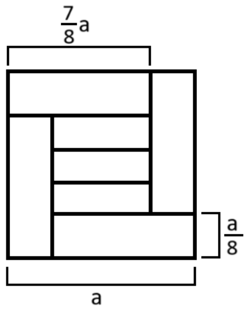
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
7 класс

▷ **1.** Разрежьте квадрат на 7 прямоугольников, не обязательно одинаковых, каждый из которых имеет периметр, равный полупериметру исходного квадрата.

Решение:



$P = 2a$

$\frac{7}{8}a \times \frac{a}{8}$:$_1$

$\frac{3}{4}a \times \frac{a}{4}$:$_2$

$P(_1) = P_1 = 2a = 2(\frac{7}{8}a + \frac{1}{8}a)$

$P(_2) = P_2 = 2a = 2(\frac{3}{4}a + \frac{a}{4})$

▷ **2.** Разложите на множители

$$2025x^4 - 2024x^3 + 2025x^2 + 1$$

Решение: $2025x^4 - 2024x^3 + 2025x^2 + 1 = 2025(x^4 - x^3 + x^2) + x^3 + 1 = 2025x^2(x^2 - x + 1) + (x+1)(x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)(2025x^2 + x + 1)$

▷ **3.** Андрей записал на доску два натуральных числа. После этого он стал по очереди записывать на доску то НОК, то НОД (сначала НОК) двух последних записанных чисел. Какое наибольшое количество различных чисел могло быть записано на доске?

Решение: Пусть a_1, a_2 - первые записанные числа. Тогда $a_3 =$ НОК (a_1, a_2), поэтому a_2 делится на a_3, и потому $a_4 =$ НОД $(a_3, a_2) = a_2$. Теперь $a_5 =$ НОК $(a_3, a_4) =$ НОК $(a_3, a_2) = a_3$.
И так далее, получаем, что любой член, начиная с a_2 равен либо a_2, либо a_3. Поэтому больше трех различных чисел в последовательности быть не может. Три различных числа можно получить, если изначально на доске будут записаны, например $a_1 = 4$, $a_2 = 6$, тогда $a_3 = 12$.

▷ **4.** На доске записывают последовательность чисел $1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, \ldots$. $a_{n+1} = a_n + S(a_n)$, $S(a)$ - сумма цифр числа a, $n = \overline{1, \infty}$, $a_1 = 1$. Будет ли записано 16-разрядное число $N = 2025202420232022$.

Решение: Составляем последовательных b_n остатков при делении на 3.
$b_n \in \{1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots\}$

$$\begin{cases} 1, \textbf{если n не четное} \\ 2, \textbf{если n четное} \end{cases}$$

1) $a_n \equiv 1(mod3) \Rightarrow a_{n+1} = a_n - S(a_n) \equiv 2(mod3)$

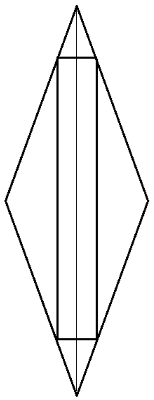
2) $a_n \equiv 2(mod3) \Rightarrow a_{n+1} = \equiv 1(mod3)$

$$S(N) = (2 \cdot 9 + 0 \cdot 4 + 5 + 4 + 3) = 30$$

$$S(a_n) \neq 0$$

▷ **5.** Существуют ли два таких выпуклых четырехугольника, что один расположен внутри другого и при этом сумма диагоналей внутреннего четырехугольника больше суммы диагоналей внешнего?

Решение: Рассмотрим ромб с диагоналями d и $10d$ и поместим внутрь него прямоугольник со сторонами параллельными диагоналям ромба. Пусть большая сторона прямоугольника равна $9d$, а меньшая подобрана таким образом, чтобы прямоугольник не “вылезал” за пределы ромба. Тогда сумма диагоналей ромба равна $d + 10d = 11d$, а в прямоугольнике каждая диагональ больше его стороны $9d$, и поэтому сумма его диагоналей больше $9d + 9d > 11d$.



▷ **6.** Числа 12, 14, 37, 65 представляют одно из решений уравнения $xy-xz+yt = 182$. Определить значением какой буквы является каждое из данных чисел.

Решение: Данное уравнение представим в виде $x(y - z) + yt = 2 \cdot 7 \cdot 13$. Отсюда следует, что при $x = 14$ число y должно делится на 7. Но это невозможно, так как ни одно из остальных трёх чисел не делится на 7. Следовательно $x \neq 14$. Аналогично убеждаемся, что $x \neq 65$. Записав данное уравнение в виде $y(x + t) - t = 2 \cdot 7 \cdot 13$, найдём, что $y \neq 14$, $y \neq 65$. Следовательно, значениями, и являются числа 12 и 37. Тогда $xy = 12 \cdot 37 = 444$ и данное уравнение примет вид $yt - xz = 262$. Одно из чисел x и y - чётное, поэтому хотя бы одно из чисел yt и xz также чётное. Но тогда из уравнения $yt - xz = 262$ следует, что другое произведение тоже чётно. Поэтому произведение yt и xz могут иметь лишь значения $12 \cdot 65$ и $37 \cdot 14$. Но $yt = xz + 262 > xz$. Следовательно, большее из чисел $12 \cdot 65$ и $37 \cdot 14$ есть yt. Отсюда $yt = 12 \cdot 65$, $xz = 37 \cdot 14$. Сопоставляя эти равенства с $xy = 12 \cdot 37$, находим $x = 12$, $y = 37$, $z = 65$, $t = 14$.

▷ **7.** Прямоугольник 7×10 разрезали на 13 прямоугольников с целочисленных сторонами. Докажите, что среди них обязательно найдутся два одинаковых.

Решение: Предположим, что все 13 прямоугольников различны. Покажем, что в этом случае сумма их площадей больше площади прямоугольника 5×9. Рассмотрим самые маленькие по площади прямоугольники:

1 клетка: 1×1

2 клетки: 1×2

3 клетки: 1×3

4 клетки: 1×4, 2×2

5 клеток: 1×5

6 клеток: 1×6, 2×3

7 клеток: 1×7

8 клеток: 1×8, 2×4

9 клеток: 1×9, 3×3

10 клеток: 1×10, 2×5

11 клеток: 1×11

12 клеток: 1×12, 2×6, 3×4

13 клеток: 1×13

Отсюда ясно, что наименьшая возможная сумма площадей 13 различных прямоугольников равна $72 > 70$ - площади исходного прямоугольника. Полученное противоречие доказывает, что должны быть одинаковые прямоугольники.

▷ **8.** В ожесточенном сражении при Трафальгаре 70% участников потеряли глаз, 75% - ухо, 80% - руку, 85% - ногу. Каков наименьший процент числа ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

Решение: Из условия следует, что 30% участников не потеряли глаз, 25% не потеряли ухо, 20% остались с руками и 15% остались с ногами. Значит, число участников, которые сохранили глаз или ухо, или руку, или, на худой конец, ногу, не может превышать 30% + 25% + 20% + 15% = 90%. Следовательно, число ветеранов, оставшихся одновременно без глаза, уха, руки и ноги не меньше 10%. Причем, этот процент может достигаться, только если упомянутые множества из 30%, 25%, 20% и 15% не пересекаются, т. е. каждый из них сохранил только одну часть тела, а три другие потерял.

Ответ: 10%.

▷ **9.** Найти все такие пары натуральных чисел a и b, для которых выполняется такое равенство:

$$(a,b)-(a,b)=\frac{ab}{7}.$$

Решение: Обозначьте $(a,b)=x$, $(a,b)=y$, тогда $ab=xy$, и данное равенство будет иметь вид $x-y=\frac{xy}{7}$.

Преобразовав его, получим $(7-y)(7+x)=49$, где $x,y\in N$. Поскольку $7-y$ - делитель 49, то $y=6$ и $x=42$ и, следовательно $a=6$ и $b=42$ или $b=6$ и $a=42$

▷ **10.** Известно, что при некотором натуральном n число n^2+n+9 делится на 7. Каким будет остаток от деления этого числа на 49?

Решение: По условию число $(n-3)^2+7n$ делится на 7, поэтому $(n-3)^2$ делится на 7 и, следовательно, $n-3$ делится на 7. Итак, $n=7k+3$. Тогда $(n-3)^2+7n=49k^2+49k+21$.

Ответ: 21.