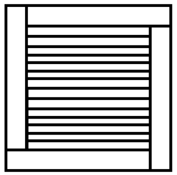
Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2025»
Заключительный тур
9 февраля 2025 года
9 класс (Азия)

▷ **1.** Можно ли разрезать квадрат на 18 прямоугольников, периметр каждого из которых равен полупериметру исходного квадрата?

Решение:



Периметр квадрата равен $P = 4a$.

$4: \ (a - b + b)2 = 2a = \frac{p}{2}$

$14: \ (a - 2b + \frac{a-2b}{14})2 = 2a$

$\frac{15}{14}a - \frac{30}{14}b = a$

$\frac{a}{30} = b$

Ответ: Да.

▷ **2.** В десятичной записи числа $\frac{1}{13}$ вычеркнули 2025-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или $\frac{1}{13}$?

Решение:

Полученное число больше. Поскольку $\frac{1}{13} = 0,(076923)$, а длина периода дроби равна 6, на 2025-м месте после запятой стоит цифра 6, а после её вычеркивания на её месте оказывается 9.

▷ **3.** Даны отрезки a, b, c и d. Постройте отрезок с помощью циркуля и линейки отрезок x, длина которого равна $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$.

Решение:

Построим сначала отрезок $u = \sqrt{a^2 + b^2}$. Затем, если $c > d$, построим отрезок $v = \sqrt{c^2 - d^2}$ и, наконец, $x = \sqrt{u^2 - v^2}$. Если же $c < d$, то построим отрезок $v = \sqrt{d^2 - c^2}$, после чего $x = \sqrt{u^2 + v^2}$.

▷ **4.** Существует ли 2025 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2024 из них делится на оставшееся?

Решение:

Существуют, например, 1, 2, 3, 6, 12, 24, ... (первые три числа 1, 2, 3, а каждое следующее в два раза больше предыдущего). Последнее, 2025-е число, будет равно $3 \cdot 2^{2022}$. Как нетрудно проверить, каждое следующее число, начиная с 4-го, равно сумме всех предыдущих. Поэтому, если выбрать какое-то из этих чисел (кроме 1, 2 и 3), то сумма предыдущих делится на него, и каждое последующее тоже делится на него. Стало быть, сумма всех чисел, кроме выбранного, делится на выбранное число. Для чисел 1, 2 и 3, проверка тривиальна.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2024}, a_{2025}$

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = 2^{n-3}a_3$

$S = 1+2+3+2\cdot3+2^2\cdot3+\cdots+2^{2021}\cdot3+2^{2022}\cdot3 = 1+2+3(1+2+2^2+2^{2022}) = 1 + 2 + 3(2^{2023} - 1) = 3 \cdot 2^{2023}$

$\frac{S-a_k}{a_k} = \frac{S}{a_k} - 1$

$S \vdots 1(a_1), S \vdots 2(a_2)$

▷ **5.** Петя вычислил сумму $1 + 2 + \cdots + N$ и зачеркнул в ней последние k цифр (k - некоторое фиксированное натуральное число). У него опять получилось N. Найдите это N, если $k = 5$.

Решение:

$$\left[\frac{N(N+1)}{2 \cdot 10^5}\right] = N$$

$$N \leqslant \frac{N(N+1)}{2 \cdot 10^5} < N+1$$

$$2 \cdot N \cdot 10^5 \leqslant N(N+1) < 2 \cdot (N+1) \cdot 10^5$$

$$199999 \leqslant N < 200000$$

$$N = 199999$$

Ответ: 199999.

▷ **6.** Найдите две последние цифры следующей сверхстепени $11^{11^{11^{\cdots^{11}}}}$, где 1 встречается в записи 2024 раза.

Решение:

Выписываем последние цифры первых десяти степени числа 11

$11^1 = 11$; $11^2 = 21$; $11^3 = 100N_3 + 31$; $11^4 = 100N_4 + 41$; $11^5 = 100N_5 + 51$; $11^6 = 100N_6 + 61$; $11^7 = 100N_7 + 71$; $11^8 = 100N_8 + 81$; $11^9 = 100N_9 + 91$; $11^{10} = 100N_{10} + 01$

$11^{11} = 11^{10} \cdot 11 = \ldots 11$, т.е. $11^{11} = 100M + 11 = 10N11$

$11^{11^{11}} = 11^{10N+1} = (11^{10})^N \cdot 11 = 01 \cdot 11 = 11$и т.д.

Ответ: 11.

▷ **7.** На десяти одинаковых карточках написаны числа 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34. Наугад берутся две карточки. Найти вероятность того, что образованная на двух полученных чисел дробь несократима.

Решение:

Искомое событие A состоит в том, что составленная из двух чисел дробь - несократимая. Общее число элементарных исходов $N = A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. В таблице представлены все элементарные исходы испытания, причём знаком "-" отмечены исходы, благоприятствующие событию A, а знаком "+" - исходы, ему неблагоприятствующие.

	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
25		-	-	-	-	+	-	-	-	-
26			-	+	-	+	-	+	-	+
27				-	-	+	-	-	+	-
28					-	+	-	+	-	+
29						-	-	-	-	-
30							-	+	+	+
31								-	-	-
32									-	+
33										-
34										

Заметим, что каждый знак "+" в таблице означает две сократимые дроби. Тогда $M = 2 \cdot 31 = 62$, $N = A_{10}^2 = 90$, поэтому $P(A) = \frac{62}{90} = \frac{31}{45}$.

Ответ: $\frac{31}{45}$.

▷ **8.** Первая цифра чисел 5^n и 2^n одна и та же. Какая это цифра?

Решение:

Пусть при некотором n 5^n и 2^n начинаются на цифру k. Тогда $k \cdot 10^x < 5^n < (k+1) \cdot 10^x$ и $k \cdot 10^y < 2^n < (k+1) \cdot 10^y$. Перемножим эти неравенства:

$$k^2 \cdot 10^{x+y} < 10^n < (k+1)^2 \cdot 10^{x+y}, \ k^2 < 10^{n-x-y} < (k+1)^2$$

Получается, что какая-то степень десятки расположена между двумя последовательными квадратами. Учитывая, что k - цифра, это возможно только для $3^2 < 10 < 4^2$, следовательно, $k = 3$.

Ответ: 3.

▷ **9.** Два тела движутся по окружности. Первое проходит окружность на 12 секунд быстрее второго. С интервалом в 16 секунд они оказываются в одной и той же точке. Какую часть окружности каждое тело проходит в одну секунду?

Решение:

Пусть t - время прохождения окружности первым телом, $t + 16$ - время прохождения вторым телом.

Рассмотрим два случая

a) Пусть тела движутся в одном направлении.

$\frac{2\pi R}{t} - \frac{2\pi R}{t+12} = \frac{2\pi R}{16} \Rightarrow t = 2\sqrt{57} - 6, t + 12 = 2\sqrt{57} + 6.$

Следовательно, $\frac{3+\sqrt{57}}{96}$ круга проходит первое тело за одну секунду и $\frac{\sqrt{57}-3}{96}$ второе тело.

b) Пусть тела движутся в разных направлениях.

$\frac{2\pi R}{t} + \frac{2\pi R}{t+12} = \frac{2\pi R}{16} \Rightarrow t = 10 + 2\sqrt{73}, t + 12 = 22 + 2\sqrt{73}.$

Следовательно, $\frac{\sqrt{73}-5}{96}$ части круга проходит первое тело за одну секунду, $\frac{11-\sqrt{73}}{96}$ части круга проходит второе тело за одну секунду.

Ответ: $a)$ $\frac{3+\sqrt{57}}{96}, \frac{\sqrt{57}-3}{96},$ $b)$ $\frac{\sqrt{73}-5}{96}, \frac{11-\sqrt{73}}{96}$

▷ **10.** Вычислить с точностью до четвёртого десятичного знака выражение

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2025}.$$

Решение:

$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2023\cdot 2025} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2023} - \frac{1}{2025}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2025}\right) =$

$= 0,5 - 0,0002469 = 0,4998$

Ответ: $0,4998.$