Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
11 класс (Европа)

▷ **1.** Найдите две последние цифры числа a_{2024}, где $a_k = 7^{a_{k-1}}, a_1 = 7$.

Решение: Выпишем последние две цифры первых восьми степеней числа 7.
$7^1 = ...07, 7^2 = ...49, 7^3 = ...43, 7^4 = ...01, 7^5 = ...07, 7^6 = ...49, 7^7 = ...43, 7^8 = ...01$.
$7^7 = 4k + 3 \Rightarrow 7^{7^7} = (7^4)^k \cdot 7^3 = (...01) \cdot (...43) = ...43$.

▷ **2.** Решите уравнение: $4x + 3y - 2x\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right] = 0$, где $[a]$ – целая часть числа a.

Решение: Перепишем данное уравнение в следующем виде

$$\frac{4x+3y}{2x} = \left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right].$$

Из этого равенства следует, что число $k = \frac{3y}{2x}$ является целым. Преобразуем данное уравнение с учётом указанного факта:
$2 + \frac{3y}{2x} = \left[1 + \frac{y^2}{x^2}\right], 2 + \frac{3y}{2x} = \left[\frac{y^2}{x^2}\right] + 1, 1 + k = \left[\frac{4}{9}k^2\right].$
На основании определения целой части из последнего равенства следует, что

$$1 + k \leqslant \frac{4}{9}k^2 < 2 + k$$

или

$$\begin{cases} 4k^2 - 9k - 9 \geqslant 0 \\ 4k^2 - 9k - 18 < 0 \end{cases}$$

Решением первого неравенства является следующее множество значений $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right] \cup [3; +\infty)$,
решением второго - промежуток $\left(\frac{9-3\sqrt{41}}{8}, \frac{9+3\sqrt{41}}{8}\right)$.
Откуда в силу того, что k — целое, делаем вывод, что $k = 3$ и -1. Таким образом, $y = 2x$, $y = -\frac{2}{3}x$ и, в качестве решения можно взять следующие пары $(n; 2n)$ и $(3n; -2n)$, где $n \in Z u n \neq 0$.

▷ **3.** На доске написано 100 чисел. Среди всех их попарных произведений ровно 2024 отрицательных. Сколько из исходных чисел равны 0?

Решение: Пусть среди написанных чисел x положительных и y отрицательных. (x, y – натуральные числа $x + y \leqslant 100$). Так как отрицательные произведения возникают только при умножении чисел разного знака, среди попарных произведений ровно xy отрицательных. Имеем $xy = 2024$. Тогда наибольшее из чисел x и y не превосходит $44 < \sqrt{2024} < 45$, т. е. не менее 44.
Кроме того, это число является делителем числа $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.
Делителей — $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Легко видеть, что такими числами лежащими в интервале $[44; 100]$, будут только числа 44 и 46. Из уравнения xy=2024 находим, что второе число при этом будет равняться 46 или 44. Пара (88;23) не удовлетворяет условию $x + y \leqslant 100$. Остаётся два варианта: 44 отрицательных чисел, и 46 положительных, или наоборот. В обоих случаях число ненулевых чисел 90, а поэтому среди исходных чисел ровно 10 нулевых.

▷ **4.** Найдите натуральные числа m и n, если из четырёх утверждений
1) $m\breve{}n$ делится на 3;
2) $m + 2n$ – простое число;
3) $m = 4n\breve{}1$;
4) $m + 7$ делится на n
три истинны, а одно ложно.

Решение: Мы рассмотрим два случая.

1. Пусть утв. 1 истинно $(m - n\vdots 3)$. Тогда утв. 3 ложно, т. к. из $m = 4n\breve{}1$ получается $m - n = 3n\breve{}1$ не $\vdots 3$. Следовательно, утв. 2 и 4 должны быть истинны, т. к. среди всех утверждений только одно ложное. Из утв. 2 получаем, что $m + 2n = (m - n) + 3n\vdots 3$, в то же время это число простое. Есть только одно простое число, делящееся на 3. Это самое число 3. Значит, $m + 2n = 3$ и $m = n = 1$, ведь m, n — натуральные. Убеждаемся, что пара (1,1) подходит под условие.
2. Пусть утв. 1 ложное. Тогда все остальные истинны. Из утв. 3 и 4 получаем: $m + 7 = (4n - 1) + 7 = 4n + 6\vdots n$, откуда $6\vdots n$. Натуральные делители шестёрки — это 1, 2, 3, 6. Из утв. 3 находим соответствующие значения m: 3, 7, 11, 23. Последняя пара (23,6) не удовлетворяет второму условию —- число $m{+}2n = 35$ не является простым. Остальные пары, как легко проверяется, подходят.

▷ **5.** Показать, что если 11 простых чисел составляют арифметическую прогрессию, то по крайней мере одно из них больше 20000.

Решение: Пусть d — разность арифметической прогрессии, $a_1, a_2, ...a_p$ — члены прогрессии, $p = 11$. По теореме Тебольта, которая формулируется следующим образом:

Если n членов арифметической прогрессии являются нечетными простыми числами, то разность прогрессии делится на каждое простое число, меньшее n.

d делится на $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$.

$a_p = d * 10 + a_1$

$a_p = 23100 + a_1$, следовательно, $a_p \geqslant 23101.$, а значит, по крайней мере a_p и a_{p-1} будут больше 20000.

▷ **6.** Дан отрезок, длина которого равна 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, длина которого равна $\sqrt[32]{31}$.

Решение: $\left(\sqrt{15}a\right)^2 = \sqrt{(4a)^2 - a^2} \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{15}a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{31}a$

Пусть $l = \sqrt[32]{31}$

$l_1 = \sqrt{(4l)^2 + (\sqrt{15}l)^2} = \sqrt{31}l, \mid l_1 \mid = 31^{\frac{1}{2}+\frac{1}{32}} = 31^{\frac{17}{32}}$

$l_2 = \sqrt{(4l_1)^2 + (\sqrt{15}l_1)^2} = \sqrt{31}l_1, \mid l_2 \mid = 31^{\frac{33}{32}}$

$l_3 = \sqrt{l_1 \cdot l_2} = 31^{\frac{25}{32}}$

$l_4 = \sqrt{l_3 \cdot l_2} = 31^{\frac{29}{32}}$

$l_5 = \sqrt{l_4 \cdot l_2} = \left(31^{\frac{29}{32}+\frac{33}{32}}\right)^{\frac{1}{2}} = 31^{\frac{31}{32}}$

$l_6 = \sqrt{l_5 \cdot l_2} = \left(31^{\frac{31}{32}+\frac{33}{32}}\right)^{\frac{1}{2}} = 31$

l_6 делим на 31 равную часть по теореме Фалеса.

▷ **7.** Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:
а) в порядке возрастания слева направо;
б) в порядке невозрастания слева направо.
Считать, что числа не могут начинаться с цифры 0.

Решение: а) Пусть событие B —- получение трёхзначного числа, цифры которого располагаются в порядке возрастания слева направо (например, 123; 238; 489 и т. д.). Очевидно, что в записи таких чисел не должно быть цифры 0. Общее количество трёхзначных чисел $N = 900$, из которых событию B благоприпятствуют
$C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84 исхода.$
Поэтому $P(B) = \frac{M_2}{N} = \frac{84}{900} = \frac{7}{75} = 0,0933.$
б) Пусть событие D — полученные числа, цифры которого расположены в порядке невозрастания слева направо (например, 111, 200, 210, 331, 921 и т. д.).
Очевидно, $N = 900$.
Число исходов, благоприятствующих событию D, обозначим через $_4$.
Число $_4$ будем вычислять по формуле: $_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$,
Где L_1 — количество всех трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены по убыванию, например, 210; 321,975 и т. д. L_2 — количество трёхзначных чисел, цифры в записи которых одинаковы, например, 111;222;777; и т. д. L_3 — количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в невозрастающем порядке и последние две одинаковы, например, 211; 977; 544 и т. д. . L_4 - количество трёхзначных чисел, у которых все цифры расположены в порядке невозрастания и первые две цифры одинаковы, например, 110; 221; 995 и т. д.
Существует C_{10}^3 трёхзначных чисел, цифры в записи которых расположены по убыванию.
Поэтому $L_1 = C_{10}^3 = 120$.
Очевидно, что $L_2 = 9$, так как 111, 222, 333,. . . ,999 — всего 9 чисел.
Ищем L_3 методом перебора. Очевидно, что существует только 9 чисел, у которых последние две цифры – 0:
100, 200, 300,. . . ,900.
Аналогично рассуждая, можно записать:
211, 311, 411,. . . ,911 – 8 чисел.
322, 422, 522,. . . ,922 – 7 чисел.
. . .
988 — 1 число.
Таким образом,
L_3 = 9+8+7+. . . +1=45.
Аналогично ищется L_4 — количество трёхзначных чисел, все цифры у которых расположены в порядке невозрастания и первые две цифры в записи одинаковы. Эти числа перечислены ниже:

110;
220. 221;
330, 331, 332;
440, 441, 442, 443;
. . .
990, 991, 992, 993,. . . ,998.
Тогда $L_4 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$.
$_4 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 120 + 9 + 45 + 45 = 219.$
Поэтому $P(D) = \frac{219}{900} = \frac{73}{300} = 0,2433.$

▷ **8.** Развёртка правильной четырёхугольной пирамиды представляет собой плоскую фигуру, координаты (x, y) точек которой удовлетворяют соотношению

$$max\{\mid x \mid, \mid y \mid\} + min\{\mid x - y \mid, \mid x + y \mid\} \leqslant a.$$

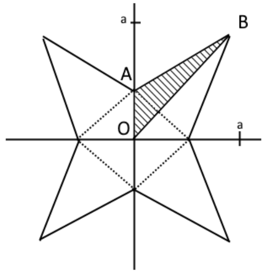
Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Решение:
Пусть P - искомая плоская фигура. Если $M(x_0, y_0) \in P$, то $\pm x_0, \pm y_0 \in P$ и

$\pm x_0, \pm y_0 \in P$, стало быть P имеет четыре оси симметрии : $y=x$, $y=-x$, $y=0$, $x=0$. Пусть $y \geqslant x \geqslant 0$, тогда $max|\,x\,|,|\,y\,| = y$, $min|\,x-y\,|,|\,x+y\,| = y-x$, т.е.

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant \alpha \\ y \geqslant x \geqslant 0 \end{cases}$$

Отображая полученную фигуру относительно осей симметрии, получим фигуру P — развертку четырёхугольной пирамиды с квадратным основанием, равным $\alpha = \sqrt{2}$. Высота пирамиды $H = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \alpha$. Следовательно, объём пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн.} H = \frac{a^3}{6}$, площадь полной поверхности $S_{n.n.} = 4\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right) = 2a^2$. Известно, что $V = \frac{1}{3} r S_{n.n.}$, следовательно $r = \frac{3V}{S_{n.n.}} = \frac{\alpha}{4}$.



▷ **9.** Про три попарно различных числа известно, что сумма кубов любых двух из них равно разности между квадратом третьего и числа $\frac{3}{4}$. Найдите произведение этих чисел.

Решение: Пусть a, b, c — заданные числа. По условию имеем систему равенств:
$a^3 + b^3 = c^2 - \frac{3}{4}, b^3 + c^3 = a^2 - \frac{3}{4}, a^3 + c^3 = b^2 - \frac{3}{4}$. (1)
Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3 - c^3 = c^2 - a^2$.
Сокращая на $(a-c)$, по условию $a \neq c$, получаем $a^2 + ac + c^2 = -(a+c)$.
Аналогично можно заключить, что $b^2 + ab + a^2 = -(a+b)$ и $b^2 + bc + c^2 = -(b+c)$, т. е. $a^2 + ac + c^2 = -(a+c), b^2 + ab + a^2 = -(a+b), b^2 + bc + c^2 = -(b+c)$. (2)
Поэтому $(a^2 + ac + c^2)\breve{}(b^2 + bc + c^2) = (b+c)\breve{}(a+c)$, откуда $(a^2 - b^2) + c(a-b) = -(a-b)$.
Сокращая на $(a-b)$, по условию $a \neq b$, получаем $a + b + c = -1$. (3)
Складываем все три равенства (2), получим $2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ac) = -2(a+b+c), 2(a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 2$.
Откуда (см (3)):
$ab + bc + ac = 0$. (4)
Далее возведём в куб обе части равенства (3): $-1 = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2) + 6abc(5)$
Заметим, что $(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc = 0 - 3abc = -3abc$.

Далее, складывая все три равенства (1), получим
$2(a^3+b^3+c^3) = a^2+b^2+c^2 - \frac{9}{4} = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) - \frac{9}{4} = (-1)^2 - 2*0 - \frac{9}{4} = 1 - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$, откуда $a^3 + b^3 + c^3 = -\frac{5}{8}$.
Тогда равенство (5) принимает вид: $-1 = -\frac{5}{8} + 3(-3abc) + 6abc = -\frac{5}{8} - 3abc$.
Тогда $3abc = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.
Следовательно, $abc = \frac{1}{8}$.

▷ **10.** Найдите, по крайней мере, один набор восьми различных натуальных чисел, отличных от нуля, таких, что сумма их кубов равняется следующему 14-значному числу $N = 16781934923776$.

Решение: Проанализируем число $N : 3776 = 16 \cdot 236$

$\Rightarrow N \vdots 16$
$S_1 = 1 + 7 + 1 + 3 + 9 + 3 + 7 = 31$
$S_2 = 6 + 8 + 9 + 4 + 2 + 7 + 6 + 42$

$S_1 - S_2 = 11 \Rightarrow N \vdots 11 \Rightarrow N \vdots 176$

$16781934923776 \vdots 176 = 95351902976$
$N = 176 \cdot 95351902976 = 176 \cdot N_1$

$N_1 \vdots 16 (2976 = 16 \cdot 186)$

$N_1 \vdots 11, S_1 = 9 + 3 + 1 + 0 + 9 + 6 = 28$
$S_2 = 5 + 5 + 9 + 2 + 7 = 28$
95351902976:176= 54177217

$N_2 = 54177217$
$N = 176^2 \cdot N_2 = 176^3 \cdot 3078251 = 176^3 \cdot 11 \cdot 279841$

$279841 не \vdots 11$
2+9+4=15
7+8+1=16

$279841 не \vdots 13; 17; 19$
$279841 = 23 \cdot 12167 = 23^2 \cdot 529 = 23^4$

$N = 2024^4$
Обозначим набор чисел через m_k^3, где $1 \leqslant k \leqslant 8$
$m_1^3 + m_2^3 + m_3^3 + m_4^3 + m_5^3 + m_6^3 + m_7^3 = 2024^4$
$m_k = n_k \cdot 2024$
$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 + n_6^3 + n_7^3 = 2024, 2024 = 2025 - 1 = 45^2 - 1^2$
Известно, что $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right]^2$
$\frac{k \cdot (k+1)}{2} = 45, k \cdot (k+1) = 90, k = 9$
$2^3 + 3^3 + \cdots + 9^3 = 2024$

Перейдём от n_k к m_k :
$4048^3 + 6072^3 + 8096^3 + 10120^3 + 12144^3 + 14168^3 + 16192^3 + 18216^3 = 2024^4$.