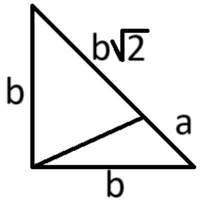
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
8 класс (Европа)

▷ **1.** С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, если известна сумма стороны квадрата и его диагонали.

Решение:



Пусть сторона квадрата a, тогда диагональ $a\sqrt{2}$. По условию известен отрезок $b = a(\sqrt{2}+1)$. Отсюда, $a = b\sqrt{2} - b$.

▷ **2.** В профсоюзе пиратов "Карамба"состоят 2025 морских разбойников. У 1420 из них есть хотя бы одно ухо, у 1057 - глаз, а у 695 счастливчиков есть и ухо, и глаз. Профсоюз решил, что члены профсоюза, которые не имеют ни уха, ни глаза, отправляются на пенсию. Сколько претендентов в профсоюзе на получение пенсии?

Решение:

Есть глаз и ухо у 1420+1057-695=1782

Значит, у 2025 - 1782 = 243.

Ответ: 243.

▷ **3.** Даны три числа. Если их все увечилить на 3, то произведение увеличится на три, если на 5, то произведение увеличится на пять. На сколько изменится произведение, если исходные числа увеличатся на 7?

Решение:

$$(x+a)(y+a)(z+a) - xyz = a^3 + a^2(x+y+z) + a(xy+yz+zx)$$

$$\begin{cases} 3(xy+yz+zx) + 9(x+y+z) + 27 = 3 \\ 5(xy+yz+zx) + 25(x+y+z) + 125 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+yz+zx + 3(x+y+z) = -8 \\ xy+yz+zx + 5(x+y+z) = -24 \end{cases} \Rightarrow a^3 - 8a^2 + 16a$$

$a = 7:\ 343 - 8 \cdot 49 + 16 \cdot 7 = 63$

Ответ: Увеличится 63.

▷ **4.** На доске записано число 2025. За один ход Андрей может произвольным образом разбить одно из записанных на доске чисел на два числа, умножить одно из этих чисел на 11, а другое — на 29, а затем сумму получившихся чисел записать на доску (например, из 2025 можно сначала разбить на числа 20 и 25, а на доску записать $20\cdot11+25\cdot29$ и $20\cdot29+25\cdot11$). Может ли после нескольких ходов Андрей записать число 20222025?

Решение:

Посмотрим, как изменяется остаток числа от деления на 9. Пусть какое-то из записанных на доске чисел n Андрей разбил на a и b, то есть $n = \overline{ab}$. Тогда $n \equiv a + b \pmod 9$. Мы записываем на доску число $11a + 29b$ или $29a + 11b$, каждое из которых сравнимо с $2a + 2b = 2(a+b)$ по модулю 9. Таким образом, остаток числа после применения хода умножается на 2. Тогда, если исходное число делилось на 9, то любое записанное на доске будет делиться на 9. Число 20222025 имеет остаток 5 при делении на 9, то есть на 9 не делится, следовательно, оно не могло быть записано.

Ответ: нет

▷ **5.** Сколько существует нескоратимых дробей с числителем 2025, больших $\frac{1}{2025}$, но меньших $\frac{1}{2024}$?

Решение:

$\frac{1}{2025} < \frac{2025}{N} < \frac{1}{2024}$

$\frac{2025}{2025^2} < \frac{2025}{N} < \frac{2025}{2024 \cdot 2025}$

$2024 \cdot 2025 < N < 2025^2$

$4098600 < N < 4100625$

Количество целых чисел $4100624 - 4098601 + 1 = 2024$

Дробь $\frac{2025}{N}$ будет несократимой, если НОД$(2025, N) = 1$.

Разложим 2025 на простые множители $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ Крайние числа, делящиеся на 3 - 4098603 и 4100622

Количество чисел, делящихся на 3 равно $n_3 = \left[\frac{4100622}{3}\right] - \left[\frac{4098600}{3}\right] = 1366874 - 1366200 = 674$

Аналогично, делящихся на 5 равно $\left[\frac{4100620}{5}\right] - \left[\frac{4098600}{5}\right] = 820124 - 819720 = 404$ Аналогично, делящихся на 15 (НОК(3,5)) равно $\left[\frac{4100610}{15}\right] - \left[\frac{4098600}{15}\right] = 273374 - 273240 = 134$

Количество чисел от 4098601 до 4100624, которые делятся либо на 3, либо на 5 равно 674 + 404 - 134 = 944.

Вычитая из общего количества чисел, получаем количество несократимых дробей $2024 - 944 = 1080$.

Таким образом, существует 1080 несократимых дробей с числителем 2025, которые больше чем $\frac{1}{2025}$ и меньше чем $\frac{1}{2024}$.

Ответ: 1080.

▷ **6.** Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] \geqslant [3x] \cdot \left[\frac{5x}{6}\right]$. Здесь $[a]$ – целая часть числа a.

Решение:

По свойству целой части сумма двух чисел имеет целую часть, не меньшую суммы целых частей слагаемых. Поэтому

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] \leqslant \left[\frac{x}{3} + \frac{x}{3}\right] = \left[\frac{5x}{6}\right].$$

Если x – положительное двузначное число, то $[3x] = 3x \geqslant 30$. Следовательно, $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] \leqslant \left[\frac{5x}{6}\right] < 30 \cdot \left[\frac{5x}{6}\right] \leqslant [3x] \cdot \left[\frac{5x}{6}\right]$, и неравенство, приведённое в условии задачи, не выполняется ни для каких положительных двузначных чисел.

Если x – отрицательное двузначное число, то неравенство не выполняется, поскольку его левая часть отрицательна, а правая положительна как произведение двух отрицательных чисел.

Итак, двузначных чисел, удовлетворяющих данному неравенству, не существует.

Ответ: 0.

▷ **7.** Известно, что 17% числа x меньше 26% числа y на 8% числа $x - y$. На сколько процентов (относительно числа y) число x больше числа y?

Решение:

По условию

$$0,17x + 0,08(x - y) = 0,26y.$$

Находим: $\frac{x}{y} = \frac{8+26}{17+8} = 1 + \frac{26-17}{8+17}$, отсюда $\frac{9}{25} \cdot 100\% = 36\%$.

Ответ: 36.

▷ **8.** Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 20252025?

Решение:

На первом месте может стоять только 2 или 5 (если ноль, число не будет восьмизначным).

Рассмотрим случай, когда на первом месте стоит 2. На оставшиеся 7 позиций нужно расставить два 0, две 5 и три 2 в любом порядке. Это равносильно нахождению числа способов переставить буквы $AABBCCC$. Сделаем сначала все буквы разными, приписав индексы $A_1A_2B_1B_2C_1C_2C_3$. Теперь посчитаем число перестановок. Их 7!. Выпишем все 7! перестановок и сотрём индексы сначала у A_1 и A_2. Каждая перестановка будет встречаться по два раза. Останется $\frac{7!}{2}$, аналочично с B_1 и B_2. Получается $\frac{7!}{2 \cdot 2}$. Теперь сотрём индексы у C_1, C_2 и C_3. Уберём повторения, останется $\frac{7!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Теперь рассмотрим случай, где на первом месте 5. Аналогично, на оставшиеся 7 позиций нужно расставить два 0, одну 5 и четыре 2 в любом порядке. Число перестановок в случае различных цифр 7!. Уберём повторения, останется $\frac{7!}{2! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$.

Сложим все случаи 105+210 = 315.

Ответ: 315.

▷ **9.** Пусть a, b, c - стороны треугольника.

1) Докажите, что если $2a + 3b > 8c$, то c - наименьшая сторона этого треугольника.

2) Докажите, что если $2a + 3b > 7,9c$, то c не обязательно наименьшая сторона этого треугольника.

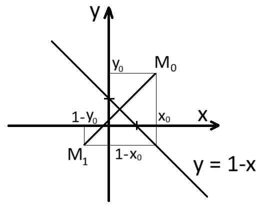
Решение:

1) Докажем, что если $2a+3b > 8c$, то c - наименьшая сторона. Действительно, если $c \geqslant a$, то $3b > 6c + 2(c - a) \geqslant 6c$, отсюда $b > 2c \geqslant c + a$. Противоречие с тем, что $b < c + a$ (ввиду неравенства треугольника). Если же $c \geqslant b$, то $2a > 5c + 3(c - b) \geqslant 5c$, отсюда $a > 2,5c > b + c$. Противоречие с тем, что $a < b + c$.

2) Существует треугольник со сторонами $a = 5,5$, $c = 5,55$, $b = 11$. Легко проверить, что $2a + 3b > 7,9c$, и при этом $c > a$.

▷ **10.** График функции $y = \frac{x}{23} + 89$ отразили симметрично относительно прямой $y = 1 - x$. График какой функции получился?

Решение:



$M_0(x_0, y_0)$ симметричная ей точка относительно прямой $y = 1 - x$ – $M_1(1 - y_0; 1 - x_0)$

Сделаем замену в функции

$1 - x = \frac{1-y}{23} + 89$

$y = 23x - 23 + 89 \cdot 23 + 1$

$y = 23x + 23 \cdot 88 + 1$

$y = 23x + 2025$

Ответ: $y = 23x + 2025$.