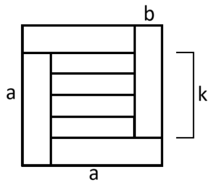
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
10 класс (Европа)

▷ **1.** Можно ли разрезать квадрат на 10 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение:



Периметр квадрата равен $P = 4a$.

$k = 10 - 4 = 6$

$4:\ (a - b + b)2 = 2a = \frac{p}{2}$

$6:\ (a - 2b + \frac{a-2b}{6})2 = 2a$

$\frac{7}{6}a - \frac{14}{6}b = a$

$\frac{7}{3}a - \frac{14}{3}b = 2a$

$\frac{a}{14} = b$

Ответ: Да.

▷ **2.** Найдите наименьшее натуральное n, при котором

$$1,(1) + 2,(2) + \cdots + n,(n) \geqslant 202,5$$

Решение:

$n = 9$

$1,(1) + \cdots + 9,(9) = 1 + \cdots + 9 + \frac{1+\cdots+9}{9} = \frac{10}{9} \cdot 45 = 50$

$10 \leqslant n < 100$

$n = 99$

$10 + \cdots + 99 + \frac{10+\cdots+99}{99} + 50 = \frac{(10+\cdots+99)}{99} \cdot 100 + 50 = \frac{109 \cdot 45}{99} \cdot 100 + 50 = 5004,(54)$

$S = 1,(1) + \cdots + 9,(9) + 10,(10) + n,(n) = \frac{9900 + (n^2+n-90)\cdot 100}{2\cdot 99} = \frac{n^2+n+900}{2\cdot 99} \geqslant 202,5$

$100(n^2 + n) - 39195 \geqslant 0$

$S(19) = 187,83 < 202,5$

$S(20) = 207,58 > 202,5$

$n \geqslant 20$

Ответ: 20.

▷ **3.** В некоторой системе исчисления взято число вида

$$10\underbrace{11\ldots11}_{n}01.$$

Известно, что это число, будучи записано в десятичной системе счисления, при любом натуральном n делится на 19. При каком наименьшем основании системы счисления это возможно?

Решение:

Пусть a - основание системы счисления. Данное в условии число представимо в виде

$$1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1} + a^{n+3} = 1 + a^2\frac{a^n - 1}{a-1} + a^{n+3} =$$

$$= \frac{a^{n+4} - a^{n+3} + a^{n+2} - a^2 + a - 1}{a-1} = \frac{(a^2 - a + 1)(a^{n+2} - 1)}{a-1} =$$

$$(a^2 - a + 1)(a^{n+1} + a^n + \cdots + a + 1).$$

Получившееся выражение делится на 19 независимо от n, следовательно, число $a^2 - a + 1$ кратно 19. Это возможно при наименьшем основании системы счисления a, равном 12.

Ответ: 12.

▷ **4.** Сколько различных делителей у числа $N = 92719271$?

Решение:

$N = 92719271 = 9271 \cdot 10001 = 73^2 \cdot 127 \cdot 137$

$9271 = 10000 - 729 = 100^2 - 27^2 = 127 \cdot 73$

$10001 = 73 \cdot 137$

$73, 127, 137$ — простые.

$n = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

Ответ: 12.

▷ **5.** Найдите, по крайней мере одну тройку различных натуральных чисел (m, n, k) таких, что выполняется равенство $\frac{1}{2026} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Решение:

$2026 = 2 \cdot 1013$

$\frac{1}{2026} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{1013x} = \frac{2026+1013+2}{2026x} = \frac{3041}{2026x} = \frac{1}{2026}$ $x = 3041$

$(3041; 6082; 3080533)$

Ответ: $(3041; 6082; 3080533)$.

▷ **6.** Пусть $a = \dfrac{1\overbrace{66\ldots6}^{2025}}{\underbrace{66\ldots6}_{2025}4}$, $b = \dfrac{1\overbrace{99\ldots9}^{2025}}{\underbrace{99\ldots9}_{2025}6}$. Найти $a \cdot b$ с точностью до третьего знака.

Решение:

$N = 10^{-2025}$

$a = \frac{10^{2025} + \frac{2}{3}(10^{2025}-1)}{\frac{2}{3}(10^{2025}-1)\cdot 10 + 4} = \frac{5 \cdot 10^{2025} - 2}{20 \cdot 10^{2025} - 8} = \frac{5N-2}{20N-8} = \frac{1}{4}$.

$b = \frac{10^{2025} + (10^{2025}-1)}{(10^{2025}-1)\cdot 10 + 6} = \frac{2 \cdot 10^{2025} - 1}{10 \cdot 10^{2025} - 4} = \frac{2N-1}{10N-4} = \frac{1}{5} - \frac{0{,}4}{20N-8}$.

$a \cdot b = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} - \frac{0{,}4}{20N-8}\right)$

$a \cdot b = \frac{1}{20} - 0{,}01(10^{-2025} + \ldots) = 0{,}050$.

Ответ: 0,050.

▷ **7.** Построить прямоугольный треугольник по высоте, опущенной на гипотенузу, и разности между суммой катетов и гипотенузой.

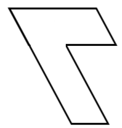
Решение:

В задаче заданы: высота $CD = h$, $x + y - z = k$, где x, y - катеты, а z - гипотенуза треугольника. $x + y = k + z$, $x^2 + y^2 + 2xy = k^2 + 2kz + z^2$, т.е. так как треугольник прямоугольный, $2xy = k^2 + 2kz$. Но $xy = hz$ и $z = \frac{k^2}{2(h-k)}$ (здесь возникает условие $h > k$).

Строим теперь прямоугольник OPR по катетам $OP = k$ и $PR = 2(h-k)$ и проводим $OK \perp OR$ до пересечения с прямой PR в точке K. Так как OP - среднее геометрическое KP и PR, то $PK = \frac{(OP)^2}{PR} = \frac{k^2}{2(h-k)} = z$.

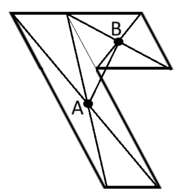
Далее легко строится искомый прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте.

▷ **8.** Из однородного листа жести вырезан многоугольник (“буква Г”). Как можно, располагая только линейкой и карандашом, построить его центр тяжести?

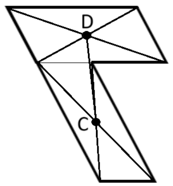


Решение:

“Букву Г” можно разбить на два параллелограмма и центр тяжести “буквы Г” лежит на прямой, соединяющей центры этих параллелограммов.



Но “букву Г” можно и другим способом разбить на два параллелограмма, и мы находим другую прямую, на которой лежит её центр тяжести - точка пересечения этих прямых.



▷ **9.** Доказать, что сумма дробей больше 24

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

Решение:

Имеем $2\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}\right)=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\frac{\sqrt{10001}-\sqrt{9999}}{2}=\frac{\sqrt{10001}-1}{2}>\frac{100-1}{2}>49$, откуда $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$

▷ **10.** Среди вершин правильного 77-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Какова вероятность того, что треугольник с выбранными вершинами остроугольный?

Решение:

Зафиксируем одну из вершин (M) у $(2n+1)$-угольника. В качестве остальных вершин треугольника можно взять любые две из оставшихся, всего $C_{2n}^2=\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1)$ вариантов. Рассмотрим, при каких условиях треугольники будут остроугольными. Угол ABC будет острым, если между A и C лежит не более $(n-1)$ вершин.

Все вершины, кроме M, разделим на две равные группы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $A_{n-1}, \ldots, A_{2n}$. Если две оставшиеся вершины лежат в одной группе, то угол при одной из них тупым. Поэтому в каждой группе есть по вершине. Пусть, например, в первой группе выбрана вершина A_i, а во второй - A_j. Углы при этих вершинах острые. Чтобы острым был и угол A_iMA_j, должно выполняться ограничение $j-i\leqslant n$. Итак, $1\leqslant i\leqslant n$, $n+1\leqslant j\leqslant i+n$, последнему неравенству отвечают i решений. Итак, всего имеем $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ благоприятствующих событий.

Получается, вероятность равна $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(2n-1)}=\frac{n+1}{2(2n-1)}$.

Если $n=38$, то вероятность $P=\frac{39}{2\cdot(2\cdot 38-1)}=\frac{13}{50}=0,26$.

Ответ: 0,26.