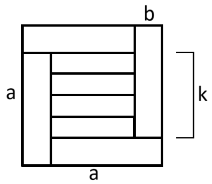
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
10 класс (Азия)

▷ **1.** Можно ли разрезать квадрат на 20 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение:



Периметр квадрата равен $P = 4a$.

$k = 20 - 4 = 16$

$4: \ (a - b + b)2 = 2a = \frac{p}{2}$

$16: \ (a - 2b + \frac{a-2b}{16})2 = 2a$

$(a - 2b) \cdot 17 = 16a$

$17a - 34b = 16a$

$\frac{a}{34} = b$

Ответ: Да.

▷ **2.** Найдите наибольшее натуральное значение n, при котором

$$n,(1) + (n-1),(2) + \cdots + 1,(n) \leqslant 202,5$$

Решение:

$n = 9$

$9,(1) + 8,(2) + 1,(9) = (1 + 2 + \cdots + 9) + \frac{1+2+\cdots+9}{9} = 45 + 5 = 50$

$\left[n + (n-1) + \cdots + (n-8) + \frac{1+2+\cdots+9}{9} = 9n - 36 + 5 = 9n - 31\right]$

$n - 9 + n - 10 + \cdots + 1 + \frac{10+11+\cdots+n}{99} = \frac{(n-8)(n-9)}{2} + \frac{(n+10)(n-9)}{2\cdot 99} = \frac{n^2-17n+72}{2} + \frac{n^2+n-90}{2\cdot 99} = \frac{100n^2-1682n+7038}{2\cdot 99}$

$10 \leqslant n < 99$

$S = n,(1) + (n-1),(2) + \cdots + (n-8),(9) + (n-9),(10) + \cdots + 1,(n) = 9n - 31 + \frac{100n^2-1682n+7038}{2\cdot 99} = \frac{100n^2+100n+900}{2\cdot 99} \leqslant 202,5$

$100n^2 + 100n - 39195 \leqslant 0 \ \ -20 \leqslant n \leqslant 19$

$S(19) = 187,83 < 202,5$

$S(20) = 207,58 > 202,5$

Ответ: 19.

▷ **3.** В некоторой системе исчисления взято число вида

$$10\underbrace{11\ldots11}_{n}01.$$

Известно, что это число, будучи записано в десятичной системе счисления, при любом натуральном n делится на 37. При каком наименьшем основании системы счисления это возможно?

Решение:

Пусть a - основание системы счисления. Данное в условии число представимо в виде

$$1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n+1} + a^{n+3} = 1 + a^2\frac{a^n - 1}{a - 1} + a^{n+3} =$$

$$= \frac{a^{n+4} - a^{n+3} + a^{n+2} - a^2 + a - 1}{a - 1} = \frac{(a^2 - a + 1)(a^{n+2} - 1)}{a - 1} =$$

$$(a^2 - a + 1)(a^{n+1} + a^n + \cdots + a + 1).$$

Получившееся выражение делится на 37 независимо от n, следовательно, число $a^2 - a + 1$ кратно 37. Это возможно при наименьшем основании системы счисления a, равном 11.

Ответ: 11.

▷ **4.** Сколько различных делителей у числа $N = 99919991$?

Решение:

$N = 99919991 = 9991 \cdot 10001 = 73 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 137$

$9991 = 10000 - 9 = 100^2 - 3^2 = 97 \cdot 103$

$10001 = 73 \cdot 137$

$73, 97, 103, 137$ - простые.

$n = 2^4 = 16$

Ответ: 16.

▷ **5.** Найдите, по крайней мере одну тройку различных натуральных чисел (m, n, k) таких, что выполняется равенство $\frac{1}{1991} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Решение:

$1991 = 11 \cdot 181$

$\frac{1}{1991} = \frac{1}{x} + \frac{1}{11x} + \frac{1}{181x} = \frac{1991+181+11}{1991x} = \frac{2183}{1991x} = \frac{1}{1991}$ $x = 2183$

$(2183; 24013; 395123)$

Ответ: $(2183; 24013; 395123)$.

▷ **6.** Пусть $a = \dfrac{4\overbrace{66\ldots6}^{2025}}{\underbrace{66\ldots6}_{2025}4}$, $b = \dfrac{1\overbrace{99\ldots9}^{2025}}{\underbrace{99\ldots9}_{2025}1}$. Найти $a + b$ с точностью до 13 знака.

Решение: Примем число 333...33, в котором все 2025 цифр равны 3, за x, тогда $3x = N - 1$, где $N = 10^{2025}$. Выразим искомую сумму через x:

$$a+b = \frac{4N+2x}{20x+4} + \frac{N+3x}{30x+1} = \frac{4(3x+1)+2x}{20x+4} + \frac{3x+1+3x}{30x+1} = \frac{14x+4}{20x+4} + \frac{6x+1}{30x+1} =$$

$$= \frac{(7x+2)(30x+1)+(6x+1)(10x+2)}{(10x+2)(30x+1)} = \frac{270x^2+89x+4}{300x^2+70x+2} =$$

$$= \frac{270 + \frac{89}{x} + \frac{4}{x^2}}{300 + \frac{70}{x} + \frac{2}{x^2}} \approx \frac{270}{300} = 0{,}9.$$

Приближенное значение было получено отбрасыванием в числителе и знаменателе слагаемых, не превышающих 10^{-2022}, поэтому с точностью до 13 знака получим $0,9000000000000$.

Ответ: $0,9000000000000\underbrace{0\ldots0}_{11}$.

▷ **7.** Построить треугольник, зная, что длины сторон его составляют арифметическую прогрессию, биссектриса, проведённая к средней стороне, равна l и угол, лежащий против биссектрисы, равен α.

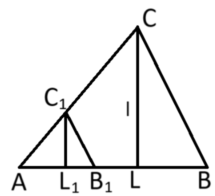
Решение:

Анализ. Допустим, что треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи, т.е. $\angle A = \alpha$, биссектриса $CL = l$ и

$$AB = \frac{AC + CB}{2}.$$

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$AL : LB = AC : CB.$$



Кроме того,

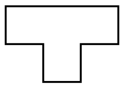
$AL + LB = AB$.

Из вышенаписанного получим: $AL = \frac{AC}{2}$, $BL = \frac{BC}{2}$.

Построение. Строим произвольный треугольник AC_1L_1, у которого $\angle A = \alpha$, $AC_1 = 2AL_1$. Этот треугольник достраивается до треугольника AB_1C_1

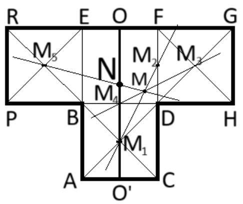
так, чтобы C_1L_1 была биссектрисой $\angle AC_1B_1$. После этого строим треугольник ABC, подобный треугольнику AB_1C_1, приняв за центр гомотетии точку A, а за коэффициент отношение $\frac{l}{CL} = k$. Треугольник ABC - искомый. Доказательство и исследование очевидно.

▷ **8.** Как можно, располагая только линейкой и карандашом, найти центр тяжести симметричной однородной пластинки, изображённой на рисунке?



Решение:

Центр тяжести "буквы Т" лежит на OO' оси симметрии, которую нетрудно построить. Кроме того, можно разбить "буквы Т" на "букву Г" и прямоугольник. На отрезке, соединяющем их центры тяжести, лежит исходный центр "буквы Т", так что он находится в пересечении этого отрезка с осью симметрии "буквы Т".M_1 - центр прямоугольника $ABCD$, M_2 - центр прямоугольника $EGHB$, M_3 - центр прямоугольника $FGHC$, M_1 - центр прямоугольника $AEFD$. M - центр тяжести буквы "Г" - точка пересечения прямых M_1M_2 и M_3M_4. M_5 - центр прямоугольника $BPRE$. Центр тяжести в точке N - пересечение оси OO' и MM_5.



▷ **9.** Доказать, что сумма дробей больше 24,5

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}} > 24,5.$$

Решение:

Имеем

$A = \left(\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}}\right)$

$2A = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}} + \frac{1}{\sqrt{9996}+\sqrt{9998}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{4}}{2} + \frac{\sqrt{8}-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}-\sqrt{8}}{2} + \cdots + \frac{\sqrt{9998}-\sqrt{9996}}{2} + \frac{\sqrt{10000}-\sqrt{9998}}{2} = \frac{\sqrt{10000}-\sqrt{4}}{2} = \frac{100-2}{2} > 49,$

откуда $2A > 49 \Rightarrow A > 24,5$.

▷ **10.** Среди вершин правильного 89-угольника случайным образом выбираются три различные точки. Какова вероятность того, что треугольник с выбранными вершинами остроугольный?

Решение:

Зафиксируем одну из вершин (M) у $(2n+1)$ - угольника. В качестве остальных вершин треугольника можно взять любые две из оставшихся, всего $C_{2n}^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$ вариантов. Рассмотрим, при каких условиях треугольники будут остроугольными. Угол ABC будет острым, если между A и C лежит не более $(n-1)$ вершин.

Все вершины, кроме M, разделим на две равные группы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_{n-1}, \ldots, A_{2n}$. Если две оставшиеся вершины лежат в одной группе, то угол при одной из них тупым. Поэтому в каждой группе есть по вершине. Пусть, например, в первой группе выбрана вершина A_i, а во второй - A_j. Углы при этих вершинах острые. Чтобы острым был и угол A_iMA_j, должно выполняться ограничение $j - i \leqslant n$. Итак, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n+1 \leqslant j \leqslant i+n$, последнему неравенству отвечают i решений. Итак, всего имеем $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ благоприятствующих событий.

Получается, вероятность равна $\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(2n-1)} = \frac{n+1}{2(2n-1)}$.

Если $n = 44$, то вероятность $P = \frac{45}{2\cdot(2\cdot 44-1)} = \frac{45}{174} = \frac{15}{58} \approx 0,25862$.

Ответ: $\frac{15}{58} \approx 0,25862$.