Олимпиада школьников

ТИИМ - Технологии. Интеллект. Информатика. Математика

(Задания заключительного тура с решениями. 2020-2021 учебный год)

14 мая 2021 г.

Задания заключительного тура олимпиады с решениями

5 класс

▷ **Задача 1.** Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 2021 и не делящихся ни на 17, ни на 113?

Решение:

Подсчитаем, сколько натуральных чисел от 1 до 2021 делится на 17, на 113 и на оба эти числа одновременно:

$$2021 = 17 \cdot \mathbf{118} + 15$$

$$2021 = 113 \cdot \mathbf{17} + 100$$

$$2021 = 1921 \cdot \mathbf{1} + 100$$

Таким образом, 118 чисел делятся на 17, 17 чисел делятся на 113 и 1 число делится на $17 \cdot 113 = 1921$ (чтобы оно не посчиталось дважды, его необходимо вычесть из общего количества). Тогда чисел, которые не делятся ни на 17, ни на 113, получится

$$2021 - (17 + 118 - 1) = 1887$$

Ответ: 1887

▷ **Задача 2.** Средний возраст членов гимнастической секции – 11 лет; старосте секции 17 лет, а средний возраст остальных членов секции – 10 лет. Сколько детей занимается в секции?

Решение:

Пусть всего в секции занимается n детей, тогда их суммарный возраст $S = 11n$. С другой стороны, суммарный возраст всех членов без старосты секции равен $10(n-1)$, значит $S = 17 + 10(n-1)$. Приравняем эти значения:

$$11n = 17 + 10(n-1)$$

$$n = 7$$

Ответ: 7 **членов**

▷ **Задача 3.** В пустых клетках на рисунке проставить такие числа, чтобы все 4 горизонтальных и 4 вертикальных равенства были верны.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{2}\\
+ & & - & & + & & +\\
\boxed{} & - & \boxed{2} & + & \boxed{0} & = & \boxed{}\\
- & & + & & - & & -\\
\boxed{} & + & \boxed{} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6}\\
= & & = & & = & & =\\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

12

Решение:

Начнём последовательно заполнять таблицу со строки или столбца, в которых имеется всего одна пустая клетка. Например:

1) Четвёртая строка: в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 3;

2) Третий столбец: в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 9;

3) Четвертый столбец: 7;

4) Первая строка: 7;

5) Вторая строка: 9;

6) Первый столбец: 12;

7) Третья строка: 0.

Ответ:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{7} & - & \boxed{9} & = & \boxed{2}\\
+ & & - & & + & & +\\
\boxed{9} & - & \boxed{2} & + & \boxed{0} & = & \boxed{7}\\
- & & + & & - & & -\\
\boxed{12} & + & \boxed{0} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6}\\
= & & = & & = & & =\\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

▷ **Задача 4.** Сколько всего спичек может быть получено из деревянного куба, ребро которого равно 1 м? Размер спички $50 \times 2 \times 2$ мм.

Решение:

1 метр = 100 см = 1000мм, тогда объем одной спички будет равен $50 \cdot 2 \cdot 2 = 200$мм^3, в то время как объем всего деревянного куба равен 1000^3мм. Тогда искомое количество равно:

$$h = \frac{1000000000}{200} = 5000000$$

Ответ: 5000000

▷ **Задача 5.** Замените в выражении

$$\bigstar\,(\bigstar\,(\bigstar\,(\bigstar - 20) - 21) - 19) = 21$$

звёздочки различными делителями числа 28 так, чтобы получилось верное равенство.

Решение:

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

Всего делителей числа 28 шесть: $1, 2, 4, 7, 14, 28$. Заметим, что внутренняя звездочка может быть равна только 28, иначе разность во внутренней скобке (а значит, и во всех остальных) окажется отрицательной.

Перепишем для удобства наше равенство в следующем виде:

$$z_1(z_2(z_3 \cdot 8 - 21) - 19) = 21$$

Первая звездочка может быть равна 7 или 1. Допустим $z_1 = 7$, тогда

$$z_2(z_3 \cdot 8 - 21) = 22$$

Вторая звездочка может быть равна 2 или 1. Если $z_2 = 2$, то $8z_3 = 32$, откуда $z_3 = 4$.

Если же $z_2 = 1$, то $8z_3 = 43$, что не имеет решений в натуральных числах.
Вернёмся теперь к нашему предположению о первой звёздочке. Пусть теперь $z_1 = 1$, тогда

$$z_2(z_3 \cdot 8 - 21) = 40$$

и для второй звёздочки возможны значения 2 и 4.

$$z_2 = 2 : 8z_3 = 41$$

$$z_2 = 4 : 8z_3 = 31$$

Ни одно из этих соотношений также не разрешимо в натуральных числах.
Ответ: $7(2(4(28 - 20) - 21) - 19) = 21$

$\triangleright$ **Задача 6.** Решить уравнение $x+S(x) = 1921$, где $S(x)$ – сумма цифр натурального числа x.
Решение:
С одной стороны, очевидно, что $x < 1921$. В этом случае сумма цифр искомого числа $S(x) \leq 27$ (значение достигается при $x = 1899$). С другой стороны

$$1921 = x + S(x) \leq x + 27 \Rightarrow x \geq 1894$$

Таким образом, для первых двух цифр числа возможно всего два варианта. Рассмотрим их:
1) $x = \overline{19ab}$; $S(x) = 10 + a + b$. Уравнение принимает вид:

$$1900 + 10a + b + 10 + a + b = 1921$$

$$11a + 2b = 11$$

$$a = 1 \;\; b = 0$$

$$x = 1910$$

2) $x = \overline{18ab}$; $S(x) = 9 + a + b$. Тогда

$$1800 + 10a + b + 9 + a + b = 1921$$

$$11a = 112 - 2b$$

Из этого равенства видно, что a должно быть чётным; полагая $a = 2k, (0 \le k \le 4)$, получаем:

$$11k = 56 - b$$

$$b - 1 = 11(5 - k)$$

То есть $(b-1)\vdots 11$, откуда, с учетом того, что $0 \le b \le 9$, получаем $b = 1$. Но тогда $k = 5$, что невозможно.
Ответ: 1910

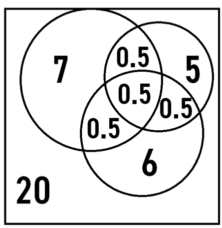
▷ **Задача 7.** Пол комнаты площадью 20м^2 покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра – 7м^2, другого – 6м^2 и третьего – 5м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1м^2, причём все три ковра перекрываются на площади 0,5м^2. Какова площадь части пола, не покрытой коврами?
Решение:
Воспользуемся формулой включений-исключений для нахождения площади пола, покрытой коврами:

$$7 + 6 + 5 - 1 - 1 - 1 + 0,5 = 15,5$$

Тогда оставшаяся часть пола имеет площадь

$$20 - 15,5 = 4,5$$

P.S. Если формула включений-исключений не известна, то мож-



но рассуждать следующим образом: Раз все три ковра перекрываются на площади 0,5м^2, то на части, покрытые ровно двумя коврами, также остаётся по 0,5м^2. Значит, площадь, покрытая только первым ковром, равна $7-3\cdot 0,5 = 5,5$м^2, только вторым ковром – $6 - 3 \cdot 0,5 = 4,5$м^2, только третьим ковром – $5 - 3 \cdot 0,5 = 3,5$м^2, и тогда площадь, покрытая коврами, равна

$$5,5 + 4,5 + 3,5 + 4 \cdot 0,5 = 15,5.$$

Ответ: $4,5$**м**^{2}

▷ **Задача 8.** Сумма двух натуральных чисел равна 1921. Если у одного из слагаемых зачеркнуть: а) последние две цифры; б) первые две цифры, то получится второе слагаемое. Найдите эти числа и объясните, почему других нет.
Решение:

$$x + y = 1921$$

Если большее число – трехзначное, а меньшее, соответственно, однозначное, то

$$y + x \leq 999 + 9 = 1008 < 1921,$$

то есть не удовлетворяет условиям задачи. Пусть y – четырехзначное число, а x – двухзначное.
а) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y = 100x + z,$$

где z – двузначное или однозначное. Подставим его в наше уравнение:

$$100x + z + x = 1921$$

$$101x + z = 1921 = 19 \cdot 101 + 2$$

$$x = 19 \quad z = 02$$

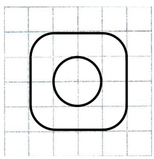
Это решение единственно, поскольку при других x число z окажется трехзначным.
б) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y = 100z + x$$

$$2x + 100z = 1921.$$

Но левая часть этого равенства чётная, а правая – нечётная, значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.
Ответ: а) 1902; б) нет решений

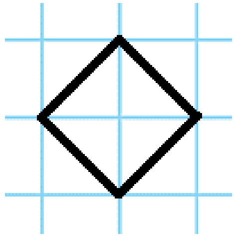
▷ **Задача 9.** На клетчатой бумаге нарисована фигура, граница которой состоит из прямолинейных отрезков и дуг окружностей. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого в шесть раз меньше площади нарисованной фигуры.



Решение:
Площадь нарисованной фигуры равна $S = 8 + 4 = 12$ клеток (8 полноценных и 4 собранных из четверти окружности и "лунки"), значит, площадь искомого квадрата равна $12/6 = 2$. На клетчатой бумаге такой квадрат изображается следующим образом.
Ответ:

▷ **Задача 10.** Сколько единиц в записи числа

$$9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999...9}_{1921}$$



Решение:

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{999...9}_{1921} = 10-1+10^2-1+10^3-1+\cdots+10^{1921}-1 =$$

$$(10+10^2+10^3+\cdots+10^{1921})-1921 = \underbrace{11\ldots10}_{1922}-1921$$

Ясно, что при вычитании могут измениться только последние пять цифр числа:

$$\underbrace{11\ldots1}_{1917}11110-1921 = \underbrace{11\ldots1}_{1917}09189$$

В этом числе, очевидно, 1918 единиц.
Ответ: 1918

6 класс

▷ **Задача 1.** Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 20210 не делящихся ни на 17, ни на 113.
Решение:
Подсчитаем, сколько натуральных чисел от 1 до 2021 делится на 17, на 113 и на оба эти числа одновременно:

$$20210 = \mathbf{1188}\cdot 17+14$$

$$20210 = \mathbf{178}\cdot 113+96$$

$$20210 = \mathbf{10}\cdot 1921+1000$$

Таким образом, 1188 чисел делятся на 17, 178 чисел делятся на 113, и 10 чисел делятся на $17 \cdot 117 = 1921$. (чтобы оно не посчиталось дважды, его необходимо вычесть из общего количества). Тогда чисел, которые не делятся ни на 17, ни на 113, получится

$$20210 - (1188 + 178 - 10) = 18854$$

Ответ: 18854

▷ **Задача 2.** Средний возраст 11 игроков футбольной команды на 1 год больше, чем средний возраст 10 футболистов без капитана. На сколько лет возраст капитана больше среднего возраста команды?

Решение:

Пусть m – средний возраст 10 футболистов без капитана, $m+1$ – средний возраст 11 футболистов. Тогда возраст капитана будет равен

$$11(m+1) - 10m = m + 11,$$

а разница между возрастом капитана и средним возрастом остальной команды равна

$$m + 11 - m = 11\text{лет}$$

Ответ: 11 **лет**

▷ **Задача 3.** В пустых клетках на рисунке проставить такие числа, чтобы все 4 горизонтальных и 4 вертикальных равенства были верны.

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{} & - & \boxed{} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{} & - & \boxed{2} & + & \boxed{5} & = & \boxed{} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{} & + & \boxed{} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Решение:

Начнём последовательно заполнять таблицу со строки или столбца, в которых имеется всего одна пустая клетка. Например:

1) Четвёртый столбец: : в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 7;

2) Вторая строка: : в оставшуюся пустой клетку необходимо поставить 4;

3) Первый столбец: 7;

4) Третья строка: 5;

5) Четвёртая строка: 3;

6) Второй столбец: 2;

7) Первая строка: 4.

Ответ:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{2} & - & \boxed{4} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{4} & - & \boxed{2} & + & \boxed{5} & = & \boxed{7} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{7} & + & \boxed{5} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

▷ **Задача 4.** Решить уравнение $x+S(x)=2021$, где $S(x)$ – сумма цифр натурального числа x.

Решение:
С одной стороны, очевидно, что $x < 2021$. В этом случае сумма цифр искомого числа $S(x) \leq 28$ (значение достигается при $x = 1999$). С другой стороны

$$2021 = x + S(x) \leq x + 28 \Rightarrow x \geq 1993$$

Таким образом, для первых двух цифр числа возможно всего два варианта. Рассмотрим их: а) $x = \overline{20ab},\ S(x) = 2+a+b$. Уравнение принимает вид

$$2000 + 10a + b + 2 + a + b = 2021$$

$$11a + 2b = 19$$

$$a = 1,\ b = 4$$

Отсюда $x = 2014$.
б) $x = \overline{19ab},\ S(x) = 10 + a + b$. Уравнение принимает вид

$$1900 + 10a + b + 10 + a + b = 2021$$

$$11a + 2b = 111$$

$$a = 9,\ b = 6.$$

Это единственное решение, т.к. $a \leq 9$, а при меньших a число b окажется больше 9. Отсюда $x = 1996$.

$\triangleright$ **Задача 5.** Сумма двух натуральных чисел равна 2021. Если у одного из слагаемых зачеркнуть
а) последние две цифры;
б) первые две цифры,
то получится второе слагаемое. Найдите эти числа в обоих случаях.
Решение:

$$x + y = 2021$$

Если большее число – трехзначное, а меньшее, соответственно, однозначное, то

$$y + x \leq 999 + 9 = 1008 < 2021,$$

то есть не удовлетворяет условиям задачи. Пусть y – четырехзначное число, а x – двухзначное.
а) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y = 100x + z,$$

где z – двузначное или однозначное. Подставим его в наше уравнение:

$$10x + z + x = 2021$$

$$101x + z = 2021 = 101 \cdot 20 + 1$$

$$x = 20 \;\; z = 01$$

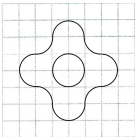
Это решение единственно, поскольку при других x число z окажется трехзначным. Таким образом $y = 2001, x = 20$.
б) Если число x получено из y вычеркиванием последних двух цифр, то справедливо представление:

$$y = 100z + x$$

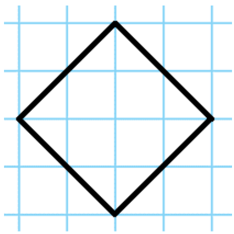
$$2x + 100z = 2021$$

Но левая часть этого равенства чётная, а правая – нечётная, значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.
Ответ: а) 2001; б) нет решений

$\triangleright$ **Задача 6.** На клетчатой бумаге нарисована фигура, граница которой состоит из дуг окружностей одного радиуса. Постройте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого составляет 50 % площади нарисованной фигуры.



Решение:
Площадь нарисованной фигуры равна $S = 8 + 8 = 12$ клеток (8 полноценных и 8 собранных из четверти окружности и "лунки"), значит, площадь искомого квадрата равна $16/2 = 8$. На клетчатой бумаге такой квадрат изображается следующим образом.



Ответ:

▷ **Задача 7.** Длина удава в “попугаях” составила 48, а его же длина в “слоненках” – только 3. Чему равна длина удава в “мартышках”, если известно, что длина слоненка в “мартышках” равна длине мартышки в “попугаях”?
Решение:
Обозначим длину удава за u, попугая – p, слонёнка – s, мартышки – m. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$u = 48p = 3s$$

$$s = x \cdot m, \;\; m = x \cdot p.$$

Тогда

$$s = x^2 \cdot p \Rightarrow u = 3x^2 \cdot p = 48p$$

Отсюда получаем

$$x = 4 \Rightarrow u = 3s = 3x \cdot m = 12m,$$

то есть длина удава в мартышках равна 12.

Ответ: 12 **мартышек**

▷ **Задача 8.** Сколько единиц в записи следующего числа

$$\underbrace{99..9}_{1921}+\underbrace{99..9}_{1922}+\cdots+\underbrace{99..9}_{2021}$$

Решение:

$$\underbrace{99..9}_{1921}+\underbrace{99..9}_{1922}+\cdots+\underbrace{99..9}_{2021}=10^{1921}-1+10^{1921}+\cdots+10^{2021}-1=$$

$$10^{1921}+10^{1922}+\cdots+10^{2021}-101=$$

$$10^{1921}(1+10+\cdots+10^{100})-101=$$

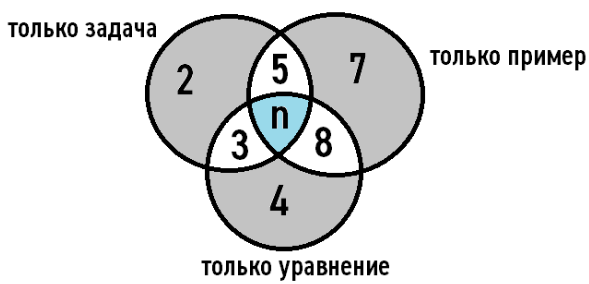
$$\underbrace{11\ldots1}_{101}\underbrace{00\ldots0}_{1921}-101=\underbrace{11\ldots1}_{100}\underbrace{9\ldots9899}_{1922}$$

Ответ: 100

▷ **Задача 9.** Контрольная работа по математике в шестом классе состояла из задачи, уравнения и численного примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение – 4, только пример – 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение – 5, только пример – 3. Остальные выполнили работу правильно. Сколько таких учеников?

Решение:

Ученики, не решившие только задачу решили верно и пример, и



уравнение; не решившие только уравнение решили верно и пример, и задачу; не решившие только пример решили верно и задачу, и уравнение. На рисунке показано распределение учеников в классе по решённым заданиям, и которого видно, что

$$n + 2 + 5 + 7 + 3 + 8 + 4 = 36$$

$$n = 36 - 29 = 7$$

Ответ: 7 учеников

▷ **Задача 10.** Треть книжной полки занимают словари толщиной 19 мм, а оставщуюся часть – энциклопеции толщиной 23 мм. Какова наименьшая возможная длина полки и сколько книг на ней стоит?

Решение:

Пусть m – количество словарей, n – количество томов энциклопедии, тогда все словари занимают $19m$ мм, а энциклопедии - $23n$ мм, причём энциклопедии занимают на полке места в два раза больше, чем словари, то есть

$$2 \cdot 19m = 23n.$$

Поскольку m и n – натуральные числа, а 38 и 23 взаимно просты, получаем, что

$$m = 23 \;\; n = 38$$

наименьшее возможное количество книг. Тогда длина полки

$$l = 3 \cdot 19m = 1311\text{мм} = 131,1\text{см},$$

а количество томов $m + n = 61$.

Ответ: 61 том на полке длиной 131,1см

7 класс

▷ **Задача 1.** Найти все четырёхзначные числа, которые одновременно делятся на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15.

Решение:
Для того, чтобы число удовлетворяло условию задачи, достаточно, чтобы оно делилось на $5, 7, 8$ и 9, а поскольку эти числа уже взаимно просты, то наше число должно делиться на $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. Подобных четырёхзначных чисел ровно три:

$$N_1 = 2520,\ \ N_2 = 2 \cdot 2520 = 5040,\ \ N_3 = 3 \cdot 2520 = 7560$$

Ответ: 2520, 5040, 7560

▷ **Задача 2.** В седьмом классе каждый мальчик дружит с пятью девочками и шестью мальчиками, а каждая девочка дружит с шестью мальчиками и пятью девочками. Сколько школьников учится в седьмом классе, если известно, что их не больше 30?
Решение:
Пусть в классе учится m мальчиков и n девочек. Подсчитаем, сколько можно составить дружеских пар "мальчик-девочка". Так как каждый мальчик дружит с 5-ю девочками, то число пар равно $5m$. С другой стороны, так как каждая из n девочек дружит с 6-ю мальчиками, то таких пар – $6n$. Имеем $5m = 6n$, откуда $n = 5k$, $m = 6k$, где k – некоторое натуральное число. Тогда число школьников в 7-ом классе $n + m = 11k$ делится на 11. Согласно условию, каждый пятиклассник имеет 11 друзей в классе. Поэтому число учеников больше 11. А так как по условию их не больше 30, то это число 22.
Ответ: 22

▷ **Задача 3.** Про числа a, b, c, d известно, что $a = bcd$, $a+b = cd$, $a + b + c = d$, $a + b + c + d = 1$. Чему равно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?
Решение:

$$\begin{cases} a + b + c - d = 0 \\ a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое и получим $d = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2}c \\ a + b + c = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}c + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

Подставляя в оставшиеся уравнения, получим окончательно

$$\begin{cases} a = \frac{1}{6}b \\ a + b = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{7},\ a = \frac{1}{42}$$

Тогда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 42 + 7 + 3 + 2 = 54$$

Ответ: 54

▷ **Задача 4.** Шестую часть книжной полки занимают книги толщиной 12 мм, треть – книги толщиной 15 мм, а оставшуюся часть – книги толщиной 18 мм. Все книги разные. Иван меньше чем за месяц прочёл их все, читая по одной книге в день. Сколько книг стоит на полке и какова длина полки?

Решение:

Пусть n – количество книг толщиной 12мм, m – 15мм, k – 18мм. Книги первого типа занимают на полке в два раза меньше места, чем книги второго типа, значит

$$2 \cdot 12n = 15m.$$

Книги третьего типа занимают половину полки, значит

$$3 \cdot 15m = 2 \cdot 18k.$$

При этом известно, что Иван прочёл их все меньше чем за месяц, читая по одной в день, значит $m + n + k < 31$.

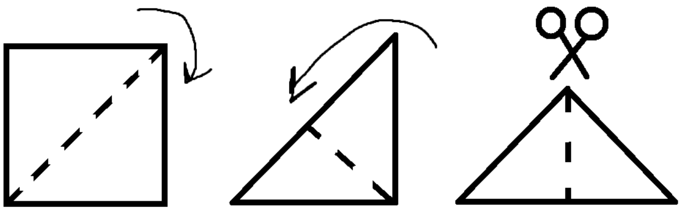
$$\begin{cases} 8n = 5m \\ 5m = 4k \end{cases}$$

С учетом того, что все числа – натуральные, видим, что m должно делиться на 8.
Если $m = 8$, то $n = 5, k = 10$ и $n + m + k = 23 < 31$. Если же $m = 8k$, $k > 1$, то неравенство уже не выполняется, а значит, решение единственно.
Длина полки при этом равна

$$l = 6 \cdot 12n = 360\text{мм} = 36\text{см}$$

Ответ: 23 книги на полке длиной 36см

$\triangleright$ **Задача 5.** Как квадратный кусок бумаги сложить так, чтобы после одного прямолинейного разреза получилось четыре квадрата?
Решение:



$\triangleright$ **Задача 6.** Не более 100, но не менее 50 натуральных чисел записаны по кругу. Известно, что сумма любых трёх подряд идущих чисел одна и та же. Каково наибольшее из всех возможных значений написанных чисел, если известно, что сумма всех чисел равна 1921.
Решение:
Поскольку все суммы подряд идущих чисел равны, т.е.

$$a_1+a_2+a_3 = a_2+a_3+a_4 = a_3+a_4+a_5 = \cdots = a_{n+1}+a_n+a_1 = a_n+a_1+a_2,$$

получаем

$$a_1 = a_4 = a_7 = \dots$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \dots$$

$$a_3 = a_6 = a_9 = \dots$$

Если количество чисел не кратно трём, то это будет означать, что все числа равны между собой; если же $n = 3k$, то значения для каждой цепочки могут быть различными.
В случае, если по кругу записаны равные числа, сумма которых равна 1921, для того, чтобы эти числа были натуральными, их количество должно равняться 17 или 113 (или 1921), что не удовлетворяет условию. Поэтому рассмотрим случай $n = 3k$ и обозначим

$$a_1 = a_4 = a_7 = \dots = a$$

$$a_2 = a_5 = a_8 = \dots = b$$

$$a_3 = a_6 = a_9 = \dots = c,$$

а количество троек этих чисел – через k ($17 \le k \le 33$). Тогда

$$1921 = 17 \cdot 113 = a_1 + \dots + a_n = (a + b + c) \cdot k.$$

Единственное возможное значение для $k = 17$, откуда

$$n = 51,\ a + b + c = 113.$$

Числа a, b, c, вообще говоря, не обязательно различные, и если мы хотим найти наибольшее возможное значение числа, встречающегося в записи, следует взять $a = 1, b = 1, c = 111$.
Ответ: 111

$\triangleright$ **Задача 7.** В квадрате 3×3 заполните 9 клеток различными целыми неотрицательными числами так, чтобы суммы чисел по каждой строке, каждому столбцу и диагоналям квадрата были одинаковыми и равнялись 456.
Решение:
Обозначим суммы по строкам, столбцам и диагонялам за l, тогда

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

сумма всех элементов таблицы будет равна $3l$. Если теперь сложить все строки, все столбцы, две диагонали и повторно вторую строку и второй столбец, то каждый элемент таблицы встретится в этой сумме три раза, а средний элемент – ещё три сверх того:

$$(a_1+a_2+a_3)+2\cdot(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+(a_1+a_4+a_7)+2\cdot(a_2+a_5+a_8)+$$

$$+(a_3+a_6+a_9)+(a_1+a_5+a_9)+(a_3+a_5+a_7)=3S+3a_5.$$

Поскольку суммы во всех скобках равны, получаем

$$10l=3\cdot 3l+3a_5 \Rightarrow a_5=\frac{l}{3}.$$

Если теперь оставить первые два элемента произвольными, а остальные найти из условий задачи, мы получим следующую таблицу:

Теперь можно придать первым двум элементам любые значения,

a_1	a_2	$l-a_1-a_2$
$\frac{4l}{3}-2a_1-a_2$	$\frac{l}{3}$	$2a_1+a_2-\frac{2l}{3}$
$a_1+a_2-\frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3}-a_2$	$\frac{2l}{3}-a_1$

при условии, что остальные элементы таблицы останутся неотрицательными. Например

114	304	38
76	152	228
266	0	190

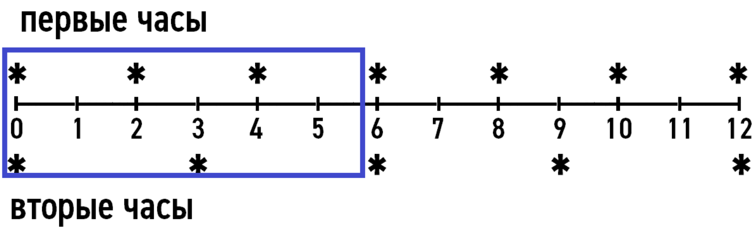
Ответ:

▷ **Задача 8.** Двое часов начали бить одновременно. Первые бьют через каждые 2 секунды, вторые через каждые 3 секунды. Всего был насчитан 1921 удар (слившиеся удары воспринимаются как один). Сколько времени прошло между первым и последним ударами? Удар считать мгновенным.

Решение:

Проиллюстрируем удары часов:

Видно, что общая картина ударов повторяется с периодичностью



в 6 секунд, причём за каждый промежуток слышно четыре удара.

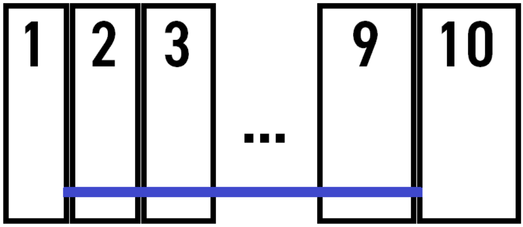
$$1921 = 480 \cdot 4 + 1,$$

значит, за всё время, что били часы, прошло 480 периодов, и остался ещё один сдвоенный удар, пришедшийся на начало следующего периода, но поскольку удар считается мгновенным, новых секунд он не добавил. Отсюда получаем

$$t = 6 \cdot 480\text{сек} = 48\text{мин}.$$

Ответ: 48 **минут**

▷ **Задача 9.** На книжной полке у Знайки стоит история Цветочного города в 10 томах, тома идут по порядку слева направо. Толщина первого тома – 2,1 см, второго – 2,2 см, третьего – 2,3 см и т.д., десятого – 3 см. Книжный червяк прополз от первой страницы первого тома до последней страницы десятого тома (по прямой линии). Какой путь он проделал? Толщина обложки – 2 мм.



Решение:

С учетом расположения книг путь червяка пролегал через одну обложку первого тома, все тома со второго по девятый, и одну обложку десятого тома. Итого, на пути червяка встретилось 2 обложки и

$$2,2 + 2,3 + .. + 2.9 = \frac{2,2 + 2,9}{2} \cdot 8 = 20,4\,\text{см книг.}$$

Длина пути червяка составила

$$l = 20,4 + 0,4 = 20,8\,\text{см}$$

Ответ: 20,8 см

▷ **Задача 10.** Для участников олимпиады по математике "ТИИМ–2021" было приготовлено конфет столько же, сколько вместе булочек и стаканов чая. Каждый участник съел по конфете и выпил по стакану чаю, после чего осталось стаканов чая и конфет вместе столько же, сколько булочек. Остался ли ещё чай?

Решение:

Пусть x – количество конфет, y – количество стаканов чая, z – количество булочек, n – количество участников. Тогда

$$\begin{cases} x = y + z \\ (x - n) + (y - n) = z \end{cases}$$

$$y + z - n + y - n = z$$

$$2y = 2n \Rightarrow y = n,$$

то есть количество участников равно количеству стаканов чая. Значит, чай закончился.
Ответ: нет, чай закончился.

8 класс

▷ **Задача 1.** Представить число 1921 в виде суммы двух натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых максимально.
Решение:

$$a + b = 1921 \Rightarrow b = 1921 - a$$

Наименьшее общее кратное чисел не превосходит их произведения:

$$\text{НОК}(a, b) \leq a \cdot b = a(1921 - a) = \left(\frac{1921}{2}\right)^2 - \left(\frac{1921}{2} - a\right)^2.$$

Максимальное значение правой части достигается при $a = \frac{1921}{2} \notin \mathbb{N}$, поэтому рассмотрим ближайшее натуральное число: $a = 960$ (для $a = 961$ результат будет такой же). В этом случае

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(960, 961) = 960 \cdot 961,$$

т.к. числа взаимно просты, а значит, именно у этих чисел наименьшее кратное достигает своего наибольшего значения.
Ответ: $960 + 961$

▷ **Задача 2.** Во всех клетках поставить натуральные числа так, чтобы выполнялись все 8 равенств. Сколько решений имеет эта задача?

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \square & - & \square & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\square & - & \boxed{2} & + & \square & = & \square \\
- & & + & & - & & - \\
\square & + & \square & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \square & = & \boxed{3}
\end{array}$$

Решение:
Сначала заполним клетки, в которых значение определяется однозначно, после чего во вторую клетку первой строки подставим переменную x и подсчитаем относительно неё остальные значения. Получим следующую картину: Т.к. все числа, стоящие в

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{4} & + & \boxed{x} & - & \boxed{x+2} & = & \boxed{2} \\
+ & & - & & + & & + \\
\boxed{x+2} & - & \boxed{2} & + & \boxed{7-x} & = & \boxed{7} \\
- & & + & & - & & - \\
\boxed{x+5} & + & \boxed{7-x} & - & \boxed{6} & = & \boxed{6} \\
= & & = & & = & & = \\
\boxed{1} & + & \boxed{5} & - & \boxed{3} & = & \boxed{3}
\end{array}$$

клетках, натуральные, получим следующие ограничения на x:

$$x \geq 1, \quad 7 - x \geq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 6,$$

откуда получаем, что задача имеет 6 различных решений.

Ответ: 6

▷ **Задача 3.** Найдите наименьшее число, которое имеет ровно 2021 делитель.
Решение:
Рассмотрим разложение произвольного числа на простые делители:

$$N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

Поскольку все делители числа N состоят из тех же простых чисел, и степень каждого из них может принимать любое значение от 0 до β_i, общее количество делителей выражается формулой:

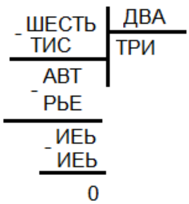
$$D = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_n + 1)$$

По условию задачи

$$D = 2021 = 43 \cdot 47,$$

откуда следует, что искомое число имеет не более двух различных простых делителей. Поскольку нам требуется найти наименьшее такое число, в качестве этих простых делителей мы будем брать наименьшие: 2 и 3. Если делитель один, то $\beta_1 = 2021$, а само число $N = 2^{2020}$. Если же делителей два, то $\beta_1 = 42, \beta_2 = 46$, а число имеет вид $N = 2^{42} \cdot 3^{46}$ или $N = 2^{46} \cdot 3^{42}$. Сравнив значения этих трёх чисел, окончательно находим, что наименьшее из них равно $2^{46} \cdot 3^{42}$.
Ответ: $2^{46} \cdot 3^{42}$

▷ **Задача 4.** Расшифруйте ребус, в котором разным буквам соответствуют разные цифры:



Ответ: $52647 : 109 = 483$

▷ **Задача 5.** 48 кузнецов должны подковать 60 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову 5 мин? (Учтите, что лошадь не может стоять на двух ногах).
Решение:
Ясно, что затраченное время не меньше чем $(60 \cdot 4) : 48 = 5$, т.е. 25 мин. Разобьем кузнецов и лошадей на 12 групп, по 4 кузнеца и 5 лошадей в каждой, и распределение работы в каждой группе представим таблицей, в которой, например, цифра 3, стоящая на

к \л	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3
4	3	4	5	1	2

пересечении строки 2 со столбцом 4, означает, что в течение 3-й пятиминутки кузнец подковывает 4-ю лошадь
Так как числа, стоящие в каждой строке и в каждом столбце, различны, то в течение каждой пятиминутки каждый кузнец работает ровно с одной лошадью. Из таблицы видно, что вся работа будет выполнена за 25 минут.
Ответ: 25 минут

▷ **Задача 6.** Даны отрезки длиной $|a| = \sqrt{19}$, $|b| = \sqrt{21}$.С помощью циркуля и линейки постройте отрезок $l : |l| = \sqrt{2021}$.
Решение:
Построим отрезки длиной

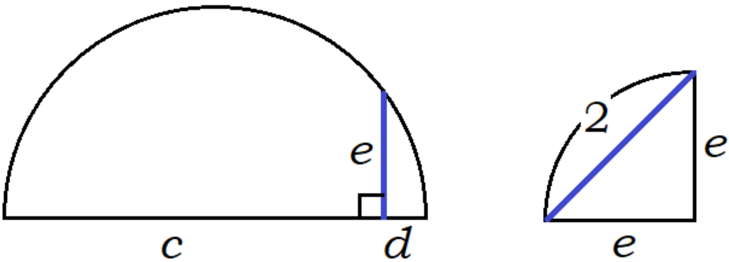
$$|c| = \sqrt{19} + \sqrt{21}, \quad |d| = \sqrt{21} - \sqrt{19},$$

тогда

$$\sqrt{|c| \cdot |d|} = \sqrt{21 - 19} = \sqrt{2}.$$

Чтобы построить отрезок такой длины, возьмём окружность с диаметром $|c| + |d|$, и восставим перпендикуляр к нему в точке "стыковки" отрезков:
Имея в распоряжении отрезок длины $|e| = \sqrt{2}$, нетрудно построить отрезок длины 2 и, поделив его пополам, получить единичный отрезок. Далее искомый отрезок можно построить, например, тем же методом, который мы использовали для получения отрезка $|e| = \sqrt{2}$, только взяв окружность диаметром 2022 и разбив его на части 2021 и 1.

▷ **Задача 7.** Найдите натуральные числа m и n, если из четырёх утверждений



1) $m-n$ делится на 3;
2) $m+2n$ – простое число;
3) $m=4n-1$;
4) $m+7$ делится на n;
три истинны, а одно ложно.

Решение:

Заменим, что условия 1) и 3) не могут выполняться одновременно. На самом деле,

$$4n-m=3n+(n-m)=1,$$

и если условие 1) выполняется, то левая часть делится на 3, а правая – нет. С другой стороны, если выполнено условие 3), то

$$m-n=3n-1,$$

то есть не делится на 3.

Т.к. среди условий есть всего одно ложное, можно заключить, что условия 2) и 4) должны быть истинными. Рассмотрим два варианта:

а) Ложно условие 1):

Проверим, существуют ли такие m и n, для которых будут истинны остальные условия. Поставим условие 3) в условие 4):

$$m+7=4n+6\,\vdots\,n\Rightarrow 6\,\vdots\,n,$$

т.е. $n=1,2,3,6$. Нам осталось проверить истинность условия 2):

$$n=1,\,m=3\Rightarrow m+2n=5;$$

$$n = 2,\, m = 7 \Rightarrow m + 2n = 11;$$

$$n = 3,\, m = 11 \Rightarrow m + 2n = 17;$$

$$n = 6,\, m = 23 \Rightarrow m + 2n = 35.$$

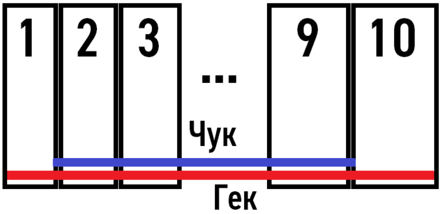
Нам подходят все случаи, кроме последнего.
б) Ложно условие 3):
Из условия 1) $m = n + 3k$. Подставляя в условие 2), получим

$$m + 2n = 3n + 3k \,\vdots\, 3.$$

Единственная ситуация, когда это число всё же будет простым, реализуется при $m = n = 1$. Очевидно, что в этом случае условие 4) также истинно.
Таким образом, мы получили в общей сложности четыре решения.
Ответ: (1;1),(3;1),(7;2),(11;3)

▷ **Задача 8.** На книжной полке у Знайки стоит история Цветочного города в 10 томах, тома идут по порядку слева направо. Толщина первого тома – 2,1 см, второго – 2,2 см, третьего – 2,3 см и т.д., десятого – 3 см. Книжный червяк Чук прогрыз от первой страницы первого тома до последней страницы десятого тома (по прямой линии, перпендикулярно обложке), а его брат Гек прогрыз от первой страницы последнего тома до последней страницы первого тома (по прямой линии, перпендикулярно обложке). Какой червяк проделал больший путь и на сколько? Толщина обложки – 2 мм.
Решение:
С учетом расположения книг путь Чука пролегал через одну обложку первого тома, все тома со второго по девятый, и одну обложку десятого тома. Итого, на пути червяка встретилось 2 обложки и восемь полных томов, то есть

$$2,2 + 2,3 + .. + 2.9 = \frac{2,2 + 2,9}{2} \cdot 8 = 20,4\,\text{см книг.}$$



Длина пути Чука составила

$$l = 20,4 + 0,4 = 20,8\,\text{см}.$$

Гек, в свою очередь, прогрыз все десять томов, не считая двух крайних обложек, а значит, его путь составил

$$\frac{2,1+3}{2} \cdot 10 - 2 \cdot 0,2 = 25,1\,\text{см}.$$

Как видим, путь Гека на 4,7см больше пути Чука.
Ответ: путь Гека оказался на 4,7см больше пути Чука

▷ **Задача 9.** В квадрате 3×3 заполните 9 клеток различными натуральными числами так, чтобы суммы чисел по каждой строке, каждому столбцу и диагоналям квадрата были одинаковыми и равнялись 885.
Решение:
Обозначим суммы по строкам, столбцам и диагонялам за l, тогда

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

сумма всех элементов таблицы будет равна $3l$. Если теперь сложить все строки, все столбцы, две диагонали и повторно вторую строку и второй столбец, то каждый элемент таблицы встретится в этой сумме три раза, а средний элемент – ещё три сверх того:

$$(a_1+a_2+a_3)+2\cdot(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+(a_1+a_4+a_7)+2\cdot(a_2+a_5+a_8)+$$

$$+(a_3 + a_6 + a_9) + (a_1 + a_5 + a_9) + (a_3 + a_5 + a_7) = 3S + 3a_5.$$

Поскольку суммы во всех скобках равны, получаем

$$10l = 3 \cdot 3l + 3a_5 \Rightarrow a_5 = \frac{l}{3}.$$

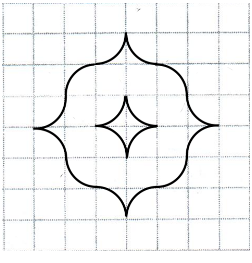
Если оставить первые два элемента произвольными, а остальные найти из условий задачи, мы получим следующую таблицу:

a_1	a_2	$l - a_1 - a_2$
$\frac{4l}{3} - 2a_1 - a_2$	$\frac{l}{3}$	$2a_1 + a_2 - \frac{2l}{3}$
$a_1 + a_2 - \frac{l}{3}$	$\frac{2l}{3} - a_2$	$\frac{2l}{3} - a_1$

Теперь можно придать первым двум элементам любые значения, при условии, что остальные элементы таблицы останутся неотрицательными. Например

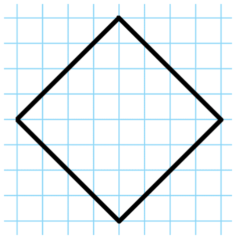
250	100	535
580	295	10
55	490	340

▷ **Задача 10.** На клетчатой бумаге нарисована фигура, граница которой состоит из дуг окружностей радиуса 1. На этой клетчатой бумаге укажите вершины квадрата, площадь которого в 2 раза больше площади указанной фигуры.



Решение:

Площадь нарисованной фигуры равна $S = 8 + 8 = 12$ клеток (8 полноценных и 8 собранных из четверти окружности и "лунки"), значит, площадь искомого квадрата равна $16 \cdot 2 = 32$. На клетчатой бумаге такой квадрат изображается следующим образом.



9 класс

▷ **Задача 1.** Решите уравнение

$$\sqrt{x + 20\sqrt{x + 20\sqrt{x + ... + 20\sqrt{x + 20\sqrt{21x}}}}} = x$$

если известно, что в записи левой части корень квадратный встречается 1921 раз.

Решение:

Сравним значения левой и правой частей уравнения:

Если $0 < x < 21$:

$$x < \sqrt{21x}$$

$$21x = x + 20x < x + 20\sqrt{21x} \Rightarrow \sqrt{21x} < \sqrt{x + 20\sqrt{21x}}$$

$$\sqrt{x + 20\sqrt{21x}} < \sqrt{x + 20\sqrt{x + 20\sqrt{21x}}} < \cdots < \sqrt{x + 20\sqrt{x + \cdots + 20\sqrt{x}}}$$

т.е. правая часть меньше левой и решений на этом интервале нет. Аналогично, при $x > 21$:

$$x > \sqrt{21x} > \sqrt{x + 20\sqrt{21x}} > \cdots > \sqrt{x + 20\sqrt{x + \cdots + 20\sqrt{x + \sqrt{21x}}}}$$

Осталось проверить $x = 0$ и $x = 21$ и убедиться, что при этих значениях равенство верно.

Ответ: $x = 0$, $x = 21$

▷ **Задача 2.** Найдите приведенный многочлен с целыми коэффициентами наименьшей степени, имеющий корень

$$a = \frac{2}{\sqrt{4 - 3\sqrt[4]{5} + 2\sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{125}}}$$

Решение:

Обозначим для удобства $\alpha = \sqrt[4]{5}$ и преобразуем следующую дробь, умножая, где требуется, на сопряжённые выражения и помня о том, что $\alpha^4 = 5$:

$$b = \frac{1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4} = \frac{1}{(\alpha^3 + 3\alpha) - (2\alpha^2 + 4)} = \frac{(\alpha^3 + 3\alpha) + (2\alpha}{\alpha^6 + 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 4\alpha^4}$$

$$= \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{\alpha^6 + 2\alpha^4 - 7\alpha^2 - 16} = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4}{5\alpha^2 + 10 - 7\alpha^2 - 16} = \frac{(\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha + 4)(\alpha^2}{(-2\alpha^2 - 6)(\alpha^2 - 3)}$$

$$= \frac{\alpha^5 - 3\alpha^3 + 2\alpha^4 - 6\alpha^2 + 3\alpha^3 - 9\alpha + 4\alpha^2 - 12}{-2(\alpha^4 - 9)} = \frac{\alpha^5 + 2\alpha^4 - 2\alpha^2 - 9\alpha -}{8}$$

$$= \frac{-2\alpha^2 - 4\alpha - 2}{8} = -\frac{(\alpha + 1)^2}{4} = -\left(\frac{\alpha + 1}{2}\right)^2.$$

Искомый корень

$$a = 2\sqrt{-\frac{1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 4}} = 2\sqrt{-b} = \alpha + 1 = 1 + \sqrt[4]{5}$$

Построение многочлена начнём с квадратного трехчлена, для чего воспользвемся теоремой Виета:

$$x_1 = 1 + \sqrt[4]{5}, x_2 = 1 - \sqrt[4]{5} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = 1 - \sqrt{5}$$

$$p_1(x) = x^2 - 2x + 1 - \sqrt{5}$$

Чтобы окончательно избавиться от иррациональности в коэффициентах, осталось домножить этот многочлен на многочлен

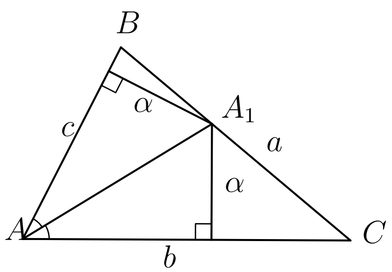
$$p_2(x) = x^2 - 2x + 1 + \sqrt{5}:$$

$$p(x) = p_1(x)p_2(x) = (x-1)^4 - 5 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 4$$

Ответ: $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 4$

▷ **Задача 3.** Дан $\triangle ABC : h_a, h_b, h_c$ – высоты треугольника, опущенные из вершин A, B, C; α, β, γ – расстояния от оснований биссектрис углов A, B, C до его сторон. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{\alpha}{h_\alpha} + \frac{\beta}{h_\beta} + \frac{\gamma}{h_\gamma}$.

Решение:



AA_1 – биссектриса угла A, α – расстояние от A_1 до сторон AB и AC. Тогда площадь треугольника можно представить как

$$S_{ABC} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C},$$

и вычислить каждую из площадь как полупроизведение соответсвующих основания и высоты:

$$\frac{ah_a}{2} = \frac{c\alpha}{2} + \frac{b\alpha}{2},$$

откуда получаем

$$\frac{\alpha}{h_a} = \frac{a}{b+c}.$$

Аналогично

$$\frac{\beta}{h_b} = \frac{b}{a+c}, \ \frac{\gamma}{h_c} = \frac{c}{a+b}.$$

Докажем теперь, что

$$\frac{\alpha}{h_a} + \frac{\beta}{h_b} + \frac{\gamma}{h_c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Действительно, если ввести новые переменные

$$\begin{cases} x = b+c \\ y = a+c \\ z = a+b, \end{cases}$$

левая часть неравенства перепишется в виде

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\left[\frac{y+z-x}{x} + \frac{z+x-y}{y} + \frac{x+y-z}{z}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) - 3\right] \geq \frac{1}{2}\left[2+2+2-3\right] = \frac{3}{2}.$$

Равенство здесь, очевидно, достигается при $a = b = c$, а значит

$$\max\left(\frac{\alpha}{h_a} + \frac{\beta}{h_b} + \frac{\gamma}{h_c}\right) = \frac{3}{2}$$

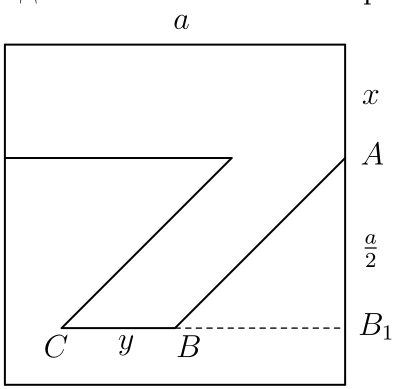
Ответ: $\frac{3}{2}$

$\triangleright$ **Задача 4.** Данный квадрат разделить ломаной на две части одинаковой площади таким образом, чтобы каждое звено ломаной было параллельно стороне или диагонали квадрата, причём сумма длин звеньев, параллельных сторонам, равнялась бы длине стороны, а сумма длин звеньев, параллельных диагоналям, равнялась бы длине диагонали. Какое наименьшее число звеньев может иметь такая ломаная?

Решение:

У любой ломаной, удовлетворяющей условию задачи, звеньев каждого типа (параллельных сторонам и параллельных диагоналям) должно быть как минимум два. На самом деле, если, например, у ломаной ровно одно звено параллельно стороне, это означает, что длина этого звена равна длине стороны и его концы лежат на противоположных сторонах квадрата, то есть он уже разделён на две части, и у ломаной нет звеньев, параллельных диагоналям.

Осталось продемонстрировать, что по двух звеньев каждого типа будет достаточно. Это иллюстрирует, например, такое разбиение:



Здесь площадь верхней части равна $ax + \frac{ay}{2}$, а площадь нижней части равна $a(a-x)-\frac{ay}{2}$. Значения x и y следует подобрать таким образом, чтобы эти площади были равны, т.е.

$$ax + \frac{ay}{2} = a^2 - ax - \frac{ay}{2} \Rightarrow 2x + y = a$$

▷ **Задача 5.** Найдите сумму несократимых дробей со знаменателем 401, заключенных между натуральными числами 1921 и 2021.

Решение:

Распишем искомую сумму, выделив целую часть каждой дроби:

$$\left(1921+\frac{1}{401}\right)+\left(1921+\frac{2}{401}\right)+\dots+\left(1921+\frac{400}{401}\right)+$$

$$\left(1922+\frac{1}{401}\right)+\left(1922+\frac{2}{402}\right)+\dots+\left(1922+\frac{400}{401}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(2020+\frac{1}{401}\right)+\left(2020+\frac{2}{401}\right)+\dots+\left(2020+\frac{400}{401}\right)=$$

$$=(1921+1922+\dots+2020)\cdot 400+\left(\frac{1}{401}+\frac{2}{401}+\dots+\frac{400}{401}\right)\cdot 100=$$

$$=\frac{1921+2020}{2}\cdot 100\cdot 400+\frac{100}{401}\cdot\frac{401}{2}\cdot 400=$$

$$=3941\cdot 20000+20000=3942\cdot 20000=78840000$$

Ответ: 78840000

$\triangleright$ **Задача 6.** В первой коробке находились красные шары, а во второй – синие, причем число красных шаров составляло $\frac{15}{19}$ от числа синих шаров. Когда из коробок удалили $\frac{3}{7}$ красных шаров и $\frac{2}{5}$ синих, то в первой коробке осталось менее 1921 шаров, а во второй – более 2021 шаров. Сколько шаров было первоначально в каждой коробке?

Решение:

Пусть x и y – число соответственно красных и синих шаров, тогда по условию,

$$x=\frac{15}{19}y,\qquad \frac{4}{7}x=\frac{15\cdot 4}{19\cdot 7}y<1921,\qquad \frac{3}{5}y>2021.$$

Решая эти неравенства с учетом того, что y – натуральное число, получаем

$$3369\le y\le 4257.$$

При этом, поскольку дробного количества шаров ни в какой момент получиться не может, необходимо, чтобы y делилось на 5,

7 и 19, т.е. $y \vdots 665$. В указанных пределах есть ровно одно такое число $y = 6 \cdot 665 = 3990$, откуда находим $x = 3150$.
Ответ: 3150 красных и 3990 синих шаров

$\triangleright$ **Задача 7.** Найдите наименьшее число, которое имеет ровно 1921 делитель.
Решение:
Рассмотрим разложение произвольного числа на простые делители:

$$N = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$$

Поскольку все делители числа N состоят из тех же простых чисел, и степень каждого из них может принимать любое значение от 0 до β_i, общее количество делителей выражается формулой:

$$D = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \dots (\beta_n + 1)$$

По условию задачи

$$D = 1921 = 17 \cdot 113,$$

откуда следует, что искомое число имеет не более двух различных простых делителей. Поскольку нам требуется найти наименьшее такое число, в качестве этих простых делителей мы будем брать наименьшие: 2 и 3. Если делитель один, то $\beta_1 = 1921$, а само число $N = 2^{1920}$. Если же делителей два, то $\beta_1 = 16, \beta_2 = 112$, а число имеет вид $N = 2^{16} \cdot 3^{112}$ или $N = 2^{112} \cdot 3^{16}$. Сравнив значения этих трёх чисел, окончательно находим, что наименьшее из них равно $2^{112} \cdot 3^{16}$.
Ответ: $2^{112} \cdot 3^{16}$

$\triangleright$ **Задача 8.** Найдите наименьшее число n такое, что в любом множестве из n натуральных чисел найдутся по крайней мере два числа, сумма или разность которых делится на 7.
Решение:
Рассмотрим множество $\{4; 5; 6; 7\}$

$$4 + 5 = 9, 5 + 6 = 11, 5 - 4 = 1, 6 - 5 = 1$$

$$4+6=10, 5+7=12, 6-4=2, 7-5=2$$

$$4+7=11, 6+7=13, 7-4=3, 7-6=3$$

Сумма и разность любых двух числе не делится на 7. Искомое число $n > 4$. Докажем, что число 5 удовлетворяет условию задачи.

Пусть множество A состоит из 5 натуральных чисел. Если хотя бы два из этих чисел дают одинаковые остатки при делении на 7, то разность этих чисел делится на 7, и поэтому остается смотреть случай, когда все числа из множестве A дают при делении на 7 различные остатки. Поскольку делимость суммы двух чисел на 7 зависит только от остатков, которые дают эти числа при делении на 7, то каждое число в множестве A можно заменить его остатком и считать, таким образом, что A состоит из 5 чисел, взятых из множества $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Любое подмножество из 5 элементов это множества содержит по крайней мере два элемента с суммой равной нулю. Таким образом, и в исходном множестве A существуют два числа, сумма которых делится на 7.

Ответ: $n = 5$.

$\triangleright$ **Задача 9.** Найдите сумму всех целых решений неравенства:

$$\frac{x^2+12x+4}{x+2} \leqslant 6\sqrt{x}$$

Решение:

Т.к. $x \geq 0$, то $x+2 > 0$ и в неравенстве

$$\frac{x^2+12x-6\sqrt{x}(x+2)+4}{x+2} \leq 0$$

можно отбросить знаменатель. Свернём полный квадрат и разложим на множители:

$$(x+2)^2+8x-6(x+2)\sqrt{x} \leq 0$$

$$\left(x+2-2\sqrt{x}\right)\left(x+2-4\sqrt{x}\right) \leq 0$$

$$\left((\sqrt{x}-1)^2+1\right)\left((\sqrt{x}-2)^2-2\right) \le 0$$

Здесь первая скобка всегда положительна, поэтому её также можно отбросить.

$$(\sqrt{x}-2)^2 \le 2 \Rightarrow |\sqrt{x}-2| \le \sqrt{2}$$

$$2-\sqrt{2} \le \sqrt{x} \le 2+\sqrt{2}$$

$$6-4\sqrt{2} \le x \le 6+4\sqrt{2}$$

Т.к.

$$0 < 6-4\sqrt{2} < 1, \quad 11 < 6+4\sqrt{2} < 12,$$

все целые решения неравенства находятся между числами 1 и 11, а их сумма

$$1+2+3+\cdots+11 = \frac{12}{2}\cdot 11 = 66$$

Ответ: 66.

▷ **Задача 10.** Пусть $A_n^2 = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 8 + \cdots + n(3n-1)$. Известно, что A_n есть натуральное трехзначное число. Найдите сумму всех таких A_n.

Решение:

Каждое слагаемое в представлении A_n имеет вид $k(3k-1) = 3k^2-k$, поэтому

$$A_n^2 = 3\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right) - (1+2+\cdots+n)$$

Нетрудно доказать (например, с помощью метода математической индукции), что

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

поэтому

$$A_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\cdot 2n = n^2(n+1).$$

$$A_n = n\sqrt{n+1}$$

n	15	24	35	48	63	80	99	120
$n+1$	16	25	36	49	64	81	100	121
$\sqrt{n+1}$	4	5	6	7	8	9	10	11
A_n	60	120	210	336	504	720	990	1320

Осталось найти все такие n, что число $n+1$ является квадратом, и $100 \leq A_n \leq 999$. Выпишем все подходящие n и найдём сумму соответствующих A_n:

$$120 + 210 + 336 + 504 + 720 + 990 = 2880$$

Ответ: 2880.

10 класс

▷ **Задача 1.** На какую цифру оканчивается сумма 2021-х степеней всех четырёхзначных чисел, получающихся из числа 1921 перестановкой его цифр?
Решение:
Таких чисел 12: 1921, 1291, 1192, 1129, 1912, 1219, 9211, 9121, 9112, 2911, 2191, 2119. На 1 оканчивается 6 чисел, на 2 – 3 числа, на 9 – 3 числа.
Рассмотрим остатки по модулю 10 для 2021-х степеней этих чисел:

$$2^5 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{2021} \equiv 2^{5\cdot 404}\cdot 2 \equiv 2^{5\cdot 80}\cdot 2^5 \equiv 2^{16}\cdot 2 \equiv 2^3\cdot 2^2 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$9^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2021} \equiv 9^{2\cdot 1010}\cdot 9 \equiv 9 \pmod{10}$$

Тогда сумма всех чисел

$$1921^{2021} + ... + 2119^{2021} \equiv 6\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 9 = 6 + 6 + 27 = 5 \pmod{10})$$

Ответ: 5.

▷ **Задача 2.** Пусть $A = \{1, 2, ..., n\}$, $B = \{1, 2, ..., k\}$. Сколько существует подмножеств $C \subset A$ таких, что $C \cap B \neq \varnothing$?

Решение:
Множество, состоящее из m элементов, имеет 2^m подмножеств, так как для каждого из m элементов есть только две возможности – входить или не входить в подмножество. Отсюда следует, что при $n \leqslant k$ любое непустое подмножество множества A удовлетворяет условию, и таких подмножеств $2^n - 1$. При $n > k$ удобно сначала подсчитать число подмножеств $C \subset A$, таких, что $C \cap B = \varnothing$. Такие подмножества C состоят из элементов $k+1, k+2, \cdots, n$, и поэтому их имеется 2^{n-k} (включая пустое подмножество). Поскольку A имеет всего 2^n подмножеств, то условию задачи удовлетворяют остальные $2^n - 2^{n-k}$ подмножеств.
Итак, если $n \leqslant k$, то число искомых подмножеств равно $2^n - 1$, а при $n > k$ равно $2^n - 2^{n-k}$.
Ответ: $2^n - 2^{n-k}$ **при** $n > k$, $2^n - 1$ **при** $n \leqslant k$

▷ **Задача 3.** Дан отрезок длиной 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.
Решение:
Представим длину отрезка в виде

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = a + b\sqrt{5}$$

где a и b – рациональные числа. Тогда

$$a^3 + 3\sqrt{5}a^2b + 15ab^2 + 5\sqrt{5}b^3 = 2 + \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} a^3 + 15b^2a = 2 \\ 3a^2b + 5b^3 = 1 \end{cases}$$

Умножим вторую строку на 2 и вычтем из первой:

$$a^3 + 15b^2a - 6a^2b - 10b^3 = 0$$

Разделим всё уравнение на b^3 и заменим $\frac{a}{b} = t$:

$$t^3 - 6t^2 + 15t - 10 = 0$$

Заметим, что у этого уравнения есть корень $t = 1$, поэтому подставим в систему $a = b$. Получим

$$8a^3 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} = b.$$

Таким образом,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Построить отрезок длиной $\sqrt{5}$ можно, например, с помощью прямоугольного треугольника с длиной катетов 1 и 2. После этого останется прибавить к нему отрезок длины 1 и построить середину полученного отрезка. Все эти построения, очевидно, несложно провести с помощью циркуля и линейки.

$\triangleright$ **Задача 4.** Сколько натуральных решений имеет система неравенств

$$1921 \leqslant a_{2000} \leqslant 2021,$$

где $a_k = \frac{n}{2+a_{k-1}}, a_1 = \frac{n}{1+\sqrt{1+n}}$.

Решение:

Рассмотрим члены заданной последовательности a_k :

$$a_2 = \frac{n}{2+a_1} = \frac{n}{2+\frac{n}{1+\sqrt{n+1}}} = \frac{n\left(1+\sqrt{n+1}\right)}{2+2\sqrt{n+1}+n} =$$

$$= \frac{n\left(1+\sqrt{n+1}\right)}{1+2\sqrt{n+1}+n+1} = \frac{n\left(1+\sqrt{n+1}\right)}{\left(1+\sqrt{n+1}\right)^2} = a_1$$

Тогда $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{2000}$. Преобразуем эту дробь:

$$\frac{n}{1+\sqrt{1+n}} = \frac{n+1-1}{1+\sqrt{1+n}} = \frac{\left(\sqrt{n+1}+1\right)\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{1+\sqrt{1+n}} = \sqrt{n+1}-1,$$

и нам необходимо решить двойное неравенство

$$1921 \leqslant \sqrt{n+1} - 1 \leqslant 2021$$

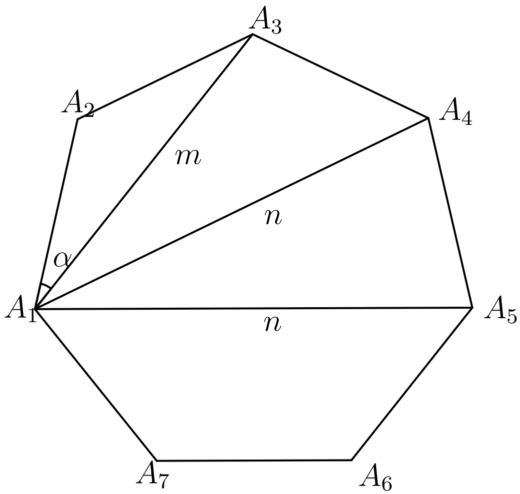
$$1922 \leqslant \sqrt{1+n} \leqslant 2022$$
$$1922^2-1 \leqslant n \leqslant 2022^2-1$$

Количество натуральных чисел, удовлетворяющих этому неравенству, равно

$$2022^2-1-(1922^2-1)+1 = 2022^2-1922^2+1 = 100\cdot 3944+1 = 394401$$

Ответ: 394401

$\triangleright$ **Задача 5.** Дан правильный семиугольник с последовательными вершинами
$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Вычислить, чему равно выражение $\cos\alpha\,(\cos\alpha-1)\,(2\,\mathrm{c}$
где $\alpha = \angle A_2A_1A_3$
Решение:



Без ограничения общности можем считать, что $|A_1A_2| = 1$. Введём обозначения: $|A_1A_3| = m$, $|A_1A_4| = n$.
Применим теорему Птолемея к четырёхугольнику $A_1A_2A_3A_4$:

$$|A_1A_3|\cdot|A_2A_4| = |A_1A_2|\cdot|A_3A_4| + |A_1A_4|\cdot|A_2A_3|$$

Отсюда
$$m^2 = n+1, \tag{1}$$

т.к. $|A_2A_4| = |A_1A_3| = m$.
Применим теорему Птолемея к четырёхугольнику $A_1A_3A_4A_5$:

$$|A_1A_4| \cdot |A_3A_5| = |A_3A_4| \cdot |A_1A_5| + |A_1A_3| \cdot |A_4A_5|.$$

Т.к. $|A_1A_5| = |A_1A_4| = n$, $|A_3A_5| = |A_1A_3| = m$, имеем:

$$mn = m + n. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), получаем окончательно:

$$m^3 - m = m^2 + m - 1$$

$$m^3 - m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$m(m^2 - m - 2) = -1$$

$$m(m-2)(m+1) = -1 \tag{3}$$

Из треугольника $A_1A_2A_3$ находим

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}|A_1A_3|}{|A_1A_2|} = \frac{m}{2}$$

Подставляя это соотношение в (3), получим:

$$2\cos\alpha(2\cos\alpha - 2)(2\cos\alpha + 1) = -1$$

$$\cos\alpha(\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + 1) = -\frac{1}{4}$$

А это и есть искомая величина.
Ответ: $-\frac{1}{4}$

$\triangleright$ **Задача 6.** Последовательность a_n имеет вид

$$1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, \ldots$$

где за единицей следует два последовательных чётных числа, потом три последовательных нечётных, потом четыре чётных и т.д. Найдите $a_{2021} - a_{1921}$.

Первое решение:
Данная последовательность получается последовательным приписыванием конечных прогрессий из 1, 2, 3 и т.д. членов с разностью 2, в которых первый член каждой прогрессии (начиная со второй) на 1 больше последнего члена предыдущей прогрессии. Докажем по индукции, что последний член k-ой прогрессии равен k^2: для $k = 1$ это очевидно, а прогрессия с номером $k+1$ начинается, по предположению индукции, с числа $k^2 + 1$, и поэтому её член с номером $k+1$ равен $k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2$.
Если k – номер прогрессии, в которой находится n-й член последовательности, то в предыдущих прогрессиях содержится вместе $1 + 2 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ членов, так что k – наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $\frac{k(k-1)}{2} \leqslant n$.
Найдём номера прогрессий, в которых находятся a_{1921} и a_{2021}.
Для $n = 1921$ $k = 62$, при этом первый член 62-й прогрессии имеет "сквозной" номер $\frac{62 \cdot 61}{2} + 1 = 1892$, а сам он равен $a_{1892} = 61^2 + 1 = 3722$.
В пределах этой прогрессии 1921-й член будет 30-м по порядку, а значит, будет равен

$$a_{1921} = 3722 + 2 \cdot 29 = 3780.$$

Для $n = 2021$ $k = 64$, при этом первый член 64-й прогрессии имеет "сквозной" номер $\frac{64 \cdot 63}{2} + 1 = 2017$, а сам он равен $a_{2017} = 63^2 + 1 = 3970$.
В пределах этой прогрессии 2021-й член будет 5-м по порядку, а значит, будет равен

$$a_{2021} = 3970 + 2 \cdot 4 = 3978.$$

Наконец, находим искомую разность:

$$a_{2021} - a_{1921} = 3978 - 3780 = 198$$

Второе решение:
Можно заметить, что для поиска разности членов последовательности не обязательно знать их значения, достаточно определить,

в какой прогрессии находится каждый из них.
В нашей последовательности следующий член больше предыдущего на 2 всегда кроме тех случаев, когда происходит смена прогрессий (здесь следующий член больше предыдущего на 1). Тогда для любых двух членов последовательности можно сказать, что

$$a_n - a_m = 2(n-m) - (k_n - k_m),$$

где k_n и k_m – номера прогрессий, которым принадлежат соответствующие члены. Тогда для нашей задачи

$$a_{2021} - a_{1921} = 2(2021 - 1921) - (64 - 62) = 200 - 2 = 198.$$

Ответ: 198

▷ **Задача 7.** Найдите сумму всех целых решений уравнения

$$\left(\sqrt{8}\cos 25^\circ - 1\right)\mathrm{tg}x^\circ = \left(\sqrt{8}\sin 25^\circ - 1\right)\mathrm{tg}3x^\circ,$$

принадлежащих отрезку $[-1921^\circ; 2021^\circ]$.
Решение:

$$\mathrm{tg}3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \mathrm{tg}x \cdot \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1}.$$

Подставив это соотношение в исходное уравнение, сразу получим одно решение:

$$\mathrm{tg}x = 0,\ x = 180^\circ n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Сократив $\mathrm{tg}x$, получим:

$$\frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1} = \frac{2\sqrt{2}\cos 25^\circ - 1}{2\sqrt{2}\sin 25^\circ - 1}$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ + \sin 25^\circ) - 1}{2\sqrt{2}(\cos 25^\circ - \sin 25^\circ)}$$

Т.к.

$$\cos 25^\circ + \sin 25^\circ = \cos 25^\circ + \cos 65^\circ = 2\cos 45^\circ \cos 20^\circ,$$

$$\cos 25^\circ - \sin 25^\circ = \cos 25^\circ - \cos 65^\circ = 2\sin 45^\circ \sin 20^\circ,$$

имеем

$$\cos 2x = \frac{2\cos 20^\circ - 1}{4\sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 40^\circ \sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ} = \cos 50^\circ$$

Откуда окончательно получаем

$$x = \pm 25^\circ + 180^\circ k,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Выберем среди всех корней те, которые принадлежат указанному в условии отрезку:

$$-1921^\circ \leqslant 180^\circ n \leqslant 2021^\circ \Rightarrow -10 \leqslant n \leqslant 11$$

При сложении корней останется, фактически, только тот, который соответствует $n = 11$, т.е. $S_1 = 1980$.

$$-1921^\circ \leqslant 25^\circ + 180^\circ k \leqslant 2021^\circ \Rightarrow -10 \leqslant k \leqslant 11$$

$$-1921^\circ \leqslant -25^\circ + 180^\circ k \leqslant 2021^\circ \Rightarrow -10 \leqslant k \leqslant 11,$$

значит $S_2 = S_3 = 1980$. Общая сумма корней равна $3S_1 = 5940$.
Ответ: 5940

$\triangleright$ **Задача 8.** Пусть m_a, m_b – длины медиан, проведённых к катетам прямоугольного треугольника, а r – радиус вписанного круга. Найдите все значения, которые может принимать отношение $d = \frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2}$.
Решение:
Известно, что

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4},$$

поэтому

$$m_a^2 + m_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{4} = \frac{5c^2}{4}.$$

Легко показать, что для прямоугольного треугольника $r = p - c$, где p – его полупериметр. Тогда

$$\frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} = \frac{4r^2}{5c^2} = \frac{4(p-c)^2}{5c^2} = \frac{(a+b-c)^2}{5c^2}$$

Оценим частное $\frac{a+b-c}{c}$. На основании неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ имеем $\frac{a+b}{2} \leqslant \frac{c}{\sqrt{2}}$, или $a + b \leqslant c\sqrt{2}$.
Значит,

$$\frac{a+b-c}{c} \leqslant \frac{c\sqrt{2}-c}{c} = \sqrt{2} - 1.$$

Поскольку левая и правая части последнего неравенства положительны, то $\frac{(a+b-c)^2}{c^2} \leqslant 3 - \sqrt{8}$, откуда и следует, что

$$d = \frac{r^2}{m_a^2 + m_b^2} \leqslant \frac{3-\sqrt{8}}{5} \Rightarrow d \in \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{5}\right]$$

Ответ: $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{5}\right]$

▷ **Задача 9.** Найдите все натуральные решения уравнения

$$19x^2y^2 + 21\left(x^2y + 1\right) = 19x\left(x^2y + 1\right)$$

Решение:
Преобразуем исходное равенство к следующему виду:

$$\frac{21}{19} = \frac{x^3y + x - x^2y^2}{x^2y + 1} = \frac{x(x^2y+1) - y(x^2y+1) + y}{x^2y + 1} = x - y + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{y}}$$

Поскольку $x^2 + \frac{1}{y} > 1$, а x и y – натуральные числа, $x - y$ является целой частью дроби $\frac{21}{19}$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + \frac{1}{y} = \frac{19}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ y^3 + 2y^2 + y + 1 = \frac{19}{2}y \end{cases}$$

$$2y^3 - 15y^2 + 2y + 2 = 0$$

$$(y-2)\left(2y^2 + 8y^2 - 1\right) = 0$$

Оставшийся квадратный трехчлен не имеет целых корней, поэтому получаем единственное решение $x = 3, y = 2$.
Ответ: $(3; 2)$

$\triangleright$ **Задача 10.** Робот записывает квадраты всех натуральных чисел и промежутка $[a, b]$ последовательно в случайном порядке. Какова вероятность того, что полученное многозначное число является точным квадратом, если: 1) $a = 3$, $b = 4$, 2) $a = 1921$, $b = 2021$.
Решение:
а) При $a = 3$, $b = 4$ робот может записать всего два числа: 916 и 169, одно из которых является точным квадратом. Значит, вероятность благоприятного исхода

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

б) Число, которое получается после совершённой роботом операции, можно записать в виде

$$N = k_1^2 + k_2^2 \cdot 10^{t_1} + k_3^2 \cdot 10^{t_2} + ... + k_{1001}^2 \cdot 10^{t_{1000}},$$

где k_i пробегает всё множество чисел от 1921 до 2021.

$$10^t \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 3) \quad \forall t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$N \equiv k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + ... + k_{1001}^2 \,(\mathrm{mod}\ 3)$$

Определим, какие остатки при делении на 3 может давать квадрат натурального числа:

$$(3k)^2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 3), \quad (3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 3)$$

Из чисел, принадлежащих отрезку $[1921; 2021]$ ровно 33 числа делятся на 3. Значит, продолжая сравнение для числа N, получим:

$$N \equiv 33 \cdot 0 + 68 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 3$$

Но, как мы показали выше, полный квадрат не может иметь остаток 2 при делении на 3, значит, записанное роботом число не может быть полным квадратом. Таким образом, вероятность благоприятного исхода

$$P(A) = \frac{0}{101!} = 0$$

т.к. количество всевозможных случаев 101! – конечное число.
Ответ: а) $\frac{1}{2}$; б) 0.

11 класс

▷ **Задача 1.** Найдите среднее арифметическое всех корней уравнения

$$2\log_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3} = \log_2 \cos\frac{\pi x}{3},$$

принадлежащих отрезку $[1921; 2021]$.
Решение:
Перенесём всё в левую часть и рассмотрим функцию

$$f(t) = 2\log_3 \operatorname{ctg} t - \log_2 \cos t,$$

где $t = \frac{\pi x}{3}$. С учётом ограничений, мы рассматриваем только значения $t \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$. Найдём её производную и сравним с нулём:

$$f' = -\frac{2}{\ln 3 \operatorname{ctg} t} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} + \frac{\sin t}{\ln 2 \cos t} = \frac{\ln 3 \sin^2 t - 2\ln 2}{\ln 2 \ln 3 \sin t \cos t} < 0$$

т.к. области определения знаменатель положителен, а $\ln 3 < 2\ln 2 = \ln 4$. Значит, функция $f(t)$ убывает и уравнение $f(t) = 0$ имеет не

более одного решения.
Нетрудно убедиться, что искомое $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, и тогда

$$x = 1 + 6n, n \in \mathbb{Z}$$

Найдём корни, которые попадают в указанный в условии промежуток:

$$1921 \leqslant 1 + 6n \leqslant 2021$$

$$320 \leqslant n \leqslant 336$$

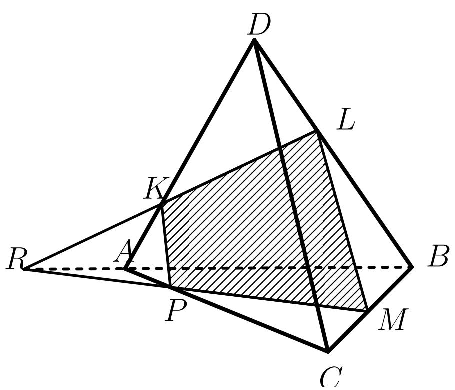
$$k = 320, 321, ..., 336$$

Т.к. решения образуют арифметическую прогрессию, а для нахождения среднего арифметического их сумму необходимо поделить на количество членов, нам достаточно найти среднее арифметическое первого и последнего:

$$S = \frac{320 + 336}{2} = 328$$

Ответ: 328.

▷ **Задача 2.** В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M принадлежат рёбрам AD, DB и BC соответственно, причём $|AK| : |KD| = 2 : 3$, $|DL| : |LB| = 3 : 4$, $|BM| : |MC| = 4 : 5$. Через точки KLM проведена плоскость, которая делит тетраэдр на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.
Первое решение:



Построим точку P пересечения плоскости $\alpha = (KLM)$ с ребром AC. Для этого продолжим прямую KL до пересечения с прямой AB в точке R, после чего соединим точки R и M. Далее воспользуемся теоремой Менелая, чтобы определить, в каком отношении точка P разбивает отрезок AC.

Для треугольника ADB и секущей KL имеем:

$$1 = \frac{AK}{KD} \cdot \frac{DL}{LB} \cdot \frac{BR}{RA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{BR}{RA} \Rightarrow \frac{BR}{AR} = 2$$

Для треугольника ACB и секущей PM имеем:

$$1 = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BR}{RA} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{2}{5}$$

Плоскость α делит тетраэдр на многогранники $ABKLMP$ и $CDKLMP$. Найдём отношение объёма первого многогранника к объёму тетраэдра, который для краткости обозначим за V.

Имеем:

$$V_{ABKLMP} = V_{LABMP} + V_{LAKP}$$

Найдём сначала отношение объёма четрырёхугольной пирамиды $LABMP$ к объёму исходного тетраэдра. Их основания лежат в одной плоскости и относятся как $\frac{38}{63}$. На самом деле,

$$\frac{S_{\triangle CPM}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{63},$$

и тогда

$$\frac{S_{ABMP}}{S_{\triangle CAB}} = 1 - \frac{S_{\triangle CPM}}{S_{\triangle CAB}} = \frac{38}{63}.$$

Высоты пирамиды $LABMP$ и тетраэдра $DABC$ относятся как $\frac{LB}{DB} = \frac{4}{7}$, а значит, отношение их объемов равно:

$$\frac{V_{LABMP}}{V} = \frac{38}{63} \cdot \frac{4}{7} = \frac{152}{441}$$

Аналогично для тетраэдра $LAKP$, рассматривая фигуры относительно основания ACD, находим, что

$$\frac{S_{\triangle AKP}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35},$$

высоты тетраэдров отосятся $\frac{3}{7}$, и, значит,

$$\frac{V_{LAKP}}{V} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{245}$$

Окончательно получаем

$$V_{KLABMP} = \left(\frac{152}{441} + \frac{12}{245}\right) V = \frac{124}{315} V$$

Объем оставшейся части равен

$$V_{CDKLMP} = \left(1 - \frac{124}{315}\right) V = \frac{191}{315} V$$

и

$$\frac{V_{KLABMP}}{V_{CDKLMP}} = \frac{124}{191}.$$

Второе решение:
Для решения нам потребуется следующая формула:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right),$$

т.е. объем тетраэдра можно найти через смешанное произведение векторов, исходящих из общей вершины. Эта формула позволяет легко находить соотношение объемов тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, если известны отношения их сторон. Воспользуемся ранее приведёнными рассуждениями относительно площадей оснований и отношения высот, чтобы определить объем тетраэдра $RLMB$:

$$\frac{V_{RLMB}}{V} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{1} = \frac{32}{63}.$$

А теперь найдём объёмов тетраэдров $RKPA$ и $RLMB$:

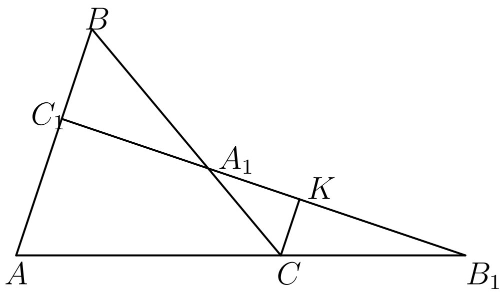
$$\frac{V_{RKPA}}{V_{RLMB}} = \frac{RA}{RB} \cdot \frac{RK}{RL} \cdot \frac{RP}{RM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{40}.$$

Здесь, как и раньше, все недостающие отношения отрезков опре-дедляются из теоремы Менелая. Тогда

$$V_{KLABMP} = V_{RLMB} - V_{RKPA} = \frac{31}{40}V_{RLMB} = \frac{124}{315}V.$$

Справка:

Теорема Менелая



$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

$$CK \parallel AB$$

Из $\triangle AC_1B_1 \sim \triangle CKB_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{CK} = \frac{B_1A}{B_1C} \Rightarrow CK = \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A}$

$$\triangle BC_1A_1 \sim \triangle CKA_1 \Rightarrow \frac{C_1B}{CK} = \frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow CK = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1 \cdot B_1C}{B_1A} = \frac{C_1B \cdot A_1C}{BA_1} \Rightarrow \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

Ответ: $\frac{124}{191}$

$\triangleright$ **Задача 3.** В последованности цифр 19213... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности: а) набор цифр 2021, б) вторично набор 1921, в) набор 6391?

Решение: В данной последовательности каждую чётную цифру заменим нулём, а нечётную единицей

$$19213510 \to \underbrace{11011}\underbrace{11011}\underbrace{11011}\cdots$$

а) в последовательности набор первых пять цифр 11011 повторяется периодически. Набор 2021 соответсвует набору 0001, но три нуля в данном наборе не встречается.

б) имеется лишь конечное число наборов четырёхзначных чисел, поэтому если разбить цифры нашей бесконечной последовательности на группы по четыре, обязательно встретятся два набора из одинаковых четырёх подряд идущих цифр:

$$1921\cdots\cdots\underbrace{abcd}_{M}\cdots\cdots\underbrace{abcd}_{N}$$

Но поскольку следующая цифра определяется по четырём предыдущим однозначно, правее набора N начнётся повторение значений, т.е. как минимум начиная с набора M последовательность цифр является периодической с периодом, равным длине промежутка от M до N.

С другой стороны, по условию задачи для каждого набора $\overline{x_1x_2x_3x_4}$ следующая цифра определятся формулой $x_5 + 10m = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, а значит, по x_2, x_3, x_4, x_5 однозначно восстанавливается x_1. Поэтому данную последовательность, пользуясь тем же правилом, можно неограниченно продлевать влево. Значит, слева от набора M записаны те же цифры, что и слева от набора N. Это означает, что наша последовательность целиком является периодической. Отсюда можно заключить, что если 1921 не встретится на $[M, N]$, то оно не встретилось бы вообще. Что противоречит условию.

в) Воспользуемся вышеописанным соображением о восстановлении предыдущих цифр, чтобы посмотреть, какие цифры предшествуют набору 921 (как было только что доказано, он встретится в нашей последовательности бесконечно много раз).

$$\underbrace{6391}92135109$$

Ответ: а)нет, б)да, в)да

$\triangleright$ **Задача 4.** Какие значения может принимать выражение $\sin 1921\beta + \cos 2021\alpha$, если известно, что

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) \geqslant \frac{3}{2}$$

Решение:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1$$

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1 \geqslant \frac{3}{2}$$

$$2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{2} \leqslant 0$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 0$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 0$$

Это возможно, только если оба квадрата равны нулю:

$$\begin{cases}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0\\ 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta = 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \beta = \alpha - 2\pi n,\\ 2\cos(\alpha-\pi n) - \cos\pi n = 0\end{cases},$$

Т.к. $\cos\pi n = (-1)^n$, $\cos(\alpha-\pi n) = (-1)^n\cos\alpha$, получаем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

$$\beta = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi(k-n) = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m\in\mathbb{Z}$$

Определим, чем равны 1921β и 1921α (при этом все слагаемые, кратные 2π, будем отбрасывать, поскольку они не влияют на значение тригонометрических функций.

$$1921\beta \to \pm 1921 \cdot \frac{\pi}{3} \to \pm\frac{\pi}{3} \pm 640\pi \to \pm\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin 1921\beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2021\alpha \to \pm 2021 \cdot \frac{\pi}{3} \to \pm\frac{5\pi}{3} \pm 672\pi \to \pm\frac{5\pi}{3} \Rightarrow \cos 2021\alpha = \frac{1}{2}$$

Окончательно получаем

$$\sin 1921\beta + \cos 2021\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

$\triangleright$ **Задача 5.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg}, \\ \{a; b\} \cup \{c; d\} = \{e; f; g\}, \end{cases}$$

(здесь $\overline{abc}$ означает позиционную запись числа, т.е. $\overline{xy} = x \cdot 10 + y$, $\overline{xyz} = x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + 1$)

Решение:

Очевидно, a, b, c, d, e, f – цифры. Чтобы не запутаться в решении, стоит чётко помнить, что означает данная система: в записи нашего равенства встречется не более трёх различных цифр, при этом любая цифра, написанная в правой части, должна встретиться и в левой, и наоборот.

Сумма двух двузначных чисел меньше 200, поэтому $e = 1$, а следовательно, и одна из цифр a, b, c, d тоже равна 1.

Пусть $a = 1$, тогда из равенства $\overline{1b} + \overline{cd} = \overline{1fg}$ видно, что $c = 8$ или $c = 9$.

Если $c = 8$, то $\overline{1b} + \overline{8d} = \overline{18g}$ или $\overline{1b} + \overline{8d} = \overline{1f8}$, так как $8 \in \{1, f, g\}$; но первое равенство невозможно, поскольку правая часть больше левой, а из второго равенства следует, что $f = 0$, и тогда либо

$b = 0$, либо $d = 0$, так как $0 \in \{1, b\} \cup \{1, d\}$; но тогда $\overline{1b} + \overline{8d} = 90 + b + d \leqslant 99$, т.е. равенство невозможно.
Если $c = 9$, аналогично предыдущему получаем $\overline{1b} + \overline{9d} = \overline{19g}$ или $\overline{1b} + \overline{9d} = \overline{1f9}$. Первое равенство невозможно, так как правая часть снова больше левой. Из второго равенства следует, что $f = 0$ (т.к. $\overline{1b} + \overline{9d} = 100 + b + d \leqslant 118$) и мы получаем два решения $10 + 99 = 109$ и $19 + 90 = 109$.
Пусть теперь $a \neq 1$, $b = 1$. Тогда из равенства $\overline{a1} + \overline{cd} = \overline{1fg}$ видно, что $d \neq 9$, так как в противном случае $g = 0$, а следовательно, $a = 0$ или $c = 0$ в силу второго равенства данной системы.
Кроме того, $d \neq 1$; в противном случае $\overline{a1} + \overline{c1} = \overline{1f2}$, значит $a = 2$ или $c = 2$, но тогда $21 + 10c + 1 = 100 + 10f + 2 \Rightarrow c = f + 8$ и наборы цифр в левой и правой части не совпадают.
Поскольку $d < 9$, то $\overline{a1} + \overline{cd} = \overline{1d(d+1)}$, так как $d \in \{1, f, d + 1\}$ и $d \neq 1$, но $\{a; 1\} \cup \{c; d\} = \{1; d; d + 1\}$ и $a \neq 1$, поэтому либо $\overline{d1} + \overline{(d+1)d} = \overline{1d(d+1)}$, либо $\overline{(d+1)1} + \overline{dd} = \overline{1d(d+1)}$, либо $\overline{(d+1)1} + \overline{(d+1)d} = \overline{1d(d+1)}$, причём первые два равенства выполняются при условии, что $d + (d + 1) = 10 + d$, т.е. при $d = 9$; но у нас $d < 9$, а третье равенство выполняется при $d = 8$, и мы получаем ещё одно решение: $91 + 98 = 189$.
В случае $c = 1$ или $d = 1$ мы получаем симметричные решения.
Итак, данная система имеет 6 решений: $10 + 99 = 109$, $99 + 10 = 109$, $19 + 90 = 109$, $90 + 19 = 109$, $91 + 98 = 189$, $98 + 91 = 189$.
Ответ: 6.

$\triangleright$ **Задача 6.** Два игрока поочередно в произвольном порядке заменяют коэффициенты многочлена

$$a_1x^{1920} + a_2x^{1919} + ... + a_kx^{1921-k} + ... + a_{1920}x + a_{1921}$$

целыми числами (каждый коэффициент можно заменить ровно один раз). Начинающий игрок побеждает, если все значения многочлена, полученного в конце игры, при целых значениях переменной дают одинаковые остатки при делении на 6; если же это условие не выполнено, побеждает второй игрок. Кто победит при правильной игре?

Решение:
Заметим сначала, что для любого целого k

$$k^3 - k = k(k^2 - 1) = (k - 1)k(k + 1)$$

представляет собой произведение трех последовательных чисел, а значит, делится на 6. То же верно и для $k^4 - k^2$. Поэтому для делимости многочлена

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 \tag{1}$$

на 6 при любом $x \in \mathbb{Z}$ достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$a + c = 0, b + d = 0. \tag{2}$$

Объединяя в данном многочлене слагаемые с 1-го по 4-е, с 5-го по 8-е и т.д., мы представим его в виде суммы a_{1921} и слагаемых вида $x^{4k} f_k(x)$ $(k = 0, ..., 249)$, в которых $f_k(x)$ имеет вид (1).
Поэтому начинающий игрок может придерживаться следующей стратегии: положить a_{1921} равным желаемому остатку, и затем на любом шагу, если его партнёр выбирает коэффициент, входящий в состав $f_k(x)$, то он выбирает свой коэффициент так, чтобы выполнялось соответствующее равенство (2). Тогда многочлен с числовыми коэффициентами, получающийся на каждом шагу, будет отличаться от a_{1921} на слагаемое, делящееся на 6, поэтому при любом $x \in \mathbb{Z}$ результирующий многочлен при делении на 6 будет давать остаток a_{1291}.
Ответ: победит начинающий игрок

$\triangleright$ **Задача 7.** Найти все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющиеся решениями фунционального уравнения

$$f(a + x) - f(a - x) = 4ax, \tag{1}$$

где $a \in R$ – фиксированное число.
Решение: Тождество

$$(a + x)^2 - (a - x)^2 = 4ax$$

показывает, что одним из решений уравнения (1) является функция $f(x) = x^2$.
Если теперь f – произвольное решение уравнения (1), то обозначив через $g(x)$ выражение $f(x) - x^2$ будем иметь равенство

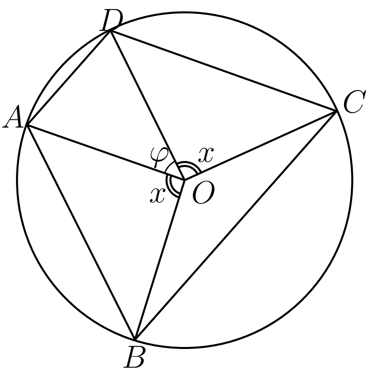
$$g(a+x)-g(a-x) = f(a+x)-(a+x)^2-f(a-x)+(a-x)^2 = 4ax-4ax = 0,$$

т.е. $g(a+x) = g(a-x)$. Из этого равенства следует, что если ввести обозначение $h(x) = g(x+a)$, то $h(x)$ окажется чётной функцией, и следовательно, всякое решение f уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = x^2 + h(x-a), \tag{2}$$

где h – некоторая чётная функция.
Легко проверить, что и обратно, всякая функция, определённая формулой (2), при чётной функци h удовлетворяет уравнению (1), так что формула (2) и описывает общий вид решения уравнения (1). Пример:
$f(x) = x^2 + b(|x-a| + |x+a|)$, b – произвольная постоянная.

$\triangleright$ **Задача 8.** В круге радиуса R проведена хорда AD длиной единица. С помощью циркуля и линейки постройте параллельную ей хорду BC так, чтобы трапеция $ABCD$ имела наибольшую площадь. Рассмотреть случаи: а) $R = 1$; б) $R = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
Решение:



Пусть $ABCD$ – искомая трапеция, вписанная в данный круг с центром O и радиусом R. Концы искомой хорды BC принадлежат большей из дуг с концами A и D. В самом деле, если допустить противное, то можно построить на большей дуге точки B_1 и C_1 такие, что $(BC) \parallel (B_1C_1)$, $|BC| = |B_1C_1|$. В этом случае высота трапеции AB_1C_1D больше высоты трапеции $ABCD$, что противоречит допущению.

Обозначим $\widehat{AOD} = \varphi (\varphi \leqslant 180°)$, $\widehat{AOB} = \widehat{COD} = x$. Тогда $\widehat{BOC} = 360° - (2x + \varphi)$; $S_{ABCD} = S_{AOD} + 2S_{AOB} + S_{BOC} = \frac{1}{2}R^2 \sin\varphi + R^2 \sin x - \frac{1}{2}R^2 \sin(2x+\varphi)$. Исследуем на экстремум функцию $S(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)$. Из того, что $S'(x) = \cos x - \cos(2x+\varphi) = 0$, имеем $2x + \varphi = \pm x + 360°k$, т.е. при $x_1 = 360°k - \varphi$ и $x_2 = \frac{360°k - \varphi}{3}$ функция $S(x)$ имеет экстремум. Так как, согласно условию задачи, $0° < x < \frac{360° - \varphi}{2}$, то трапеция $ABCD$ имеет наибольшую площадь при $x = \frac{360° - \varphi}{3}$. Следовательно, точки B и C делят большую из дуг AD на три равные части.

Построение хорды BC в общем случае нельзя выполнить циркулем и линейкой, так как построение точки B сводится к трисекции дуги AD, а эта задача неразрешима циркулем и линейкой.

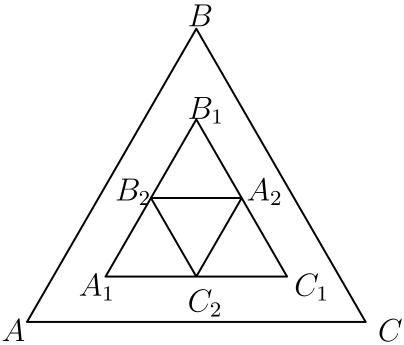
Рассмотрим частный случай, при котором возможно построение: $\varphi = 45°$, $\frac{\varphi}{3} = 15°$, $\sin\frac{\varphi}{3} = \sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ - можно построить с помощью циркуля и линейки.

Дан отрезок $l = 1$ (длина хорды) $\Rightarrow R = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Ответ:

$\triangleright$ **Задача 9.** Внутри правильного треугольника со стороной $4 + 2\sqrt{3}$ находятся 5 непересекающихся окружностей радиуса 1 (допускается касания окружностей между собой и со сторонами треугольника). Доказать, что не меняя положение данных окружностей, в этот треугольник можно поместить ещё одну единичную окружность, не пересекающуюся с данными.

Решение:



На рисунке ABC правильный треугольник со стороной $4+2\sqrt{3}$. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны сторонам треугольника ABC и удалены от соответствующих сторон на расстояние, равное 1. Легко подсчитать, что сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 4. A_2, B_2 и C_2 – середины сторон треугольника $A_1B_1C_1$. Докажем, что центр каждой из пяти окружностей должен совпадать с одной из шести точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Рассмотрим четыре правильных треугольника $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_2$, $A_2B_2C_1$. Сторона каждого треугольника равна 2 (каждый треугольник рассматривается вместе с его границей). Найдётся по крайней мере один треугольник, содержащий центры не менее чем двух окружностей, поскольку центры всех пяти окружностей принадлежат треугольнику $A_1B_1C_1$. Но расстояние между центрами любых двух окружностей не меньше 2. Если же в правильном треугольнике со стороной, равной 2, расположены две точки, расстояние между которыми не меньше 2, то они должны совпаданить с двумя вершинами этого треугольника. Значит, хотя бы одна из точек A_2, B_2, C_2 должна являться центром окружности. Пусть это будет точка A_2.

Центр любой окружности, отличный от A_2 и принадлежащий одному из трёх треугольников $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$, $A_2B_2C_2$, должен совпадать с какой-либо вершиной соответсвующего треугольника, поскольку всем этим треугольниками принадлежит точка A_2. Если таких окружностей 4, то их центры будут находится в точках B_1, C_1, B_2, C_2; если таких окружностей 3, то их центры окажутся в трёх из перечисленных четырёх точек, а центр пятой будет в точке A_1, так как хотя бы в одной из точек B_2 или C_2 должен быть центр окружности. Этим исчерпываются все возможные варианты.

Таким образом, мы доказали, что центры пяти данных окружностей должны совпадать с пятью из шести точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2. Значит, можно поместить в треугольник ABC ещё одну, шестую окружность, не пеесекающуюся с пятью данными, взяв её центр в соответсвующей свободной точке.

$\triangleright$ **Задача 10.** Робот случайно выбирает натуральное число их отрезка $[1921; 2021]$. Какова вероятность того, что выражение $2^x - x^2$ делится на 7.

Решение:

Чтобы число $2^x - x^2$ делилось на 7, необходимо, чтобы числа 2^x и x^2 имели при делении на 7 равные остатки.

Нетрудно проверить, что остатки числа 2^x при делении на 7 меняются циклично с периодом 3, в то время как остатки числа x^2 так же цикличны, но с периодом 7. Значит, чтобы рассмотреть все возможные ситуации для разности этих чисел, нам достаточно проверить 21 последовательное число. Для наглядности внесём результаты в таблицу:

x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
остаток 2^x	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2
остаток x^2	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1
$\vdots 7$	$\surd$					$\surd$							

x	23	24	25	26	27	28	29	30
остаток 2^x	4	1	2	4	1	2	4	1
остаток x^2	4	2	2	4	1	0	1	4
$\vdots 7$	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$			

Здесь мы начали запись с 10, т.к. $1921 = 21 \cdot 91 + 10$. Как видно, на периоде встречается 6 совпадений остатков, а в интервал

$[1921; 2021]$ укладывается четыре полных периода и ещё 16 чисел. Значит, всего значений, при которых $2^x - x^2 \vdots 7$, будет $6 \cdot 4 + 4 = 28$, и вероятность благоприятного исхода равна

$$P(A) = \frac{28}{101}$$

Ответ: $\frac{28}{101}$