учебное пособие

Подписано в печать 26.05.2021г. Формат 60x90 1/16.
Объём 10,4 усл.п.л. Изд. № 43.