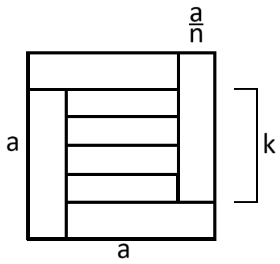
Олимпиада школьников по математике «ТИИМ-2025» Заключительный тур 9 февраля 2025 года 11 класс (Европа)

▷ **1.** Разрежьте квадрат на 22 прямоугольника, необязательно одинаковых, таких, что периметр каждого из них равен полупериметру исходного квадрата.

Решение:



Периметр квадрата равен $P = 4a$.

$\frac{n-2}{n}a \times \frac{n-2}{n}a \cdot \frac{1}{k}$

$p_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}a + \frac{a}{n}\right) = 2a$

$k + 4 = 22$

$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{k+1}{k} = 1$

$nk - 2k + n - 2 = nk$

$n = 2k + 2 = 2(N-4) + 2 = 2N - 6$

Если $N = 22 \Rightarrow n = 38, k = 18$

$\frac{37}{38}a : \frac{a}{38} \Rightarrow 4$

$\frac{18}{19}a : \frac{a}{18} \Rightarrow 18$

$N = 4 + 18 = 22$

▷ **2.** Числа от 1 до N выписаны подряд в вершины правильного N-угольника (по часовой стрелке). Начиная с первого числа отмечается каждое k-ое число (т.е. числа 1, $k+1$, $2k+1$, ...), причём при повторных оборотах учитываются и отмеченные числа. Отметки продолжаются до тех пор, пока не окажется, что все числа, которые отмечаются уже отмечены. Сколько чисел останется без отметки, если $N = 2025$, $k = 13$?

Решение:

$N = 2025,\ k = 13$

1 оборот $(1, 14, 27, \ldots, 2016)$ $2016 = 13 \cdot 155 + 1$

отмечены 156 чисел $2016 + 13 - 2025 = 4$

2 оборот $(4, 17, 30, \ldots, 2019)$ $2019 = 13 \cdot 155 + 4$

отмечены 156 чисел $2019 + 13 - 2025 = 7$

3 оборот $(7, 20, 33, \ldots, 2022)$ $2022 = 13 \cdot 155 + 7$

отмечены 156 чисел $2022 + 13 - 2025 = 10$

4 оборот $(10, 23, 36, \ldots, 2025)$ $2025 = 13 \cdot 155 + 10$

отмечены 156 чисел $2016 + 13 - 2025 = 4$

5 оборот $(13, 26, 39, \ldots, 2015)$ $2015 = 13 \cdot 155 + 0$

отмечены 155 чисел $2015 + 13 - 2025 = 3$

6 оборот $(3, 16, 29, \ldots, 2018)$ $2018 = 13 \cdot 155 + 3$

отмечены 156 чисел $2018 + 13 - 2025 = 6$

7 оборот $(6, 19, 32, \ldots, 2021)$ $2021 = 13 \cdot 155 + 6$

отмечены 156 чисел $2021 + 13 - 2025 = 9$

8 оборот $(9, 22, 35, \ldots, 2024)$ $2024 = 13 \cdot 155 + 9$

отмечены 156 чисел $2024 + 13 - 2025 = 12$

9 оборот $(12, 25, 38, \ldots, 2014)$ $2014 = 13 \cdot 154 + 12$

отмечены 155 чисел $2014 + 13 - 2025 = 2$

10 оборот $(2, 15, 28, \ldots, 2017)$ $2017 = 13 \cdot 155 + 2$

отмечены 156 чисел $2017 + 13 - 2025 = 5$

11 оборот $(5, 18, 31, \ldots, 2020)$ $2020 = 13 \cdot 155 + 5$

отмечены 156 чисел $2020 + 13 - 2025 = 8$

12 оборот $(8, 21, 34, \ldots, 2023)$ $2023 = 13 \cdot 155 + 8$

отмечены 156 чисел $2023 + 13 - 2025 = 11$

13 оборот $(11, 24, 37, \ldots, 2013)$ $2013 = 13 \cdot 154 + 11$

отмечены 155 чисел $2013 + 13 - 2025 = 1$

$\Rightarrow$

1 оборот $(1, 14, 27, \ldots, 2016)$ $2016 = 13 \cdot 155 + 1$

отмечены 156 чисел $2016 + 13 - 2025 = 4$

...

Значит, все числа отмечены.

Ответ: 0.

▷ **3.** Найдите коэффициент при x^{11} у многочлена $\left(1 + x + x^3\right)^6$.

Решение:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{k-1} b + \cdots + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(a+b+c)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}(b+c)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}(b+c)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} \sum_{s=0}^k C_k^s b^{k-s} c^s$

$\left(1 + x + x^3\right)^6$

$a = 1, b = x, c = x^3, n = 6$

$\sum_{k=0}^6 C_n^k \sum_{s=0}^k C_k^s x^{k-s}(x^3)^s = \sum_{k=0}^6 \sum_{s=0}^k C_n^k C_k^s x^{k+2s}$

$$\begin{cases} k + 2s = 11 \\ 0 \leqslant s \leqslant k \leqslant 6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant s \leqslant 5$$

$$\begin{cases} s = 0 \\ k = 11 > 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ k = 9 > 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ k = 7 > 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 3 \\ k = 5 \end{cases}$$

$k + 2s = 11$

$C_6^5 \cdot C_5^3 = \frac{6!}{5!1!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 60.$

Ответ: 60.

▷ **4.** Найдите, по крайней мере, пару троек (m, n, k) различных натуральных чисел, таких что $\frac{1}{2025} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$.

Решение:

$2025 = 5^2 \cdot 3^4 = 1 \cdot 25 \cdot 81 = 3 \cdot 5 \cdot 135$

а) $\frac{1}{2025} = \frac{1}{x} + \frac{1}{25x} + \frac{1}{81x} = \frac{2025+81+25}{2025x} = \frac{2131}{2025x} = \frac{1}{2025}$ $x = 2131$

$(2131; 53275; 172611)$

НОК$(a, b, c) = 2025$

$a = 81, b = 45, c = 75$

б) $\frac{1}{2025} = \frac{1}{ax} + \frac{1}{bx} + \frac{1}{cx} = \frac{1}{81x} + \frac{1}{45x} + \frac{1}{75x} = \frac{25+45+27}{2025x} = \frac{97}{2025x} = \frac{1}{2025}$ $x = 97$

$(7857; 4365; 7275)$

▷ **5.** В каждой вершине треугольной пирамиды написаны некоторые числа. На каждом ребре написано число равное сумме чисел, стоявщих на его концах. Известно, что сумма чисел на всех ребрах равна a и сумма квадратов равна b. Чему равны сумма их кубов, если $a = 3$, а $b = 3$?

Решение:

$(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) + (x_2 + x_4) + (x_3 + x_4) = a$

$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = a$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{a}{3}$ $b = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 + (x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 + (x_3 + x_4)^2 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \underbrace{2(x_1x_2 + \cdots + x_3x_4)}_{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)} =$

$= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \Rightarrow$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{b - \frac{a^2}{9}}{2} = \frac{9b - a^2}{18}$

$(x_1 + x_2)^3 + (x_1 + x_3)^3 + (x_1 + x_4)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_2 + x_4)^3 + (x_3 + x_4)^3 =$

$= (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+2x_3x_4+x_4^2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4)+$

$+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_3+x_3^2+x_2^2+2x_2x_4+x_4^2-x_1x_2-x_1x_4-x_2x_3-x_3x_4)+$

$+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_4+x_4^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4-x_3x_4) =$

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left[3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\right] = \frac{a}{3} \cdot \frac{9b - a^2}{18} \cdot 3 = \frac{a(9b - a^2)}{18}$

$a = 3, b = 3 \Rightarrow \frac{a(9b-a^2)}{18} = \frac{3 \cdot (9 \cdot 3 - 3^2)}{18} = 3$

Ответ: 3.

▷ **6.** Дана прямоугольная пирамида $SABC$, известно, что SB - высота этой пирамиды, $\angle ABC = \alpha$ и $SB = AC$. На SB как на диаметре построили сферу, она пересекает SA и SC в V и L соответственно. Вычислите объём пирамиды $SMBL$, если $SB = h$ и объём ABC равен V. ($\alpha = 60°, h = \sqrt[3]{3}, V = \frac{1}{3}$)

Решение:

Решим задачу в общем случае. Проведём BM и BL в соответствующих боковых гранях, заметим то, что $\angle BMS$ и $\angle BLS$ вписанные углы, опирающиеся на диаметр, следовательно, они прямые, то есть BM и BL - высоты из прямого угла в $\triangle SAC$ и $\triangle ACB$ соответственно. Обозначим $AB = a$, $BC = b$, тогда из соотношений в прямоугльном треугольнике знаем, что

$$\frac{SM}{MA} = \frac{SB^2}{AB^2} = \frac{h^2}{a^2} \quad \frac{SL}{LC} = \frac{SB^2}{BC^2} = \frac{h^2}{b^2}$$

Тогда раз пирамиды $SABC$ и $SMBL$ имеют общий трехгранный угол, то их объёмы связаны следующим соотношением

$$\frac{V_{SMBL}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SL}{SC}$$

$$V_{SMBL} = \frac{h^4}{(h^2 + a^2)(h^2 + b^2)} \cdot V$$

Запишем формулу объёма $SABC$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SB \cdot S_{ABC}$$

$$V = \frac{1}{6} h \cdot ab \sin\alpha$$

$$ab = \frac{6V}{h \sin\alpha}$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + 2ab\cos\alpha$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + \frac{12V\cos\alpha}{h\sin\alpha}$$

Теперь подставим получившиеся выражения в формулу для объёма $SMBL$ и применив теорему Пифагора, получим

$$V_{SMBL} = \frac{h^4 V}{(h^2 + a^2)(h^2 + b^2)} = \frac{h^4 V}{h^4 + h^2(a^2 + b^2) + (ab)^2} =$$

$$= \frac{h^4 V}{2h^4 + \frac{12Vh\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{36V^2}{h^2\sin^2\alpha}} = \frac{h^6 V \sin^2\alpha}{2h^6\sin^2\alpha + 12Vh^3\cos\alpha\sin\alpha + 36V^2}$$

Подставляя значения в формулу, получаем ответ

$$\frac{9}{12\sqrt{3} + 70}.$$

Ответ: $\frac{9}{12\sqrt{3}+70}$.

▷ **7.** Из полного набора трехзначных чисел наудачу выбирается одно (числа не могут начинаться с цифры 0). Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке убывания слева направо

б) в порядке неубывания слева направо

Решение:

а) Пусть событие A - получение трёхзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке убывания слева направо (например, 320, 951). Общее количество трёхзначных чисел N равно количеству чисел от 100 до 999, поэтому $n = 999 - 100 + 1 = 900$. Любые 3 различные цифры, извлеченные из данных 10 цифр: $0, 1, \ldots, 8, 9$ - можно единственным способом упорядочить по убыванию, поэтому число благоприятствующих событий событию A исходов

$$M = C_{10}^3 = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Следовательно,

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{120}{900} = \frac{4}{30} = 0,13333.$$

б) Все трёхзначные числа, цифры которых расположены в порядке неубывания, могут содержать любые три цифры из следующих девяти: $9, 8, \ldots, 2, 1$, возможно, с повторениями. Следовательно,

$$M = \overline{C}_9^3 = C_{9+3-1}^3 = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = 165.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}.$$

Ответ: а) $\frac{4}{30} = 0,13333$, б) $\frac{11}{60} = 0,1833$.

▷ **8.** Пусть x, y, z - положительные вещественные числа, удовлетворяющие равентсву $x + y + z = 1$. Найдите наименьшее положительное значение a такое, что для любой тройки (x, y, z) выполняется неравенство $\frac{a^{1-x}}{1-x} + \frac{a^{1-y}}{1-y} + \frac{a^{1-z}}{1-z} \geqslant \frac{405}{2}\sqrt[3]{45}$.

Решение:

Оценим наименьшее значение выражения $\frac{a^{1-x}}{1-x} + \frac{a^{1-y}}{1-y} + \frac{a^{1-z}}{1-z}$

Применим неравенство о средних для трех чисел:

$\frac{a^{1-x}}{1-x} + \frac{a^{1-y}}{1-y} + \frac{a^{1-z}}{1-z} \geqslant \sqrt[3]{a^{3-(x+y+z)}}\sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)}} = 3a^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}}$

Теперь заметим, что $1 - x = y + z$, $1 - y = z + x$, $1 - z = x + y$. Обозначим $y + z = u$, $z + x = v$, $x + y = t$. Тогда $u + v + t = 2$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{uvt}}$.

По неравенству о средних

$$\frac{2}{3} = \frac{u + v + t}{3} \geqslant \sqrt[3]{uvt}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{uvt}} \geqslant \frac{3}{2}$$

Таким образом, наименьшее значение данного выражения равно $\frac{9}{2}a^{\frac{2}{3}}$ (равенство при $x = y = z = \frac{1}{3}$). Это возрастающая функция, а потому теперь достаточно решить уравнение

$$\frac{9}{2}a^{\frac{2}{3}} = \frac{405}{2}\sqrt[3]{45}$$

$$a = 2025$$

Ответ: 2025.

▷ **9.** Назовем словом любую последовательность любых символов. Андрей играет в игру: в начале ему выдается набор из 2026 слов, состоящих не более, чем из 2025 букв. Андрей может за 1 ход приписать к любому слову последовательность, состоящую ровно из 2025 букв, тем самым изменив это слово. Игра заканчивается, если через несколько ходов Андрей может получить набор, в котором найдутся два одинаковых слова. Всегда ли Андрей может выиграть? Если ответ положительный, то найдите, за какое наименьшее число ходов Андрей выигрывает независимо от исходного набора юслов.

Решение:

Очевидно, что в данном наборе слов найдутся два слова s и w, состоящие из одинакового числа букв (всего слов 2026, а различных длин не более 2025, поскольку длины слов не превосходят 2025). Длину слова любого слова x будем обозначать $|x|$. Тогда получаем $|s| = |w|$. Если $s = w$, то Андрей выиграл. Если $s \neq w$, то он будет придерживаться следующей стратегии: первым ходом к слову s он припишет любую последовательность l из 2025 букв, оканчивающуюся словом w, тогда слово s превратится в слово sl. Вторым ходом Андрей припишет к слову w слева первые 2025 букв слова sl (пусть эти буквы составляют последовательность t.) Тогда получаем $tw = sl$.

Итак, уже доказано, что Андрею для победы требуется не более 2 ходов. Докажем, что за 1 ход выиграть получится не всегда. Для этого рассмотрим набор из слов вида $a, aa, \ldots, a\ldots a$ (2025 букв a) и b. Андрею точно придется сделать хотя бы 1 ход, поскольку одинаковых слов в исходном наборе нет. Сделав первый ход, Андрей увеличит длину какого-то из слов на 2025. Тогда в этом слове будет не менее 2026 букв (поскольку в нашем наборе наименьшее число букв в слове равно 1). Это слово не будет равно ни одному остальных из имеющихся, поскольку оно длиннее всех слов исходного набора. Все остальные слова не равны по условию. Таким образом, за 1 ход добиться победы не получится, следовательно, потребуется не менее двух ходов для гарантированной победы.

$\triangleright$ **10.** Сжё фщёьё мдчё ьёпгфщлуёеё тщг тлюлцг фнервгг $f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1$. Еёйбгжз зо езтлбугхедз жлирг.

Решение:

Букв в русском алфавите 33.

Итак, Вы догадались, что функция $f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1$ и есть ключ к шифровке. Здесь скобки { } обозначают дробную часть числа. Функция $f(x)$ переводит целое число от 1 до 33 в другое целое число (т.е. букву по месту в алфавите в другую букву). Для расшифровки использовать функцию не получается, значит, она была использована для шифровки. Составим таблицу дешифровки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
с	д	ц	и	ы	н	а	т	е	ч	й	ь	о	б	у	ё	ш

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
к	э	п	в	ф	ж	щ	л	ю	р	г	х	з	ъ	м	я

Получилась фраза "Эта фраза была зашифрована при помощи функции $f(x) = 33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1$. Найдите её неподвижные точки. "

Найдём неподвижные точки.

$$f(x) = x$$

$$33\left\{\frac{7x-1}{33}\right\} + 1 = x; \quad \left\{\frac{7x-1}{33}\right\} = \frac{x-1}{33};$$

$$\frac{7x-1}{33} - \left[\frac{7x-1}{33}\right] = \frac{x-1}{33}; \quad \left[\frac{7x-1}{33}\right] = \frac{2x}{11}$$

Обозначим $\left[\frac{7x-1}{33}\right] = n$, где n - целое число. Тогда $\frac{2x}{11} = n \Rightarrow x = \frac{11n}{2}$. Подставим в выражение

$$\left[\frac{\frac{77n}{2} - 1}{33}\right] = n; \quad \left[\frac{77n-2}{66}\right] = n; \quad \left[n + \frac{11n-2}{66}\right] = n,$$

Следовательно, $0 \leqslant \frac{11n-2}{66} < 1$. Отсюда $\frac{2}{11} \leqslant n < \frac{68}{11}$, т.е. $1 \leqslant n \leqslant 6$.

Получаем 6 точек $\frac{11}{2}, 11, \frac{33}{2}, 22, \frac{55}{2}, 33$.

Ответ: $\frac{11}{2}, 11, \frac{33}{2}, 22, \frac{55}{2}, 33$.