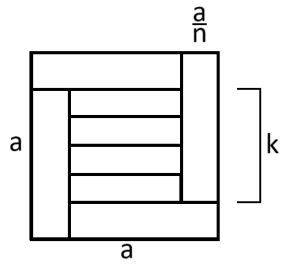
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
11 класс (Азия)

▷ **1.** Разрежьте квадрат на 33 прямоугольника, необязательно одинаковых, таких, что периметр каждого из них равен полупериметру исходного квадрата.

Решение:



Периметр квадрата равен $P = 4a$.

$\frac{n-2}{n}a \times \frac{n-2}{n}a \cdot \frac{1}{k}$

$p_1 = 2\left(\frac{n-1}{n}a + \frac{a}{n}\right) = 2a$

$k + 4 = 22$

$\frac{n-2}{n} \cdot \frac{k+1}{k} = 1$

$nk - 2k + n - 2 = nk$

$n = 2k + 2 = 2(N-4) + 2 = 2N - 6$

Если $N = 33 \Rightarrow n = 60, k = 29$

$\frac{59}{60}a : \frac{1}{60}a \Rightarrow 4$

$\frac{29}{30}a : \frac{1}{30}a \Rightarrow 29$

$N = 4 + 29 = 33$

▷ **2.** Числа от 1 до N выписаны подряд в вершины правильного N-угольника (по часовой стрелке). Начиная с первого числа отмечается каждое k-ое число (т.е. числа 1, $k+1$, $2k+1$, $\ldots$), причём при повторных оборотах учитываются и отмеченные числа. Отметки продолжаются до тех пор, пока не окажется, что все числа, которые отмечаются уже отмечены. Сколько чисел останется без отметки, если $N = 1000$, $k = 7$?

Решение:

$N = 1000,\ k = 13$

1 оборот $(1, 8, 15, \ldots, 995)$ $995 = 7 \cdot 142 + 1$

отмечены 143 числа $995 + 7 - 1000 = 2$

2 оборот $(2, 9, 16, \ldots, 996)$ $996 = 7 \cdot 142 + 2$

отмечены 143 числа $996 + 7 - 1000 = 3$

3 оборот $(3, 10, 17, \ldots, 997)$ $997 = 7 \cdot 142 + 3$

отмечены 143 числа $997 + 7 - 1000 = 4$

4 оборот $(4, 11, 18, \ldots, 998)$ $998 = 7 \cdot 142 + 4$

отмечены 143 числа $998 + 7 - 1000 = 5$

5 оборот $(5, 12, 19, \ldots, 999)$ $999 = 7 \cdot 142 + 5$

отмечены 143 числа $999 + 7 - 1000 = 6$

6 оборот $(6, 13, 20, \ldots, 1000)$ $1000 = 7 \cdot 142 + 6$

отмечены 143 числа $1000 + 7 - 1000 = 7$

7 оборот $(7, 14, 21, \ldots, 994)$ $994 = 7 \cdot 142$

отмечены 143 числа $994 + 7 - 1000 = 1$

$\Rightarrow$

1 оборот $(1, 8, 15, \ldots, 995)$ $955 = 7 \cdot 142 + 1$

отмечены 143 числа $995 + 7 - 1000 = 2$

$\ldots$

Значит, все числа отмечены.

Ответ: 0.

▷ **3.** Найдите коэффициент при x^{13} у многочлена $\left(1 + x^2 + x^3\right)^7$.

Решение:

$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{k-1}b+\dots+C_n^{n-2}a^2b^{n-2}+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n=\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}b^k$

$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$(a+b+c)^n=\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}(b+c)^k=\sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}\sum_{s=0}^k C_k^s b^{k-s}c^s$

$\left(1+x^2+x^3\right)^7$

$a=1, b=x^2, c=x^3, n=7$

$\sum_{k=0}^7 C_7^k(1+x^2)^k(x^3)^{7-k}=\sum_{k=0}^7 x^{(7-k)3}C_7^k\sum_{s=0}^k C_k^s x^{2s}=\sum_{k=0}^7\sum_{s=0}^k C_k^s C_7^k x^{2s+21-3k}\Rightarrow$

$0\leqslant s\leqslant k\leqslant 7$

$21+2s-3k=13$

$8=3k-2s$

$2(s+4)=3k$

$0\leqslant 2(s+4)\leqslant 21$

Подходящие пары $s=2, k=4$ и $s=5, k=6$.

$C_k^s C_7^k=\frac{7!}{k!(7-k)!}\cdot\frac{k!}{s!(k-s)!}=\frac{7!}{(7-k)!s!(k-s)!}$

$\frac{7!}{3!2!2!}+\frac{7!}{1!5!1!}=7\cdot6\cdot5+7\cdot6=210+42=252$

Ответ: 252.

▷ **4.** Найдите, по крайней мере, пару троек (m,n,k) различных натуральных чисел, таких что $\frac{1}{1001}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}$.

Решение:

$1001=7\cdot11\cdot13$

а) $\frac{1}{1001}=\frac{1}{7x}+\frac{1}{11x}+\frac{1}{13x}=\frac{143+91+77}{1001x}=\frac{311}{1001x}=\frac{1}{1001}$ $x=311$

$(2177;3421;4043)$

б) $\frac{1}{1001}=\frac{1}{x}+\frac{1}{13x}+\frac{1}{77x}=\frac{1001+77+13}{1001x}=\frac{1091}{1001x}=\frac{1}{1001}$ $x=1091$

$(1091;14183;84007)$

▷ **5.** В каждой вершине треугольной пирамиды написаны некоторые числа. На каждом ребре написано число равное сумме чисел, стоявщих на его концах. Известно, что сумма чисел на всех ребрах равна a и сумма квадратов равна b. Чему равны сумма их кубов, если $a=6$, а $b=6$?

Решение:

$(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_1+x_4)+(x_2+x_3)+(x_2+x_4)+(x_3+x_4)=a$

$3(x_1+x_2+x_3+x_4)=a$

$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{a}{3}$ $b=(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_1+x_4)^2+(x_2+x_3)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3+x_4)^2=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+\underbrace{2(x_1x_2+\dots+x_3x_4)}_{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)}=$

$=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\Rightarrow$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{b-\frac{a^2}{9}}{2}=\frac{9b-a^2}{18}$

$(x_1+x_2)^3+(x_1+x_3)^3+(x_1+x_4)^3+(x_2+x_3)^3+(x_2+x_4)^3+(x_3+x_4)^3=$

$=(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2+2x_3x_4+x_4^2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4)+$

$+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_3+x_3^2+x_2^2+2x_2x_4+x_4^2-x_1x_2-x_1x_4-x_2x_3-x_3x_4)+$

$+(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1^2+2x_1x_4+x_4^2+x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_4-x_3x_4)=$

$(x_1+x_2+x_3+x_4)\left[3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\right]=\frac{a}{3}\cdot\frac{9b-a^2}{18}\cdot3=\frac{a(9b-a^2)}{18}$

$a=6, b=6\Rightarrow\frac{a(9b-a^2)}{18}=\frac{6\cdot(9\cdot6-6^2)}{18}=6$

Ответ: 6.

▷ **6.** Дана прямоугольная пирамида $SABC$, известно, что SB - высота этой пирамиды, $\angle ABC=\alpha$ и $SB=AC$. На SB как на диаметре построили сферу, она пересекает SA и SC в M и L соответственно. Вычислите объём пирамиды $SMBL$, если $SB=h$ и объём $SABC$ равен V. ($\alpha=90°, h=\sqrt{2}, V=\frac{1}{\sqrt{6}}$)

Решение:

Решим задачу в общем случае. Проведём BM и BL в соответствующих боковых гранях, заметим то, что $\angle BMS$ и $\angle BLS$ вписанные углы, опирающиеся на диаметр, следовательно, они прямые, то есть BM и BL - высоты из прямого угла в $\triangle SAC$ и $\triangle ACB$ соответственно. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, тогда из соотношений в прямоуглньном треугольнике знаем, что

$$\frac{SM}{MA}=\frac{SB^2}{AB^2}=\frac{h^2}{a^2}\quad\frac{SL}{LC}=\frac{SB^2}{BC^2}=\frac{h^2}{b^2}$$

Тогда раз пирамиды $SABC$ и $SMBL$ имеют общий трехгранный угол, то их объёмы связаны следующим соотношением

$$\frac{V_{SMBL}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SL}{SC}$$

$$V_{SMBL} = \frac{h^4}{(h^2+a^2)(h^2+b^2)} \cdot V$$

Запишем формулу объёма $SABC$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SB \cdot S_{ABC}$$

$$V = \frac{1}{6} h \cdot ab \sin\alpha$$

$$ab = \frac{6V}{h\sin\alpha}$$

По теореме косинусов для $\triangle ABC$:

$$h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + 2ab\cos\alpha$$

$$a^2 + b^2 = h^2 + \frac{12V\cos\alpha}{h\sin\alpha}$$

Теперь подставим получившиеся выражения в формулу для объёма $SMBL$ и применив теорему Пифагора, получим

$$V_{SMBL} = \frac{h^4 V}{(h^2+a^2)(h^2+b^2)} = \frac{h^4 V}{h^4 + h^2(a^2+b^2) + (ab)^2} =$$

$$= \frac{h^4 V}{2h^4 + \frac{12Vh\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{36V^2}{h^2\sin^2\alpha}} = \frac{h^6 V \sin^2\alpha}{2h^6\sin^2\alpha + 12Vh^3\cos\alpha\sin\alpha + 36V^2}$$

Подставляя значения в формулу, получаем ответ

$$\frac{4\sqrt{6}}{11}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{6}}{11}$.

▷ **7.** Из полного набора трехзначных чисел наудачу выбирается одно (числа не могут начинаться с цифры 0). Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются:

а) в порядке возрастания слева направо

б) в порядке невозрастания слева направо

Решение:

а) Пусть событие A - получение трёхзначного числа, цифры в записи которого расположены в порядке возрастания слева направо (например, 123, 238). Очевидно, что в записи таких чисел не должно быть цифры 0. Общее количество трёхзначных чисел $N = 900$. Любые 3 различные цифры, из которых событию A благоприятствуют

$$M = C_9^3 = \frac{9!}{6!3!} = 84 \ .$$

Поэтому,

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{84}{900} = \frac{7}{75} = 0,0933.$$

б) Все трёхзначные числа, цифры которых расположены в порядке невозрастания, могут содержать любые три цифры из следующих девяти: $0, 1, \ldots, 8, 9$, возможно, с повторениями. Следовательно,

$$M = \overline{C}_{10}^3 - 1 = C_{10+3-1}^3 - 1 = C_{12}^3 - 1 = \frac{12!}{3!9!} - 1 = 220 - 1 = 219.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{219}{900} = \frac{73}{300} = 0,2433.$$

Заметим, что единица вычитается из числа $\overline{C}_{10}^3$ потому, что среди сочетаний повторения из 10 по 3 имеется и "трёхзначное" число 000.

Ответ: а) $\frac{7}{75} = 0,0933$, б) $\frac{73}{300} = 0,2433$.

▷ **8.** Дана функция $f(x) = \frac{b^x}{x^2}$, где b — некоторое положительное число. Найдите такое значение b, что для всякой тройки (u, v, t) такой, что $u+v+t = 9$ выполняется неравенство $f(u) + f(v) + f(t) \geqslant 9$

Решение:

Наша задача - найти наименьшее $b > 0$, такое, что $\frac{b^u}{u^2} + \frac{b^v}{v^2} + \frac{b^t}{t^2} \geqslant 9$ для всех указанных (u, v, t). Оценим для этого наименьшее значение $f(u)+f(v) + f(t)$. По неравенству о средних для трех чисел получаем

$\frac{b^u}{u^2} + \frac{b^v}{v^2} + \frac{b^t}{t^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^{u+v+t}}{(uvt)^2}} = 3b^3\frac{1}{(\sqrt[3]{uvt})^2}$

По неравенству о средних можно оценить $\sqrt[3]{uvt} \leqslant \frac{u+v+t}{3} = 3$. Тогда $\frac{1}{(\sqrt[3]{uvt})^2} \geqslant \frac{1}{9}$.

Таким образом, наименьшее значение $f(u)+f(v)+f(t)$ равно $\frac{b^3}{3}$, равенство достигается при $u = v = t = 3$. Функция $g(b) = \frac{b^3}{3}$ возрастает, поэтому остаётся решить уравнение

$$\frac{b^3}{3} = 9$$

$$b = 3$$

Ответ: 3.

▷ **9.** Назовем словом любую последовательность любых символов. Андрей играет в игру: в начале ему выдается набор из 2026 слов, состоящих не менее, чем из 2025 букв. Андрей может за 1 ход приписать к любому слову последовательность, состоящую ровно из 2025 букв, тем самым изменив это слово. Игра заканчивается, если через несколько ходов Андрей может получить набор, в котором найдутся два одинаковых слова. Всегда ли Андрей может выиграть?

Решение:

Обозначим для любого слова x через $|x|$ его длину (число букв в нем). Так как различных остатков по модулю 2025 ровно 2025, а слов имеется 2026, то найдутся два слова s и w такие, что $|s| \equiv |w| \pmod{2025}$. Пусть остаток от деления $|s|$ на 2025 равен k. Если $k = 0$, то Андрей последовательно приписывает блоками по 2025 букв справа к слову w слово s, а затем последовательно приписывает к слову s слово w, тоже блоками по 2025.

Пусть теперь $k \neq 0$. В слове s выделим первые k символов. Пусть они образуют слово l. Тогда первым ходом Андрей приписывает к слову w справа любую последовательность из 2025 букв t, оканчивающуюся на l, и вместо слова w получится слово wt. Тогда получаем, что $|wt| \equiv |s| \pmod{2025}$ и конец слова wt такой же, как начало слова s, причем совпадение не менее, чем по $|l|$ буквам. Представим слово $wt = bl$ и слово $s = la$. Тогда длины слов b и a кратны 2025. Тогда можно к слову s несколькими операциями приписать слово b слева, а к слову wt слово a справа.

▷ **10.** Хад йцдкд илюд кдэпйцмндзд сцп смгмвп йезщупп $f(x) = 33\left\{\frac{5x-1}{33}\right\} + 1$. Здфчпаь ьб зьсмчнпёзль амшщп, д н маньаь кдспэпаь ыегге ныьо зьсмчнпёзло амшьщ.

Решение:

Букв в русском алфавите 33.

Итак, Вы догадались, что функция $f(x) = 33\left\{\frac{5x-1}{33}\right\} + 1$ и есть ключ к шифровке. Здесь скобки $\{\ \}$ обозначают дробную часть числа. Функция $f(x)$ переводит целое число от 1 до 33 в другое целое число (т.е. букву по месту в алфавите в другую букву). Для расшифровки использовать функцию не получается, значит, она была использована для шифровки. Составим таблицу дешифровки:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
а	б	в	г	д	е	ё	ж	з	и	й	к	л	м	н	о	п
т	ё	щ	м	а	у	ж	ъ	н	б	ф	з	ы	о	в	х	и

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
р	с	т	у	ф	х	ц	ч	ш	щ	ъ	ы	ь	э	ю	я
ь	п	г	ц	й	э	р	д	ч	к	ю	с	е	ш	л	я

Получилась фраза “Эта фраза была зашифрована при помощи функции $f(x) = 33\left\{\frac{5x-1}{33}\right\} + 1$. Найдите её неподвижные точки, а в ответе запишите сумму всех неподвижных точек. ”

Найдем все x, для которых верно $33\left\{\frac{5x-1}{33}\right\} + 1 = x$. Перепишем уравнение следующим образом:

$\left[\frac{5x-1}{33}\right] = \frac{5x-1}{33} - \left\{\frac{5x-1}{33}\right\} = \frac{5x-1}{33} - \frac{x-1}{33} = \frac{4x}{33}$. Будем искать решение в виде $x = \frac{33n}{4}$, где n - целое число. Тогда $\left[\frac{5n}{4} - \frac{1}{33}\right] = n$, откуда $n \leqslant \frac{5n}{4} - \frac{1}{33} < n+1$.

Этому уравнению удовлетворяют $n = 1, 2, 3, 4$.

Неподвижные точки функции $\frac{33}{4}$, $\frac{33}{2}$, $\frac{99}{4}$, 33, их сумма $\frac{165}{2} = 82,5$.

Ответ: $82,5$.