Отборочный тур, 11 класс, 1 вариант

▷ **1.** Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 23$, $a_2 = 24$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\frac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Найдите $a_{100} + a_{101} + \dots + a_{105}$.

Ответ: 36.

▷ **2.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{2x^2 + 3x + 16} \leqslant 6 + \sqrt{x+4}$.

Ответ: 5.

▷ **3.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1 + \cos 2x + \sin 2x = a \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три решения. В ответе запишите сумму квадратов всех найденных значений a.

Ответ: 16.

▷ **4.** Пусть $\alpha = -\sqrt{|\,40\sqrt{2} - 57\,|} + \sqrt{40\sqrt{2} + 57}$ и $\beta = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ — корни некоторого приведенного многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите $n \cdot P_n(n^2 + 1)$.

Ответ: -10.

▷ **5.** Велосипедист выехал из точки A точно в полдень и спустя 2 часа 30 минут прибыл в пункт B. В 12 часов 30 минут из A вслед за велосипедистом выехал автомобиль. Найти время его прибытия в пункт B, если известно, что это случилось спустя 40 минут после того, как он обогнал велосипедиста. Если время прибытия находится неоднозначно, то в ответе укажите разность между наибольшими и наименьшими найденными значениями в минутах.

Ответ: 40.

▷ **6. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Основание AB в 7 раз длиннее основания CD. На стороне AD выбрана точка K такая, что площадь треугольника ABK в два раза меньше площади треугольника BCK. Найти площадь треугольника CDK, если $S = 2240$.**

Ответ: 182.

▷ **7. Найдите наибольшее и наименьшее шестизначные числа M и m, кратные 13, которые при делении на 3, 4, 5, 6, 7 дают остаток 2. В ответе запишите разность $M - m$.**

Ответ: 895440.

▷ **8. Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый её член положительный, в 51 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме её последних шести членов.**

Ответ: 12.

▷ **9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость CPQ, где P — середина ребра A_1B_1, а Q — центр грани $ABCD$. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объём куба? В ответе запишите $10 \cdot \frac{m+n}{|m-n|}$.**

Ответ: 24.

▷ **10. Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m - x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 5 натуральных чисел от 1 до 80 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.**

Ответ: 19760.

Отборочный тур, 11 класс, 2 вариант

▷ **6. В окружность радиуса 4 вписан прямоугольный треугольник площади $8\sqrt{3}$. Биссектрисы углов треугольника пересекают эту окружность в точках A, B и C. Найти площадь S треугольника ABC. В ответе записать $(S-12)^4$**

Ответ: 2304.

▷ **7. Найдите наибольшее и наименьшее шестизначные числа M и m, кратные 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 13 дают остаток 1. В ответе запишите разность $M-m$.**

Ответ: 889980.

▷ **8. Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{10}$. Определить её первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $(10;12)$, и существует число n такое, что отношение суммы первых $n+1$ членов прогрессии к сумме последующих n членов равно $\frac{n}{n+1}$. В ответе записать $20a_1$.**

Ответ: 210.

▷ **9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость PQR, где P, Q, R - центры граней BB_1C_1C, CC_1D_1D, $ABCD$. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость поверхность куба? В ответе запишите $12\cdot\frac{m+n}{|m-n|}$.**

Ответ: 20.

▷ **10. Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m-x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 7 натуральных чисел от 1 до 55 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.**

Ответ: 38025.

▷ **1. Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1=24$, $a_2=23$ и $a_{n+1}=a_n\cdot a_{n-1}-10\left[\frac{a_n\cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Какого наименьшего и наибольшего значения может достигать сумма четырех подряд членов этой последовательности? В ответе запишите сумму найденных значений.**

Ответ: 67.

▷ **2. Найдите среднее арифметическое всех целых x, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{2x^2-x+1}\leqslant 2+\sqrt{x+1}$.**

Ответ: 1.

▷ **3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1-\cos 2x+\sin 2x=a\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ ровно три решения. В ответе запишите разность квадратов между наибольшим и наименьшим найденными значениями a.**

Ответ: 4.

▷ **4. Пусть $\alpha=\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{50}$ — корень некоторого приведенного многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите значение $-n\cdot P_n(-n)$.**

Ответ: 21.

▷ **5. В 6 часов утра из пунтка А в пункт В выехал мотоциклист. Спустя некоторое время вслед за ним выехал автомобиль. Через 1 час он догнал мотоцикл. Найти время Т прибытия мотоциклиста в В, если известно, что это случилось через 1 час после того, как его догнал автомобиль, а автообиль прибыл в В в 8 часов 10 минут. В ответе укажите значение 12 T.**

Ответ: 102.

Отборочный тур, 11 класс, 3 вариант

▷ **6. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Основание BC в 5 раз короче основания AD. На стороне AB выбрана точка M такая, что площадь треугольника ADM в два раза больше площади треугольника CDM. Найти площадь треугольника BCM, если $S = 1300$.**

Ответ: 50.

▷ **7. Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа M и m, кратные 7, которые при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 13 дают остаток 1. В ответе запишите разность $M - m$.**

Ответ: 87360.

▷ **8. Определить число членов конечной арифметической прогрессии, если известно, что первый её член положительный, в 15 раз больше одного из членов прогрессии и равен сумме её последних шести членов.**

Ответ: 16.

▷ **9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость APQ, где P и Q - середины ребер B_1C_1 и C_1C. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объём куба? В ответе запишите $11 \cdot \frac{m+n}{|m-n|}$.**

Ответ: 33.

▷ **10. Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m - x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 9 натуральных чисел от 1 до 44 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.**

Ответ: 52668.

▷ **1. Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 24$, $a_2 = 23$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\frac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Найдите $a_{2000} + a_{2001} + \cdots + a_{2005}$.**

Ответ: 24.

▷ **2. Найдите сумму всех решений уравнения $\frac{2x^2-x-1+(x+1)\sqrt{2x^2-3x-2}}{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{2x^2-3x-2}} = \frac{2x+1}{3\sqrt{2}}$.**

Ответ: 1.

▷ **3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1 + \cos 2x - \sin 2x = a \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три решения. В ответе запишите квадрат суммы всех найденных значений a.**

Ответ: 8.

▷ **4. Пусть $\alpha = 3+\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}+\sqrt{3-\sqrt{4+\sqrt{12}}}$ — корень некоторого приведенного многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите $n \cdot P_n(-n)$.**

Ответ: 38.

▷ **5. Из некоторого пункта выехали велосипед и через 20 минут вслед за ним автомобиль и мотоцикл. Автомобиль, догнав велосипед, мгновенно повернул обратно и спустя 2 минуты встретил мотоцикл. Скорости мотоцикла и влосипеда равны 50 и 25 км/ч. Найти скорость автомобиля V. Если решений несколько, то в ответе запишите сумму всех найденных значений V [км/ч].**

Ответ: 225.

Отборочный тур, 11 класс, 4 вариант

▷ 6. В окружность радиуса 2 вписан прямоугольный треугольник площади 4. Биссектрисы углов треугольника пересекают эту окружность с точках A, B и C. Найти площадь S треугольника ABC.

Ответ: 64.

▷ 7. Найдите наибольшее и наименьшее пятизначные числа M и m, кратные 13, которые при делении на 3, 4, 5, 6, 7 дают остаток 2. В ответе запишите разность $M - m$.

Ответ: 81900.

▷ 8. Разность арифметической прогрессии равна $\frac{1}{9}$. Определить её первый член a_1, если известно, что он лежит в интервале $(12; 15)$, и существует число n такое, что отношение суммы первых n членов прогрессии к сумме последующих $n-1$ членов равно $1 - \frac{1}{n}$. В ответе записать $2025a_1$.

Ответ: 27000.

▷ 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость PQR, где P, Q, R — центры граней BB_1C_1C, CC_1D_1D и $ABCD$. В каком отношении $\frac{m}{n}$ (несократимая дробь) делит эта плоскость объём куба? В ответе запишите $10 \cdot \frac{m+n}{|m-n|}$.

Ответ: 15.

▷ 10. Назовем множество чисел X симметричным, если в нем можно выбрать некоторое число m так, что для любого элемента x из множества X число $2m - x$ тоже является его элементом. Александр очень любит симметричные множества, поэтому сегодня он хочет узнать, сколько существует симметричных множеств, состоящих ровно из 11 натуральных чисел от 1 до 33 (включительно). Однако у Александра много дел, и у него мало времени. Помогите Александру успеть выполнить все дела и найдите количество указанных симметричных множеств.

Ответ: 20384.

▷ 1. Последовательность натуральных чисел a_n задана следующим образом: $a_1 = 24$, $a_2 = 23$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - 10\left[\frac{a_n \cdot a_{n-1}}{10}\right]$, где $[x]$ — целая часть числа x. Какого наименьшего и наибольшего значения может достигать сумма пяти подряд членов этой последовательности? В ответе запишите сумму найденных значений.

Ответ: 73.

▷ 2. Найдите сумму всех решений уравнения $\frac{2x^2-3x+(2-x)\sqrt{2x^2-x-3}}{x^2-x-2-x\sqrt{2x^2-x-3}} = \frac{3-2x}{3\sqrt{2}}$.

Ответ: 2.

▷ 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $1 - \cos 2x - \sin 2x = a\cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ ровно три решения. В ответе запишите сумму квадратов всех найденных значений a.

Ответ: 16.

▷ 4. Пусть $\alpha = 5 + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ — корень некоторого приведенного многочлена $P_n(x)$ с целыми коэффициентами степени n. Какое наименьшее натуральное значение может принимать n? В ответе укажите $n \cdot P_n(-n)$.

Ответ: 74.

▷ 5. Из некоторого пункта выехали мотоцикл и через 20 минут вслед за них автомобиль и велосипед. Когда автомобиль догнал мотоцикл, мотоцикл мгновенно повернул обратно и спустя 45 минут встретил велосипед. Скорости автомобиля и велосипеда равны 60 и 15 км/ч. Найти скорость V [км/ч].

Ответ: 45.