

Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
5 класс



▷ 1. Имеется 2025 яблок. Имеются весы, с помощью которых возможно узнать вес любых двух яблок. Как за 1014 взвешиваний узнать общий вес всех яблок?

Решение: Так как число яблок нечетно, их не получится разбить на пары. Определим сначала вес каких-то трех яблок. Взвесим яблоки 1 и 2, потом 2 и 3, затем 1 и 3. Сложим полученные веса и разделим на два, ведь каждое из этих яблок мы взвешивали дважды. Нам понадобилось 3 взвешивания. Оставшиеся $2025 - 3 = 2022$ яблока разобьем на пары и взвесим парами. Еще 1011 взвешивания. Итого 1014.

Ответ: 1014.

▷ 2. Четыре землекопа за четыре часа выкопали четыре ямы. Сколько ям выкопают 24 землекопов за два с половиной часа?

Решение: Бригада из 4 землекопов выкапывает 4 ямы, а значит за 1 час 1 яму, 24 землекопа за 1 час выкапывают 6 ям, а 2,5 часа 15 ям.

Ответ: 15.

▷ 3. За один ход число, написанное на доске, разрешается либо заменить на удвоенное, либо стереть у него последнюю цифру. Вначале на доске написано число 458. Как за несколько ходов получить число 14? Укажите по крайней мере две цепочки решения изменяя от 458 до 14 так, чтобы все внутренние числа были различны.

Решение: $458 \Rightarrow 45 \Rightarrow 90 \Rightarrow 180 \Rightarrow 360 \Rightarrow 720 \Rightarrow 1440 \Rightarrow 144 \Rightarrow 14$
 $458 \Rightarrow 916 \Rightarrow 1832 \Rightarrow 3664 \Rightarrow 7328 \Rightarrow 732 \Rightarrow 73 \Rightarrow 7 \Rightarrow 14$

▷ 4. Газету 8 раз сложили пополам (поочередно вдоль и поперек), после чего оторвали от нее 4 угла. Если теперь развернуть газету, то сколько в ней будет дырок? (Оторванный кусок на границе газеты дыркой не считается.)

Решение: Газету сгибали 4 раз вдоль и 4 раз поперек. С каждым сгибом число частей, на которые газета делится этими сгибами, удваивается. Поэтому если газету согнуть 4 раза в одном направлении, то газета разделится на $2^4 = 16$ частей, а число сгибов (промежутков между частями) будет на один меньше, т.е. 15. Значит, в нашем случае всего получился 15 продольных сгибов и 15 поперечных. На пересечении каждого двух сгибов будет дырка. Всего получается $15^2 = 225$ дырок.

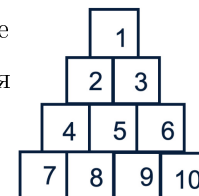
Ответ: 225.

▷ 5. Разложите на два последовательных натуральных множителя число 44442222.

Решение: $44442222 = 2 \cdot 22221111 = 2(2 \cdot 1111 \cdot 10000 + 1111) = (1111 \cdot 20001) \cdot 2 = 3333 \cdot 6667 \cdot 2$

$44442222 = 2(2 - 11110000 + 1111) = 2 \cdot 11111 \cdot 20001 = 2 \cdot 1111 \cdot 3 \cdot 6667 = 6666 \cdot 6667$

▷ 6. Переложите пирамиду из 10 кубиков так, чтобы ее форма осталась прежней, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками.



Решение:

Возможное расположение кубиков показано на рисунке.

Ключевой момент в решении состоит в том, что кубик 3 нужно поставить в угол.

▷ 7. Девять одинаковых воробьев склевали меньше, чем 1001 зернышко, а десять таких же воробьев склевали больше, чем 1100 зернышек. По сколько зернышек склевывает каждый воробей?

Решение: По условию $9n$ меньше 1001 или меньше чем $111\frac{2}{9}$. $10n$ больше 1100 или n больше 110. Только $n = 111$ удовлетворяет этим условиям.

Ответ: 111.

▷ 8. Настенные часы с часовой и минутной стрелками нельзя заводить если хотя бы одна из стрелок находится между 3 и 4 или между 8 и 9. Сколько в сутках времени, когда эти часы можно заводить?

Решение: В каждом часе есть 5 мин, когда минутная стрелка находится между 3 и 4, и 5 мин, когда она находится между 8 и 9. Значит, всего в сутках $24 \cdot 10$ мин времени, когда часы нельзя заводить из-за минутной стрелки. Теперь посчитаем, сколько времени мешает заводу часовая стрелка. За сутки стрелка обходит два полных круга. В каждом круге в течение одного часа она находится между 3 и 4 и одного часа между 8 и 9, однако в каждом из этих часов мы уже учли 10 мин, когда заводу препятствует минутная стрелка. Поэтому в сутках получается $2 \cdot 2 \cdot 50$ мин времени, когда часы нельзя заводить исключительно из-за часовой стрелки. Подводим итог:

$$24 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 50 = 440 \text{ мин} = 7 \text{ ч } 20 \text{ мин.}$$

$$24 \text{ ч} - 7 \text{ ч } 20 \text{ мин} = 16 \text{ ч } 40 \text{ мин.}$$

Ответ: 16 ч 40 мин.

▷ 9. Восстановите действие

$$\begin{array}{r} *2*5* \quad | \quad 325 \\ - \quad *** \quad | \quad 1** \\ \hline *0** \\ - \quad *9** \\ \hline \quad *5* \\ \quad - \quad *5* \\ \hline \quad \quad 0 \end{array}$$

Решение: Заметим, что если мы восстановим две цифры в частном, то сможем посчитать делимое и, значит, восстановить все действия при делении уголком. Последняя цифра частного должна быть такой, чтобы при умножении на 325 получалось трехзначное число с цифрой 5 в середине. Попадает только 2. Итак частное имеет вид $1*2$. Теперь восстановим последние цифры в третьей и четвертой строках на рисунке. Ясно, что в третьей строке стоит цифра 5 (она сносится из первой строки), а в четвертой строке может быть только 0, чтобы при вычитании получилась последняя цифра 5. Наконец, можно восстановить вторую цифру в частном, которая при умножении на 325 должна давать четырехзначное число вида $*9*0$. Проверяем цифры 4, 6 и 8. Подходит только 6. Стало быть, частное равно 162.

Ответ: $52650 : 325 = 162$.

▷ 10. Жители города А - правдолюбцы, города Б - лжецы. По дороге из А в Б жители обоих городов поставили указатели, на которых по направлению своего города написали "Путь в город А". Какой единственный вопрос надо задать случайному прохожему (жителю одного из этих городов), чтобы, получив ответ "да" или "нет", узнать направление в город А?

Решение: Надо задать незнакомцу вопрос, показывая на любой из двух указателей: "Этот указатель показывает направление в ваш город?"

Если указатель показывает направление в город А, то правдолюбец ответит "да", и лжец ответит "да". Если же указатель ведет в город Б, то правдо-

любец ответит “нет”, и лжец ответит “нет”.