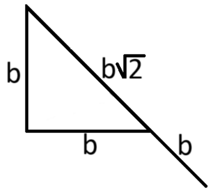
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
8 класс (Азия)

▷ **1.** С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, если дан отрезок равный разности диагонали квадрата и его стороны.

Решение:



Пусть сторона квадрата a, тогда диагональ $a\sqrt{2}$. По условию дан отрезок $a\sqrt{2}-a=b$. Отсюда, $a=b(\sqrt{2}+1)$.

▷ **2.** Сколько существует целых чисел, меньших 2025, не делящихся ни на 5, ни на 7?

Решение:

Общее количество целых чисел, меньших 2025 - 2024. Максимальное число, кратное 5, меньшее 2025 - 2020. Значит, количество чисел, делящихся на 5: $\frac{2020}{5}=404$. Аналогично, максимальное число, кратное 7, меньшее 2025 - 2016, количество чисел: $\frac{2016}{7}=288$.

НОК(5,7) $=$ 35. Максимальное число, кратное 35, меньшее 2025 - 1990. Количество чисел: $\frac{1990}{35}=56$.

404 $+$ 288 - 56 $=$ 636

2024 - 636 $=$ 1388.

Ответ: 1388.

▷ **3.** Даны три числа. Если их все увечилить на 3, то произведение увеличится на три, если на 7, то произведение увеличится на семь. На сколько изменится произведение, если исходные числа увеличатся на 5?

Решение:

$$(x+a)(y+a)(z+a)-xyz=a^3+a^2(x+y+z)+a(xy+yz+zx)$$

$$\begin{cases} 3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)=-24 \\ 7(xy+yz+zx)+49(x+y+z)=-336 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy+yz+zx+7(x+y+z)=-48 \\ xy+yz+zx+3(x+y+z)=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(x+y+z)=-40 \\ xy+yz+zx-3(x+y+z)=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=-10 \\ xy+yz+zx=22 \end{cases}$$

$5\cdot 22-25\cdot 10+125=-15$

Ответ: Уменьшится на 15.

▷ **4.** На доске записано число 2025. За один ход Андрей может произвольным образом разбить одно из записанных на доске чисел на два числа, умножить одно из этих чисел на 11, а другое — на 29, а затем сумму получившихся чисел записать на доску (например, из 2025 можно сначала разбить на числа 20 и 25, а на доску записать $20\cdot 11+25\cdot 29$ и $20\cdot 29+25\cdot 11$). Может ли после нескольких ходов Андрей записать число 20222025?

Решение:

Посмотрим, как изменяется остаток числа от деления на 9. Пусть какое-то из записанных на доске чисел n Андрей разбил на a и b, то есть $n=\overline{ab}$. Тогда $n\equiv a+b \pmod 9$. Мы записываем на доску число $11a+29b$ или $29a+11b$, каждое из которых сравнимо с $2a+2b=2(a+b)$ по модулю 9. Таким образом, остаток числа после применения хода умножается на 2.

Тогда, если исходное число делилось на 9, то любое записанное на доске будет делиться на 9. Число 20222025 имеет остаток 5 при делении на 9, то есть на 9 не делится, следовательно, оно не могло быть записано.

Ответ: нет

▷ **5.** Сколько существует нескоратимых дробей с числителем 225, больших $\frac{1}{225}$, но меньших $\frac{1}{224}$?

Решение:

$\frac{1}{225} < \frac{225}{N} < \frac{1}{224}$

$\frac{225}{225^2} < \frac{225}{N} < \frac{225}{224 \cdot 225}$

$224 \cdot 225 < N < 225^2$

$50400 < N < 50625$

Количество целых чисел $50624 - 50401 + 1 = 224$

Дробь $\frac{225}{N}$ будет несократимой, если НОД$(225, N) = 1$.

Разложим 225 на простые множители $225 = 3^2 \cdot 5^2$

Крайние числа, делящиеся на 3 - 50403 и 50622

Количество чисел, делящихся на 3 равно $\left[\frac{50622}{3}\right] - \left[\frac{50400}{3}\right] = 16874 - 16800 = 74$

Аналогично, делящихся на 5 равно $\left[\frac{50620}{5}\right] - \left[\frac{50400}{5}\right] = 10124 - 10080 = 44$

Аналогично, делящихся на 15 (НОК(3,5)) равно $\left[\frac{50610}{15}\right] - \left[\frac{50400}{15}\right] = 3374 - 3360 = 14$

Количество чисел от 50401 до 50624, которые делятся либо на 3, либо на 5 равно 74 + 44 - 14 = 104.

Вычитая из общего количества чисел, получаем количество несократимых дробей $224 - 104 = 120$.

Таким образом, существует 120 несократимых дробей с числителем 225, которые больше чем $\frac{1}{225}$ и меньше чем $\frac{1}{224}$.

Ответ: 120.

▷ **6.** Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $\left\{\frac{x}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{3}\right\} \leqslant \left\{\frac{5x}{6}\right\}$. Здесь $\{a\}$ — дробная часть числа a.

Решение:

Рассмотрим числа вида $6n+k$, где n – натуральное число, а $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Получим $\left\{\frac{k}{2}\right\} + \left\{\frac{k}{3}\right\} \leqslant \left\{\frac{5k}{6}\right\}$.

Проверим выполнение этого неравенства. При $k = 0, 1, 2, 3, 4$ оно превращается в равенство и, значит, верно. При $k = 5$ получим $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{6}$, что неверно.

Таким образом, неравенству удовлетворяют все числа, кроме дающих при делении на 6 остаток 5.

Сумма всех двузначных чисел равна $S_1 = \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 109 \cdot 45 = 4905$, сумма всех двузначных чисел, дающих при делении на 6 остаток 5, равна $S_2 = \frac{11+95}{2} \cdot 15 = 795$. Искомая сумма $S = S_1 - S_2 = 4905 - 795 = 4110$.

Ответ: 4110.

▷ **7.** Известно, что 20,25 % числа x меньше 23,75 % числа y и на 7,75% числа $x - y$. На сколько процентов (относительно числа y) число x больше числа y?

Решение:

По условию

$$0,2025x + 0,0775(x - y) = 0,2375y.$$

Находим: $\frac{x}{y} = \frac{7,75+23,75}{20,25+7,75} = 1 + \frac{23,75-20,25}{7,75+20,25}$, отсюда $\frac{3,5}{28} \cdot 100\% = 12,5\%$.

Ответ: 12,5.

▷ **8.** Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 20262024?

Решение:

На первом месте может стоять только 2, 6 или 4 (если ноль, число не будет восьмизначным).

Рассмотрим случай, когда на первом месте стоит 2. На оставшиеся 7 позиций нужно расставить три 2, два 0, одну 4 и одну 6 в любом порядке. Это равносильно нахождению числа способов переставить буквы $AAABBCD$. Сделаем сначала все буквы разными, приписав индексы $A_1A_2A_3B_1B_2CD$. Теперь посчитаем число перестановок. Их 7!. Выпишем все 7! перестановок и сотрём индексы сначала у A_1, A_2 и A_3. Останется $\frac{7!}{3!}$. Аналочично поступаем с B_1 и B_2. Получается $\frac{7!}{3!\cdot 2!}$. Уберём оставшиеся повторения, останется $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{2} = 420$.

Теперь рассмотрим случай, где на первом месте 4. Аналогично, на оставшиеся 7 позиций нужно расставить четыре 2, два 0 и одну 6 в любом порядке. Число перестановок в случае различных цифр 7!. Уберём повторения, останется $\frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$.

Рассмотрим оставшийся случай, где на первом месте 6. Аналогично, на оставшиеся 7 позиций нужно расставить четыре 2, два 0 и одну 4 в любом порядке. Число перестановок в случае различных цифр 7!. Уберём повторения, останется $\frac{7!}{4!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2} = 105$.

Сложим все случаи 105+105+420 = 630.

Ответ: 630.

▷ **9.** Пусть a, b, c - стороны треугольника.

1) Докажите, что если $3a + 4b > 11c$, то c - наименьшая сторона этого треугольника.

2) Докажите, что если $3a + 4b > 10,99c$, то c необязательно наименьшая сторона этого треугольника.

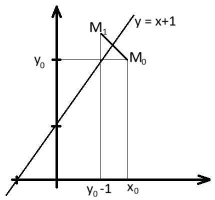
Решение:

1) Докажем, что если $3a + 4b > 11c$, то c - наименьшая сторона. Действительно, если $c \geqslant a$, то $4b > 11c - 3a = 8c + 3(c - a) \geqslant 8c$, отсюда $b > 2c = c + c \geqslant c + a$. Противоречие с тем, что $b < c + a$ (ввиду неравенства треугольника). Если же $c \geqslant b$, то $3a > 11c - 4b = 7c + 4(c - b) \geqslant 7c$, отсюда $a > 2\frac{1}{3}c > 2c = c + c > b + c$. Противоречие с тем, что $a < b + c$.

2) Существует треугольник со сторонами $a = 6,97$, $c = 7,04$, $b = 14$. Легко проверить, что $3a + 4b = 76,91 > 10,9c = 76,736$, и при этом $c > a$.

▷ **10.** График функции $y = -\frac{x}{22} + 93$ отразили симметрично относительно прямой $y = x + 1$. График какой функции получился?

Решение:



$M_0(x_0, y_0)$ симметричная ей точка относительно прямой $y = x + 1$ – $M_1(y_0 - 1; x_0 + 1)$

Сделаем замену в функции

$22y + x = 2046$

$22(x + 1) + y - 1 = 2046$

$y = -22x + 1 - 22 + 93 \cdot 22$

$22x + y = 2025$

$y = -22x + 2025$

Ответ: $y = -22x + 2025$.