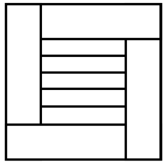
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
9 класс (Европа)

▷ **1.** Можно ли разрезать квадрат на 9 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение:



Периметр квадрата равен $P = 4a$.

$4: \ (a-b+b)2 = 2a = \frac{p}{2}$

$5: \ (a-2b+\frac{a-2b}{5})2 = 2a$

$\frac{6}{5}a - \frac{12}{5}b = a$

$\frac{a}{12} = b$

Ответ: Да.

▷ **2.** В десятичной записи числа $\frac{1}{14}$ вычеркнули 2025-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $\frac{1}{14}$?

Решение:

Полученное число больше. Поскольку $\frac{1}{14} = 0,0(714285)$, а длина периода дроби равна 6 и предпериод в одну цифру, на 2025-м месте после запятой стоит цифра 1, а после её вычеркивания на её месте оказывается 4.

▷ **3.** Даны три попарно неравных отрезка, длины которых (в порядке убывания) равны a, b и c. Постройте, с помощью циркуля и линейки, отрезок x, длина которого равна $\sqrt[4]{a^4-b^3c}$.

Решение:

Преобразуем выражение для искомого отрезка:

$$\sqrt[4]{a^4-b^3c} = \sqrt[4]{a^2\left(a^2-\frac{b^3c}{a^2}\right)} = \sqrt{a\sqrt{a^2-\left(\frac{b\sqrt{bc}}{a}\right)^2}}.$$

Отсюда ясна последовательность построения. Сначала построим отрезок $x = \sqrt{bc}$, затем $y = \frac{bx}{a}$, затем $z = \sqrt{a^2-y^2}$ и, наконец, искомый отрезок $\sqrt{az}$.

▷ **4.** Последовательность a_n удовлетворяет при любом натуральном n соотношению

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}.$$

Найдите S_{2025}, если $a_{33} = 3$, $a_{44} = 4$. $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Решение:

Обозначим $a_1 = a, a_2 = b$ и вычислим несколько первых членов последовательности: $a_3 = \frac{b+1}{a}$, $a_4 = \frac{a+b+1}{ab}$, $a_5 = \frac{a+1}{b}$, $a_6 = a$, $a_7 = b$. Далее все будет повторяться с периодом в пять членов. Таким образом, $a_{33} = a_3$, $a_{44} = a_4$ и

$a_1 = a_6 = \cdots = a_{2026} = a$

$a_2 = a_7 = \cdots = a_{2022} = b$

$a_3 = a_8 = \cdots = a_{2023} = \frac{b+1}{a} = 3$

$a_4 = a_9 = \cdots = a_{2024} = \frac{a+b+1}{ab} = 4$

$a_5 = a_{10} = \cdots = a_{2025} = \frac{a+1}{b}$

$a_{1+5n} = a$

$. \begin{cases} \frac{b+1}{a} = 3, \\ \frac{a+b+1}{ab} = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ b = 1. \end{cases}$

$a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = \frac{5}{3}$

$S_5 = 8 + \frac{7}{3} = \frac{31}{3}$

$S_{2025}=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\cdot\frac{2025}{5}=\frac{31}{3}\cdot\frac{2025}{5}=31\cdot 135=4185.$

Ответ: 4185.

▷ **5.** На доске сначала было записано число 1. Каждую минуту к имеющемуся в этот момент числу прибавляют сумму его цифр. Может ли спустя некоторое время на доске появится 12-ти значное число 202420252026.

Решение:

Число и сумма его цифр при делении на 3 дают одинаковые остатки. Поэтому, начиная с остатка 1, на втором шаге получим остаток 2, а с остатка 2 - снова остаток 1 и так далее. Таким образом, число 202420252026, которое делится на 3, появиться на доске не может.

▷ **6.** Найдите две последние цифры следующей сверхстепени $9^{9^{9^{\cdots^{9}}}}$, где 9 встречается в записи 2025 раз.

Решение:

Выписываем последние цифры первых десяти степени числа 9

$9^1=9$; $9^2=81$; $9^3=100N_3+29$; $9^4=100N_4+61$; $9^5=100N_5+49$;

$9^6=100N_6+41$; $9^7=100N_7+69$; $9^8=100N_8+21$; $9^9=100N_9+89$;

$9^{10}=100N_{10}+01$

$N_k\in N\ \forall k=\overline{3,10}$

$9^9=10M+89$, $9^{9^9}=9^{10M+9}=(9^{10})^M\cdot 9^9=(100N_{10}+1)^M(100N_9+89)=100M_1+89$

Далее, по индукции ($9^{a_n}=a_{n+1}$; $a_1=9$) последние две цифры этой сверхстепени образуют двузначное число 89.

Ответ: 89.

▷ **7.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

Решение:

Искомое событие A состоит в том, что составленная из двух чисел дробь - сократимая. Общее число элементарных исходов $N=A_{10}^2=10\cdot 9=90$. В таблице представлены все элементарные исходы испытания, причём знаком “+” отмечены исходы, благоприятствующие событию A, а знаком “-” - исходы, ему неблагоприятствующие.

	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
15		-	-	+	-	+	+	-	-	+
16			-	+	-	+	-	+	-	+
17				-	-	-	-	-	-	-
18					-	+	+	+	-	+
19						-	-	-	-	-
20							-	+	-	+
21								-	-	+
22									-	+
23										-
24										

Заметим, что каждый знак “+” в таблице означает две сократимые дроби. Тогда $M=2\cdot 16=32$, $N=A_{10}^2=90$, поэтому $P(A)=\frac{32}{90}=\frac{16}{45}$.

Ответ: $\frac{16}{45}$.

▷ **8.** Существует ли натуральное число n такое, что $5n$ является пятой степенью натурального числа, $6n$ - шестой степенью, $7n$ - седьмой степенью?

Решение:

Существует. Из условия следует, что n делится на 5,6 и 7. Будем искать n в виде $n=5^k\cdot 6^l\cdot 7^m$. При этом

$$k+1\ \vdots\ 5,\ k\ \vdots\ 6,\ k\ \vdots\ 7,$$

$$l\ \vdots\ 5,\ l+1\ \vdots\ 6,\ l\ \vdots\ 7$$

$$m\ \vdots\ 5,\ m\ \vdots\ 6,\ m+1\ \vdots\ 7$$

После сделанных замечаний нужные значения k, l, m подбирается без труда.

$5^{84} \cdot 6^{35} \cdot 7^{70}$

$\triangleright$ **9.** Два тела движутся по окружности. Первое проходит окружность на 16 секунд быстрее второго. С интервалом в 12 секунд они оказываются в одной и той же точке. Какую часть окружности каждое тело проходит в одну секунду?

Решение:

Пусть t - время прохождения окружности первым телом, $t+16$ - время прохождения вторым телом.

Рассмотрим два случая

a) Пусть тела движутся в одном направлении.

$\frac{2\pi R}{t} - \frac{2\pi R}{t+16} = \frac{2\pi R}{12} \Rightarrow t = 8, t+16 = 24.$

Следовательно, $\frac{1}{8}$ круга проходит первое тело за одну секунду и $\frac{1}{24}$ второе тело.

b) Пусть тела движутся в разных направлениях.

$\frac{2\pi R}{t} + \frac{2\pi R}{t+16} = \frac{2\pi R}{12} \Rightarrow t = 4 + 4\sqrt{13}, t+16 = 20 + 4\sqrt{13}.$

Следовательно, $\frac{\sqrt{13}-1}{48}$ части круга проходит первое тело за одну секунду, $\frac{5-\sqrt{13}}{48}$ части круга проходит второе тело за одну секунду.

Ответ: $a)\ \frac{1}{8}, \frac{1}{24},\ b)\ \frac{\sqrt{13}-1}{48}, \frac{5-\sqrt{13}}{48}$

$\triangleright$ **10.** Найдите $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2024}$, где $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ с точностью до четвертого десятичного знака.

Решение:

$a_n = \frac{\sqrt{n}(n+1)-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n-n^2(n+1)} = \frac{\sqrt{n}(n+1)-n\sqrt{n+1}}{n^3+2n^2+n-n^3-n^2} = \frac{\sqrt{n}(n+1)-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2024} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} = 0,9(7) = 0,9778$

Ответ: $0,9778.$